

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Emestrada

a) Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el

apartado anterior, $\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array} \right\}$

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) El sistema escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $x = 3$; $y = -2$; $z = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } 2x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda - 1 \end{array} \right\}$$

a) Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 ; \lambda = 2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 2$	2	3	S. Incompatible
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 1$ y 2	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $\lambda = 1 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -z - 2 \\ z = z \end{cases}$$

Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a ,

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (a+1)y + 2z &= y \\ x - 2y + (2-a)z &= 2z \end{aligned} \right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es ordenar el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (a+1)y + 2z &= y \\ x - 2y + (2-a)z &= 2z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ ay + 2z &= 0 \\ x - 2y - az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 ; a = -3$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión:

	R(A)	
$a = 2$	2	S. Compatible Indeterminado
$a = -3$	2	S. Compatible Indeterminado
$a \neq 2 \text{ y } -3$	3	S. Compatible Determinado

Vamos a resolverlo:

$$\text{Caso 1: } a = 2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{Caso 2: } a = -3 \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -3y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5z}{3} \\ y = \frac{2z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Caso 3: $a \neq 2 \text{ y } -3 \Rightarrow$ Solución trivial $x = y = z = 0$

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda x + y + (\lambda + 1)z = \lambda + 2 \\ x + y + z = 0 \\ (1 - \lambda)x - \lambda y = 0 \end{array} \right\} \text{tiene más de una}$$

solución.

a) Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ .

b) Halla todas las soluciones del sistema.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que el sistema tenga más de una solución, el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que valer cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = -2$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	3	S. Incompatible
$\lambda = -2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 0 \text{ y } -2$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo:

$$\lambda = -2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases}$$

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\left. \begin{array}{l} x + my = m \\ mx + y = m \\ mx + my = 1 \end{array} \right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

Calculamos el determinante de la matriz ampliada

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = -\frac{1}{2}$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m = 1$	1	1	S. Compatible indeterminado
$m = -\frac{1}{2}$	2	2	S. Compatible determinado
$m \neq 1 \text{ y } -\frac{1}{2}$	2	3	S. Incompatible

Vamos a resolverlo:

Caso 1: $m = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \end{cases}$

Caso 2: $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + y + mz &= 1 \\ my - z &= -1 \\ x + 2my &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Clasifica el sistema según los valores de m .
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m = 1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 1$	3	3	S. Compatible determinado

- b) Vamos a resolverlo:

$$m = 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + y &= 1 - z \\ y &= -1 + z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones } x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array} \right\}$$

- a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

- a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 \Rightarrow a = 1 ; a = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$a = 1$	2	3	S. Incompatible
$a = -1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a \neq 1$ y -1	3	3	S. Compatible Determinado

Vamos a resolverlo para $a = -1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{5-2z}{2} \\ z = z \end{cases}$

- b) $a = -2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Luego lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1; z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$