

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

a) Discútelos según los valores de λ . ¿Tiene siempre solución?

b) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq -1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema siempre tiene solución.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left. \begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -x + y &= 1 - z \\ 2x + y &= 2 - z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4-3z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x - y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ x + my - z = m \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores de m .

b) Resuélvelo para el caso $m = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = m+2-1+m-1+1-m^2-2m=0 \Rightarrow -m^2+1=0 \Rightarrow m=1; m=-1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-1$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 1 \text{ y } -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 + z \\ -x - y = -1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+z}{2} \\ y = \frac{1+z}{2} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el sistema:
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -9\lambda - 2 + 2 + 3 - 3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow -5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 0$	3	3	S. Compatible Determinado

b) No hay ningún valor de λ para el cual el sistema no tenga solución.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.

b) Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$

c) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + 6\alpha - 2\alpha^2 - 6 = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 ; \alpha = \frac{3}{2}$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq \frac{3}{2}$

b)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + 2y + 6z = 0 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } 2x + \lambda y + 4z = 2 \\ 2x + \lambda y + 6z = \lambda - 2 \end{array} \right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvelo para $\lambda = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 6 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = 6\lambda^2 + 16 + 12\lambda - 12\lambda - 24 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 ; \lambda = -2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = -2$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 2 \text{ y } -2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6z = -2y \\ 2x + 4z = 2 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro λ , el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda + 2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned} \right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda + 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = 8$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = 8$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0 \text{ y } 8$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$\left. \begin{aligned} -x + z &= 0 \\ 2y + 2z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -x &= -z \\ 2y &= 4 - 2z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{4 - 2z}{2} = 2 - z \\ z = z \end{cases}$$