EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

**PROBLEMAS RESUELTOS**

**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**

**2018**

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

**Considera el siguiente sistema de ecuaciones** $\left.\begin{array}{r} x+2y+(m+3)z = 3 \\ x+y+z = 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z = 8 \end{array}\right\}$

**a) Discútelo según los valores del parámetro $m$.**

**b) Resuelve el sistema para $m=-2$.**

**MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} = -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

| | R($A$) | R($M$) | |
|---|---|---|---|
| $m=3$ | 2 | 3 | S. Incompatible |
| $m \neq 3$ | 3 | 3 | S. Compatible determinado |

b) Resolvemos el sistema para $m=-2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z = 3 \\ x+y+z = -6 \\ 2x+4y-3z = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left.\begin{array}{r} x+2y+z = 3 \\ -y = -9 \\ -5z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{73}{5}\ ;\ y=9\ ;\ z=-\frac{2}{5}$$

**a) Justifica que es posible hacer un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:**
- **utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros**
- **se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas**
- **tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

**¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?**
**b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos

$x =$ número de monedas de 50 céntimos

$y =$ número de monedas de 1 €

$z =$ número de monedas de 2 €

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 0'5x+y+2z=34'5 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{array}\right\}$

Ordenamos y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=34'5 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=19'5 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15 \;;\; z=8 \;;\; x=7$$

Luego, la solución es única y es utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Planteamos y resolvemos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=35 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=20 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15 \;;\; z=\frac{25}{3} \;;\; x=\frac{20}{3}$$

Esta solución no es posible, ya que el número de monedas tiene que ser un número entero positivo, no puede ser decimal.

**Considera las matrices**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**a) Discute el rango de $A$ según los valores del parámetro $\lambda$.**
**b) Para $\lambda=-2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX=B$.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz $A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^3-6\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=1\,;\ \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz $A$.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda \neq 1 \ y \ -2 \Rightarrow R(A)=3$

b) Calculamos el rango de la matriz ampliada para $\lambda=-2$

$$\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-2z=-1 \\ 2x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{-1+3z}{6}\ ;\ y=\frac{2-3z}{3}\ ;\ z=z$$

**Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales** $\left\{\begin{array}{l} x+y+mz = 1 \\ x+my+z = 1 \\ x+2y+4z = m \end{array}\right.$ .

**a) Discute el sistema en función del parámetro $m$.**
**b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4m+1+2m-m^2-4-2 = -m^2+6m-5 = 0 \Rightarrow m=1 \ ; \ m=5$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=5 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$$m=5 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

| | R($A$) | R($M$) | |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 2 | 2 | Sistema compatible indeterminado |
| $m=5$ | 2 | 3 | Sistema incompatible |
| $m \neq 1$ y 5 | 3 | 3 | Sistema compatible determinado |

b) Para $m=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1+2z \ ; \ y=-3z \ ; \ z=z$$

**Considera las matrices:** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

**a) Discute el sistema dado por $AX=mX$ según los valores del parámetro $m$.**
**b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.**
**c) Para $m=3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x+y+z=3$.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) $AX=mX \Rightarrow AX-mX=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} (2-m)x=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+(3-m)z=0 \end{array} \right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)^2 \cdot (3-m) = 0 \Rightarrow m=2 \ ; \ m=3$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$$

$$Para\ m=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

| | R($A$) | |
|---|---|---|
| $m=2$ | 1 | S. Compatible indeterminado |
| $m=3$ | 2 | S. Compatible indeterminado |
| $m\neq 2\ y\ 3$ | 3 | S. Compatible Determinado |

b) Para $m\neq 2\ y\ 3$, el sistema es compatible determinado y tiene la solución trivial $x=y=z=0$

c) Resolvemos el sistema $\left. \begin{array}{r} -x=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ z=z \end{cases}$

Veamos si es posible que una solución sea: $x+y+z=3 \Rightarrow z+z=3 \Rightarrow 2z=3 \Rightarrow z=\dfrac{3}{2}$

Luego, la solución es $x=0\ ;\ y=\dfrac{3}{2}\ ;\ z=\dfrac{3}{2}$

**Considera el siguiente sistema de ecuaciones** $\left\{\begin{aligned} x-z &= m \\ my+3z &= 1 \\ 4x+y-mz &= 5 \end{aligned}\right.$

**a) Discútelo según los valores del parámetro *m*.**
**b) Para $m=1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x=z$.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2+4m-3=0 \Rightarrow m=1\,;\ m=3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$m=3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

| | R(*A*) | R(*M*) | |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 2 | 2 | Sistema compatible indeterminado |
| $m=3$ | 2 | 3 | Sistema incompatible |
| $m\neq 1\ y\ 3$ | 3 | 3 | Sistema compatible determinado |

b) Para $m=1$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned} x-z&=1 \\ y+3z&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=1+z \\ y&=1-3z \\ z&=z \end{aligned}\right.$

No es posible ya que $x=1+z$

**Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+mz=m^2} \\ \boldsymbol{y-z=m} \\ \boldsymbol{x+my+z=m} \end{array}\right.$ **.**

**a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.**
**b) Resuélvelo para $\boldsymbol{m=1}$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $\boldsymbol{z=2}$.**
**MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1-1-m+m=0 \Rightarrow R(A)<3$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m+m-m^2-m^2 = 2m-2m^2 = 0 \Rightarrow m=0 \ ; \ m=1$$

Si $m=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Si $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

| | R($A$) | R($M$) | |
|---|---|---|---|
| $m=0$ | 2 | 2 | S. Compatible indeterminado |
| $m=1$ | 2 | 2 | S. Compatible indeterminado |
| $m \neq 0$ y 1 | 2 | 3 | S. Incompatible |

b) Resolvemos el sistema para $m=1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2z \ ; \ y=1+z \ ; \ z=z$$

Si $z=2 \Rightarrow x=-4 \ ; \ y=3$