EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2009

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
a) El determinante de B^{-1}.
b) El determinante de $(B^t)^4$. (B^t es la matriz traspuesta de B).
c) El determinante de $2B$.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow |B \cdot B^{-1}| = |B| \cdot |B^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$; luego en nuestro caso será: $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = -\dfrac{1}{2}$

b) Sabemos que $|B^t| = |B|$; luego: $|(B^t)^4| = |(B)^4| = |B| \cdot |B| \cdot |B| \cdot |B| = (-2)^4 = 16$

c) Si B_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot B| = k^n \cdot |B|$; en nuestro caso como B es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2B| = (2)^3 \cdot |B| = 8 \cdot (-2) = -16$

d) $$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot (2) - 3 \cdot 0 = 30$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo" y "Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0".

Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican $A \cdot X \cdot B = C$.
a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.
b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$|A| \cdot |X| \cdot |B| = |C| \Rightarrow |X| = \frac{|C|}{|A| \cdot |B|} = \frac{6}{3 \cdot (-1)} = -2$$

$$|2X| = 2^3 \cdot |X| = -16$$

b)

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+c+2b+2d & -2a-2c-3b-3d \\ -2c-4d & 4c+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a+c+2b+2d &= 0 \\ -2a-2c-3b-3d &= 3 \\ -2c-4d &= 4 \\ 4c+6d &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

b) Calcula las matrices X **e** Y **que satisfacen las ecuaciones matriciales** $X\cdot A=A+2B$ **y** $A\cdot Y=A+2B$.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b)

$$X\cdot A=A+2B\Rightarrow X=(A+2B)\cdot A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot Y=A+2B\Rightarrow Y=A^{-1}(A+2B)=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

b) Calcular B^{-1} para $k=-1$.

c) Determina las constantes α y β para las que se cumple $A^2+\alpha A=\beta I$

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz B

$$B=A-kI=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero.

$$|B|=\begin{vmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{vmatrix}=k^2+4k+1=0\Rightarrow k=-2\pm\sqrt{3}$$

Luego, la matriz B tiene inversa para todos los valores de k distintos de $-2\pm\sqrt{3}$

b)

$$(B)^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

c)

$$A^2+\alpha A=\beta I\Rightarrow\begin{pmatrix}11 & -4\\ -8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha & \alpha\\ 2\alpha & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}11-3\alpha=\beta\\ -4+\alpha=0\\ -8+2\alpha=0\\ 3-\alpha=\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha=4\,;\,\beta=-1$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Determina la matriz X **que verifica:** $A\cdot X-B^t=2C$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A^{-1}=\frac{\left(A^d\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Como $X=A^{-1}(2C+B^t)$, vamos sustituyendo y operando:

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$