EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Septiembre, Ejercicio 4
- Septiembre, Ejercicio 8

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1'25 puntos) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.
b) (1'25 puntos) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.
MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \Rightarrow A = (1,2,1) \; ; \; \vec{u} = (1,1,a)$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow B = (3,3,-1) \; ; \; \vec{v} = (-a,-1,2)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,1,-2)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \overrightarrow{AB}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2+4-a^2+2a-2a-2 = 4-a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Si $a = \pm 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) Calculamos el punto de corte de las dos rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

Igualando tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} 1+t &= 3-2\lambda \\ 2+t &= 3-\lambda \\ 1+2t &= -1+2\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = 0 \; ; \; \lambda = 1 \Rightarrow \text{Punto de corte: } (1,2,1)$$

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{k} - 2\vec{j} + 2\vec{i} = (4,-6,1)$$

Luego, la recta es: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-1}{1}$

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y es perpendicular a *r*.
b) (1'25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas y calculamos un punto y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-3t \\ y=-2+3t \Rightarrow B=(2,-2,0) \; ; \vec{u}=(-3,3,1) \\ z=t \end{cases}$$

El vector normal del plano que nos piden es el mismo que $\vec{u}=(-3,3,1)$. Luego, el plano tendrá de ecuación

$$-3x+3y+z+D=0$$

Como tiene que pasar por el punto $A(1,-2,0)$, sustituimos para calcular D

$$-3\cdot 1+3\cdot(-2)+0+D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow -3x+3y+z+9=0$$

b) El plano que nos piden viene definido por: $A(1,-2,0)$; $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ y $\vec{u}=(-3,3,1)$. Luego, la ecuación general del plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y+2 & 0 & 3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3z-y-2=0 \Rightarrow y-3z+2=0$$

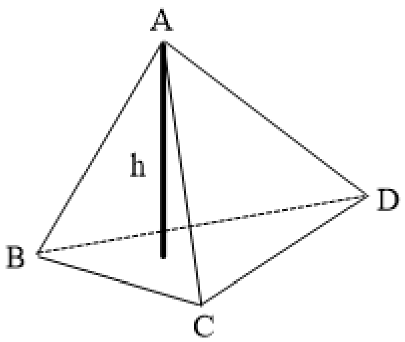
Considera el tetraedro de vértices $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,3)$ y $D(1,0,3)$.
a) (1 punto) Calcula el volumen de dicho tetraedro.
b) (1'5 puntos) Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,0)$; $\vec{AC}=(0,1,3)$ y $\vec{AD}=(1,0,3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}|6|=1\,u^3$$

b)



La medida de la altura será la distancia del punto *A* al plano de vértices *B*,*C* y *D*.

Calculamos los vectores $\vec{BD}=(0,-1,3)$, $\vec{BC}=(-1,0,3)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -1\\ y-1 & -1 & 0\\ z & 3 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow -3x-3y-z+6=0$$

Calculamos la distancia del punto *A* a dicho plano

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3\cdot 0-3\cdot 0-1\cdot 0+6|}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{19}}=1'376\ u$$

Se considera los puntos $A(-1,3,2)$, $B(2,-1,-1)$ y $C(a-2,7,b)$.
a) (1'25 puntos) Determina a y b para que los puntos A,B y C estén alineados.
b) (1'25 puntos) En el caso $a=b=1$, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene los puntos A,B y C
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Si los puntos están alineados, entonces los vectores $\vec{AB}(3,-4,-3)$ y $\vec{AC}(a-1,4,b-2)$ tienen que ser proporcionales, luego:

$$\frac{3}{a-1}=\frac{-4}{4}=\frac{-3}{b-2}\Rightarrow\begin{cases}3=-a+1\Rightarrow a=-2\\ -b+2=-3\Rightarrow b=5\end{cases}.$$

b) Calculamos los vectores: $\vec{AB}(3,-4,-3)$ y $\vec{AC}(0,4,-1)$. El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{u}=\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & -3\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=16\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}=(16,3,12)$$

Por lo tanto la recta que nos piden es: $\frac{x}{16}=\frac{y}{3}=\frac{z}{12}$

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=5 \\ x-z=1 \end{cases}$.

a) (1'5 Puntos). Determina el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

b) (1 Punto).Calcula el punto de la recta *r* que dista $\sqrt{6}$ unidades de *P*.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=-4+3t \\ z=t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1,3,1)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$x+3y+z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,0,-1)$.

