

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P = (1, 0, -5)$.

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $(-2, 1, 2)$, luego, su ecuación será:

$$-2x + y + 2z + D = 0$$

y, como debe pasar por el punto $P = (1, 0, -5)$, se debe cumplir:

$$-2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot (-5) + D = 0 \Rightarrow D = 12$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación: $-2x + y + 2z + 12 = 0$

b) Calculamos el vector director de la recta r

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} - 9\vec{k} - 4\vec{j} - 2\vec{i} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo de recta y plano.

$$\text{sen } \alpha = \frac{|u_1 \cdot A + u_2 \cdot B + u_3 \cdot C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-8 \cdot (-2) - 7 \cdot 1 - 5 \cdot 2|}{\sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1242}} = 0'0283$$

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la recta s en paramétricas: $\overrightarrow{PQ} = (a-1, 1, -2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Si las rectas se cortan, cualquier punto $(1+(a-1)t, t, 2-2t)$ de la recta s tiene que verificar la ecuación de la recta r , luego:

$$\frac{1+(a-1)t+3}{2} = \frac{t+4}{2} = \frac{2-2t-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} 1+(a-1)t+3 = t+4 \\ 3t+12 = 4-4t-6 \end{cases} \Rightarrow a = 2 ; t = -2$$

Luego para $a = 2$, las rectas se cortan.

El punto de corte será: $(1+(a-1)t, t, 2-2t) = (-1, -2, 6)$

Considera el punto $P = (1, 2, 6)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades.

b) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

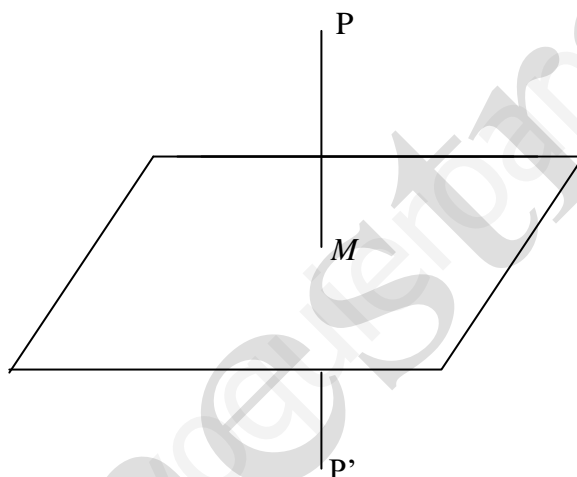
a) Los planos paralelos a π tienen de ecuación: $2x - y + z + D = 0$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, eligiendo un punto del plano π , por ejemplo, $A(0, 1, 1)$

$$\frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow |D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D = 6 \\ -D = 6 \Rightarrow D = -6 \end{cases}$$

Luego, los planos son: $2x - y + z + 6 = 0$ y $2x - y + z - 6 = 0$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2, -1, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (1 + 2t) - (2 - t) + (6 + t) = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = -1$; $y = 3$; $z = 5$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2} = -1 \Rightarrow a = -3; \frac{b+2}{2} = 3 \Rightarrow b = 4; \frac{c+6}{2} = 5 \Rightarrow c = 4$$

Luego, el punto simétrico es el $P'(-3, 4, 4)$

Considera los puntos $B(-1,0,-1)$, $C(0,1,-3)$ y la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda . \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

a) Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C .

b) Siendo $D(1,-1,-2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B,C y D .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Un punto genérico de la recta es $A(-\lambda, 1+2\lambda, -1+\lambda)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-1+\lambda, -1-2\lambda, -\lambda)$; $\vec{AC} = (\lambda, -2\lambda, -2-\lambda)$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= |\vec{AC}| \Rightarrow \sqrt{(-1+\lambda)^2 + (-1-2\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2 + (-2\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 4 + \lambda^2 + 4\lambda \Rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \end{aligned}$$

Luego, el punto A es: $A = (-\lambda, 1+2\lambda, -1+\lambda) = (1, -1, -2)$

b) Calculamos los vectores: $\vec{DB} = (-2, 1, 1)$; $\vec{DC} = (-1, 2, -1)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\vec{DB} \wedge \vec{DC}| = \\ &= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-3, -3, -3) = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = 2'598 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera el punto $P(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$

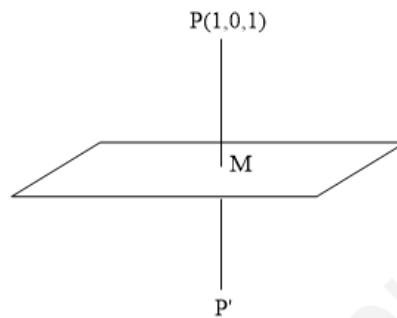
a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

b) Halla la distancia del punto P al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, 1)$ y el punto P , calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot (1+t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (1+t) + 1 = 0 \Rightarrow 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto M es: $M = (1-1, -(-1), 1-1) = (0, 1, 0)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (0, 1, 0) = \frac{(1, 0, 1) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a \Rightarrow a = -1 \\ 2 = 0 + b \Rightarrow b = 2 \\ 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P'(-1, 2, -1)$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM} = (-1, 1, -1)$

$$d(P, \pi) = \left| \overrightarrow{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} = 1'73 \text{ u}$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y s .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos las dos rectas a paramétricas

