EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

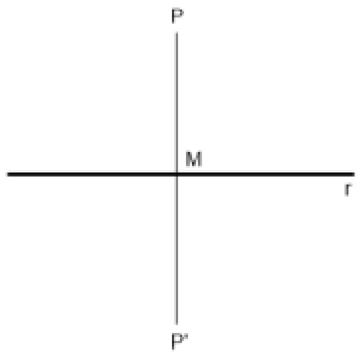
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1,-2,0)$ y su vector director $\vec{u} = (3,0,1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1,-1,0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3,0,1)$ y $\vec{PA} = (0,-1,0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+3z+1 = 0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1+3t,-2,t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1+3t-1,-2+1,t-0) = (3t,-1,t)$. Queremos que el vector $\vec{PM}$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3,0,1)$, luego: $\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (3t,-1,t)\cdot(3,0,1) = 0 \Rightarrow 9t+t = 0 \Rightarrow t = 0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1,-2,0)$.
Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,0)+(a,b,c)}{2} = (1,-2,0) \Rightarrow P' = (1,-3,0)$$

Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$.

a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n-2m-1=0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow m+n=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m=-\dfrac{1}{4}$; $n=\dfrac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\dfrac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V=10=\frac{1}{6}\, Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|1-2m| \Rightarrow |1-2m|=60 \Rightarrow \begin{cases} 1-2m=60 \Rightarrow m=-\dfrac{59}{2} \\ -1+2m=60 \Rightarrow m=\dfrac{61}{2} \end{cases}$$

Considera los vectores $\vec{u}=(2,3,4)$, $\vec{v}=(-1,-1,-1)$ y $\vec{w}=(-1,\lambda,-5)$ siendo λ un número real.
a) Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene volumen 6 unidades cúbicas.
b) Determina el valor de λ para el que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El volumen del paralelepípedo viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda-6 \Rightarrow \left| -2\lambda-6 \right| = 6 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = -6$$

b) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda-6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Sea r la recta que pasa por $A(4,3,6)$ y $B(-2,0,0)$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de r y s.

b) Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta r viene definida por $A(4,3,6)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (-6,-3,-6)$. La recta s viene definida por el punto $D(2,0,1)$ y el vector $\vec{u} = (1,1,-2)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AD} = (-2,-3,-5)$.

Calculamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2+6F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -41 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Cualquier punto C de la recta s, tiene de componentes: $C(2+t,t,1-2t)$. Calculamos los vectores: $\overrightarrow{CA} = (2-t,3-t,5+2t)$ y $\overrightarrow{CB} = (-4-t,-t,-1+2t)$. Si son ortogonales, su producto escalar vale cero:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (2-t,3-t,5+2t)\cdot(-4-t,-t,-1+2t) = 6t^2+7t-13 = 0 \Rightarrow t = 1 \,;\, t = -\frac{13}{6}$$

Luego, los puntos C son: $C_1(3,1,-1)$ y $C_2\left(-\frac{1}{6},-\frac{13}{6},\frac{16}{3}\right)$

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Halla la distancia entre las rectas *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto genérico de cada recta y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=s \\ y=1+s \\ z=1+s \end{cases} \Rightarrow A(s,1+s,1+s) \ ; \ \vec{u}=(1,1,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow B(1-t,t,2) \ ; \ \vec{v}=(-1,1,0)$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de coordenadas: $\overrightarrow{AB}=(1-t-s,t-1-s,1-s)$.
Como el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene que ser perpendicular a las rectas *r* y *s*, se debe cumplir:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (1-t-s,t-1-s,1-s)\cdot(1,1,1)=1-t-s+t-1-s+1-s=1-3s=0 \Rightarrow s=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (1-t-s,t-1-s,1-s)\cdot(-1,1,0)=-1+t+s+t-1-s=2t-2=0 \Rightarrow t=1$$

Con lo cual: $A(s,1+s,1+s)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; $B(1-t,t,2)=(0,1,2)$;

$$\overrightarrow{AB}=(1-t-s,t-1-s,1-s)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{y-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{z-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

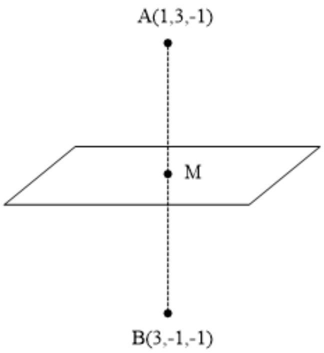
b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=0'816\ u$$

Considera los puntos $A(1,3,-1)$ y $B(3,-1,-1)$.
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual *B* es el simétrico de *A*.
b) Siendo $C(5,1,5)$, calcula el área del triángulo de vértices *A*;*B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto *M*

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(1,3,-1)+(3,-1,-1)}{2}=(2,1,-1)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(2,-4,0)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x-4y+D=0$$

Como queremos que pase por el punto *M*, entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x-4y+D=0\Rightarrow 2\cdot 2-4\cdot 1+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow 2x-4y=0$$

b) Calculamos el área del triángulo *ABC*.

$\overrightarrow{AB}=(2,-4,0)$; $\overrightarrow{AC}=(4,-2,6)$.