$$x+3y+z+D=0 \Rightarrow 1+3\cdot 0-1+D=0 \Rightarrow D=0$$

Luego, el plano que nos piden es: $x+3y+z=0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x+3y+z=0 \Rightarrow (1+t)+3(-4+3t)+t=0 \Rightarrow 11t-11=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(1+1,-4+3,1)=(2,-1,1)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,0,-1)+(a,b,c)}{2}=(2,-1,1) \Rightarrow P'=(3,-2,3)$$

b) Cualquier punto de la recta *r* tiene de coordenadas $A=(1+t,-4+3t,t)$. Calculamos el vector $\vec{PA}=(1+t-1,-4+3t-0,t+1)=(t,-4+3t,t+1)$. El módulo de ese vector debe medir $\sqrt{6}$, luego:

$$\sqrt{6}=\left|\vec{PA}\right|=\sqrt{t^2+(-4+3t)^2+(t+1)^2} \Rightarrow 6=t^2+16+9t^2-24t+t^2+1+2t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11t^2-22t+11=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto es: $A=(1+t,-4+3t,t)=(2,-1,1)$

Considera los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$.

a) (1'5 Puntos). Halla *a* y *b* sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) (1 Punto). Para $a=1$, halla el valor o los valores de *b* para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 8.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a-1+2b=0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow 2a+b=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $a=-\frac{1}{5}$; $b=\frac{2}{5}$

b) Calculamos el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V=6=Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = \left|-1-1+2b\right| \Rightarrow \left|-2+2b\right|=6 \Rightarrow \begin{cases} -2+2b=6 \Rightarrow b=4 \\ 2-2b=6 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

Considera los puntos $A(t,2,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,3,-t-1)$.
a) Calcula el valor o los valores de t para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 unidades cúbicas.
b) Para $t=0$, calcula la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-t,-1,2)$; $\vec{AC}=(-1-t,-2,3)$ y $\vec{AD}=(2-t,1,-t)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=5=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -t & -1 & 2 \\ -1-t & -2 & 3 \\ 2-t & 1 & -t \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-t^2+t\right| \Rightarrow \left|-t^2+t\right|=30 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+t=30 \\ t^2-t=30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2-t+30=0 \Rightarrow No \\ t^2-t+30=0 \Rightarrow t=-5 \text{ , } t=6 \end{cases}$$

Luego, $t=-5$ ó $t=6$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por B y C, con el punto B y el vector $\vec{BC}=(-1,-1,1)$.

$$\begin{cases} x=-t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$$

Calculamos el plano perpendicular a la recta y que pasa por A.

$$-x-y+z+D=0 \Rightarrow -0-2-1+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow -x-y+z+3=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x-y+z+3=0 \Rightarrow t-(1-t)+(1+t)+3=0 \Rightarrow 3t+3=0 \Rightarrow t=-1$$

Luego el punto de corte es $M=(1,1+1,1-1)=(1,2,0)$

La distancia que nos piden es el módulo del vector $\vec{AM}=(1,0,1)$. Luego:

$$d=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}\ u$$

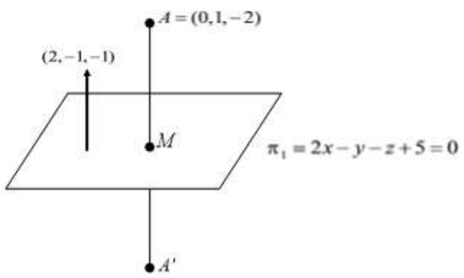
Considera el punto $A(0,1,-2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x-y-z+5=0$ y $\pi_2 \equiv x+5y-6z-4=0$.

a) (1'5 Puntos). Halla el punto simétrico de A respecto de π_1.

b) (1 Punto). Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto A es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,-1,-1)$

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=-2-t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano; para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2x-y-z+5=0 \Rightarrow 2(2t)-(1-t)-(-2-t)+5=0 \Rightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1$$

Luego, el punto de corte es $M=(2t,1-t,-2-t)=(-2,2,-1)$.