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow A(2,1,0) ; \vec{u} = (-2,1,-2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow B(3,0,2) ; \vec{v} = (-2,1,-2)$$

Las rectas son paralelas, ya que tienen el mismo vector director. Vamos a ver si son coincidentes

Vemos que el punto $A(2,1,0)$ de la recta r no pertenece a la recta s ya que:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+2 \neq 3 \\ 2+0 = 2 \end{cases}$$

Luego, las rectas son paralelas

b) El plano viene determinado por el punto A y los vectores $\vec{u} = (-2,1,-2)$ y $\vec{AB} = (1,-1,2)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y+z-2=0$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Las rectas r y s , serán paralelas, luego si calculamos la distancia de un punto de la recta r a la recta s tendremos el lado del cuadrado.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow A = (0, -2, 1); \vec{u} = (1, 2, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+t \\ y=-5+2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow B = (-3, -5, 0); \vec{v} = (1, 2, 1)$$

Calculamos el vector que va desde el punto A a un punto genérico $B = (-3+t, -5+2t, t)$ de la recta s :

$\vec{AB} = (-3+t, -3+2t, t-1)$. Este vector tiene que ser perpendicular al vector $\vec{v} = (1, 2, 1)$, luego:

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -3+t-6+4t+t-1=0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

El lado del cuadrado será el módulo del vector \vec{AB}

$$\vec{AB} = (-3+t, -3+2t, t-1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Luego, el área del cuadrado será: $\text{Área} = l^2 = \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{7}{3} u^2 = 2'33 u^2$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m .

b) Para $m = 1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases} \Rightarrow A = (1, 1, 2) ; \vec{u} = (1, 1, m)$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow B = (2, -1, 0) ; \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$; $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{AB} = (1, -2, -2)$ según los valores de m

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 2m - m - 2 + 2 = m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{Rango} = 3 \Rightarrow$ Rectas que se cruzan

Si $m = 1 \Rightarrow \text{Rango} = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Rectas secantes

b) Los vectores directores de las rectas son: $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, luego:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0'333$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s .

b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow A = (2, -1, 3) ; \vec{u} = (3, 2, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 2 - \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0, 2) ; \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = (1, 2, -1)$$

El plano que nos piden viene definido por: $A = (2, -1, 3) ; \vec{u} = (3, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 1 \\ y+1 & 2 & 2 \\ z-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 4 + 6z - 18 + y + 1 - 2z + 6 + 3y + 3 - 2x + 4 = -4x + 4y + 4z = 0 \Rightarrow x - y - z = 0$$

b) Si el plano es perpendicular a s , su vector normal tiene que ser proporcional a

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = (1, 2, -1) \text{ y si ese plano contiene a } r, \text{ los vectores } \vec{u} = (3, 2, 1) \text{ y } \vec{v} = (1, 2, -1)$$

tendrían que ser perpendiculares, pero:

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2, -1) = 3 + 4 - 1 = 6 \neq 0$$

Luego, no hay ningún plano perpendicular a s y que contenga a r

Considera los puntos $A(1,2,3)$; $B(-2,4,-3)$; $C(-10,1,0)$.

a) Halla el área del triángulo de vértices A , B y C .

b) Halla el plano que equidista de A y B .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-3, 2, -6)$; $\vec{AC} = (-11, -1, -3)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -6 \\ -11 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-12, 57, 25) = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 57^2 + 25^2} = 31,69 \text{ u}^2$$

b) El plano que equidista de A y B es un plano perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio.

Calculamos el punto medio $M = \frac{(1,2,3) + (-2,4,-3)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right)$

El vector normal del plano es el vector $\vec{AB} = (-3, 2, -6)$

Luego el plano perpendicular es: $-3x + 2y - 6z + D = 0$ y como tiene que pasar por el punto

$M = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right)$, será:

$$-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{15}{2} \Rightarrow -3x + 2y - 6z - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow -6x + 4y - 12z - 15 = 0$$

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

$$B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

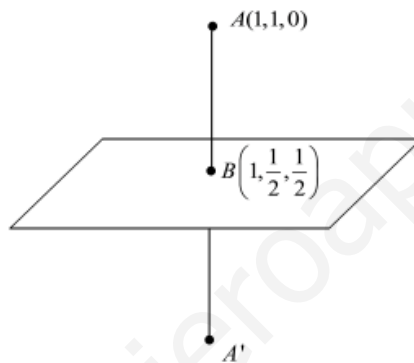
a) Calcula la ecuación del plano π .

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π .

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 7

RESOLUCIÓN

a)



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene que pasar por el punto

$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, luego:

$$-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + D = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow -y + z = 0$$

b) La distancia que nos piden es:

$$d_{AA'} = 2 \cdot d_{AB} = 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| = 2 \cdot \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ u}$$

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow A = (3, 1, -3); \vec{u} = (1, 0, -1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0, 0); \vec{v} = (-1, 1, 0)$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (-2, -1, 3)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{AB}

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 2 \Rightarrow \text{Las rectas son secantes.}$$

b) Calculamos el punto de corte de las dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Igualando tenemos que:

$$\left. \begin{cases} 3 + \lambda = 1 - t \\ 1 = t \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow t = 1; \lambda = -3 \Rightarrow \text{Punto de corte: } (0, 1, 0)$$

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

Luego, la recta es: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$