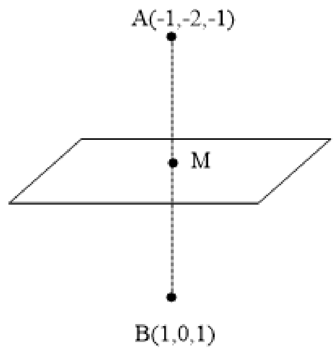
$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\;módulo\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 0\\ 4 & -2 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}módulo\left[-24\,\vec{i}-12\,\vec{j}+12\,\vec{k}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+(-12)^2+(12)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{864}=\sqrt{216}=14'69\ u^2$$

Considera los puntos $A(-1,-2,-1)$ y $B(1,0,1)$.
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos *A* y *B* son simétricos.
b) Calcula la distancia de $P(-1,0,1)$ a la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto *M*

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(-1,-2,-1)+(1,0,1)}{2}=(0,-1,0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x+2y+2z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto *M*, entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x+2y+2z+D=0\Rightarrow 2\cdot 0+2\cdot(-1)+2\cdot 0+D=0\Rightarrow D=2\Rightarrow 2x+2y+2z+2=0\Rightarrow x+y+z+1=0$$

b) La recta que pasa por *A* y *B* tiene de ecuación: $\left\{\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=-2+2t \\ z=-1+2t \end{array}\right.$. Cualquier punto de esta recta tiene de coordenadas: $C(-1+2t,-2+2t,-1+2t)$. Calculamos el vector

$$\overrightarrow{PC}(-1+2t+1,-2+2t-0,-1+2t-1)=(2t,-2+2t,-2+2t)$$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector director de la recta, luego:

$$\overrightarrow{PC}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(2t,-2+2t,-2+2t)\cdot(2,2,2)=0\Rightarrow 4t-4+4t-4+4t=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

La distancia del punto *P* a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PC}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, luego:

$$d=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=1'63\ u$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.
a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices *A, B , C* y D.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por *D* y es perpendicular al plano determinado por los puntos *A, B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,-3,1)$; $\vec{AC}=(-2,-1,1)$ y $\vec{AD}=(1,-2,-3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}|15|=\frac{15}{6}\,u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}=(-2,-1,-5)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-5}$

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y-z=3 \\ -x+2y=3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

b) Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{array}{r} y-z=3 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-3+2t \\ y=t \\ z=-3+t \end{array}\right\}$

La recta pasa por el punto $P=(-3,0,-3)$ y su vector director es $\vec{u}=(2,1,1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(1,0,0)$, el vector $\vec{u}=(2,1,1)$ y el vector $\vec{AP}=(-4,0,-3)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x-2y-4z-3=0$$

b) Calculamos la ecuación del plano. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(1,0,0)$ y los vectores $\vec{AB}=(-1,1,0)$ y $\vec{BC}=(0,-1,\lambda)$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x+\lambda y+z-\lambda=0$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left.\begin{array}{r} y-z=3 \\ -x+2y=3 \\ \lambda x+\lambda y+z=\lambda \end{array}\right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda=-\frac{1}{3}$	2	3	Recta paralela al plano.
$\lambda\neq-\frac{1}{3}$	3	3	Recta secante al plano.

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y=0$.
a) Halla la ecuación de la recta que pasa por *P*, está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a $\vec{u}$.
b) Determina la ecuación del plano que pasa por *P*, es perpendicular a π y del que $\vec{u}$ es un vector director.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por el punto $P(-1,0,1)$ y su vector director es $\vec{v}=(a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a $\vec{u}=(1,2,1)$, el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a+2b+c=0$.
Además la recta está contenida en el plano $y=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n}=(0,1,0)$ y el vector $\vec{v}=(a,b,c)$, también es cero, luego: $b=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+c=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=(-c,0,c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a *c* el valor 1, la recta será:

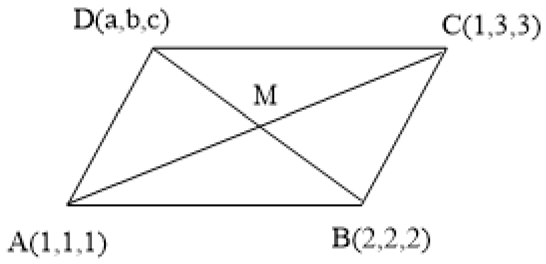
$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}$$

b) El plano que nos piden viene definido por el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,2,1)$ y el vector normal del plano π, $\vec{n}=(0,1,0)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+z-2=0$$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
a) Calcula el área del paralelogramo.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
c) Calcula las coordenadas del vértice *D*.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,1)$ y $\vec{AC}=(0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(0,-2,2)$$

$$Área = módulo\ \left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,1)$ y $\vec{AC}=(0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-1 & 1 & 2\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-z=0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M=\frac{A+C}{2}\Rightarrow M=\frac{(1,1,1)+(1,3,3)}{2}=(1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow(1,2,2)=\frac{(2,2,2)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,2,2)$$

Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

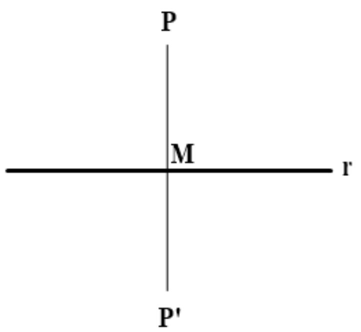
a) La ecuación del haz de planos es: $x-2y+5+k(z-2)=0$.

Como queremos el plano que pasa por $P(0,1,1)$, tenemos que:

$$0-2\cdot 1+5+k(1-2)=0 \Rightarrow k=3$$

luego, el plano es: $x-2y+5+3(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+3z-1=0$

b)



Pasamos la recta *r* a paramétricas: $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$, con lo cual:

$$M=(-5+2t,t,2)\ ;\ \vec{u}=(2,1,0)$$

Para calcular el simétrico del punto $P=(0,1,1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PM}=(-5+2t,t-1,1)$ y el vector $\vec{u}=(2,1,0)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PM}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (-5+2t,t-1,1)\cdot(2,1,0)=0 \Rightarrow -10+4t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{11}{5} \Rightarrow M=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow \left(\frac{0+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right) \Rightarrow P'=\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$$