Calculamos el punto simétrico

$$\frac{A+A'}{2}=M \Rightarrow \frac{(0,1,-2)+(a,b,c)}{2}=(-2,2,-1) \Rightarrow A'=(-4,3,0)$$

b) Los vectores normales de los planos son: $n_1=(2,-1,-1)$ y $n_2=(1,5,-6)$. El vector director de la recta es un vector normal a los vectores normales de los planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 6\vec{i}-\vec{j}+10\vec{k}+\vec{k}+12\vec{j}+5\vec{i}=(11,11,11)$$

Luego, la recta pedida es: $r \equiv \frac{x}{11}=\frac{y-1}{11}=\frac{z+2}{11}$

Considera $A(1,0,1)$, $B(-1,0,2)$ y $O(0,0,0)$, y la recta $r\equiv\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{cases}$

a) (1'5 Puntos). Calcula la distancia del punto *A* a la recta *r*.
b) (1 Punto). Determina el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *O*.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) El vector director de la recta $\vec{u}=(-1,1,0)$ es el vector normal de un plano perpendicular a ella, luego:

$$-x+y+D=0$$

Calculamos el que pasa por el punto *A*.

$$-x+y+D=0\Rightarrow -1+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow -x+y+1=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$-x+y+1=0\Rightarrow 1+\lambda+\lambda+1=0\Rightarrow \lambda=-1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(-1-\lambda,\lambda,2)=(0,-1,2)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{AM}=(-1,-1,1)$, es decir:

$$\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}\ u$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,0,1)$ y $\vec{AO}=(-1,0,-1)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{j}=(0,-3,0)$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AO}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(0)^2}=\frac{3}{2}\,u^2$$

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ y el punto $P(1,1,2)$

a) (1'25 Puntos). Determina la ecuación general del plano perpendicular a π, paralelo a *r* y que pasa por el punto *P*.

b) (1'25 Puntos). Calcula el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por: el punto $P(1,1,2)$, el vector director de la recta r $\vec{u} = (1,-2,-1)$ y el vector normal del plano π, $\vec{n} = (2,-1,1)$. Luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - 3y + 3z = 0 \Rightarrow x + y - z = 0$$

b) El vector director de la recta $\vec{u} = (1,-2,-1)$, es el vector normal del plano de un plano perpendicular, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$x - 2y - z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,1,2)$.

$$x - 2y - z + D = 0 \Rightarrow 1 - 2 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow x - 2y - z + 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x - 2y - z + 3 = 0 \Rightarrow (3+\lambda) - 2\cdot(1-2\lambda) - (-2-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Luego, el punto de corte es: $M = (3-1, 1+2, -2+1) = (2,3,-1)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,1,2)+(a,b,c)}{2} = (2,3,-1) \Rightarrow P' = (3,5,-4)$$

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halla *a* sabiendo que π es paralelo a *r*.
b) (1 punto) Determina el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto $P(1,2,3)$.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es $\vec{n} = (1,-1,a)$. Calculamos el vector director de la recta

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k} + 9\vec{k} - 4\vec{j} + 8\vec{i} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} = (5,8,1)$$

Si el plano y la recta son paralelos, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, luego, su producto escalar vale cero

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 - 8 + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

b) Si el plano y la recta son perpendiculares, el vector director de la recta $\vec{u} = (5,8,1)$, es el vector normal del plano, luego:

$$5x + 8y + z + D = 0$$

Como pasa por el punto $P(1,2,3)$, entonces:

$$5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

Por lo tanto, el plano que nos piden tiene de ecuación: $5x + 8y + z - 24 = 0$

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$

a) (1 punto) Calcula la distancia entre *r* y π.
b) (1'5 puntos) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano $\vec{n} = (1,-1,1)$ y el vector director de la recta $\vec{u} = (2,1,-1)$, son perpendiculares ya que:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (1,-1,1) \cdot (2,1,-1) = 2-1-1 = 0$$

Además el punto $A = (0,-1,-2)$ de la recta no pertenece al plano, luego, la recta y el plano son paralelos. Por lo tanto, la distancia viene dada por la distancia de un punto de la recta $A = (0,-1,-2)$ al plano.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

b) El plano que nos piden viene definido por $A = (0,-1,-2)$ y los vectores $\vec{n} = (1,-1,1)$ y $\vec{u} = (2,1,-1)$. Luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y+1 & -1 & 1 \\ z+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y + 3z + 9 = 0 \Rightarrow y + z + 3 = 0$$