

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A^2 + 3A$:

$$A^2 + 3A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de dicha matriz

$$|A^2 + 3A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 - 10\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = -4$$

Luego, la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa para $\lambda = -1$ y $\lambda = -4$, ya que su determinante vale cero.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ a-c=-1 \\ b-d=3 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

a) $|A^3|$

b) $|A^{-1}|$

c) $|-2A|$

d) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

e) El rango de B .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso

será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot \frac{1}{2} = -4$

d) $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) Como $|B| = -2 \neq 0$, el rango de B es 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
 b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
 c) Calcula razonadamente A^{100}

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, se cumple que $A^3 = -I$

b) Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 + 12 - 16 - 12 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

Calculamos la inversa

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{100} = A^{99} \cdot A = (A^3)^{33} \cdot A = (-I)^{33} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

b) Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{No hay ningún valor real de } \lambda \text{ para el cual el determinante valga cero,}$$

luego, siempre tiene inversa

b) Calculamos la matriz X :

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B \Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A :

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$

b) Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A+B)' = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y $(A+B)'$ la matriz traspuesta de $A+B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, tenemos: $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos: $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial: $XA - XB - (A+B)' = 2I \Rightarrow X(A-B) - (A+B)' = 2I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 4a+2b \\ 2c-d & 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a-b=6 \\ 4a+2b=3 \\ 2c-d=2 \\ 4c+2d=4 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{15}{8}; b = -\frac{9}{4}; c=1; d=0$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz $A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualamos el determinante de dicha matriz a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2 - \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1; \lambda = 2$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq 1, -1$ y 2

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX = 2X + I \Rightarrow AX - 2X = I \Rightarrow (A - 2I)X = I \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1} \cdot I$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{((A - 2I)^d)^t}{|A - 2I|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}$$

Luego, la matriz es $X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que $A^2 + 2A = I$ y que $A^{-1} = A + 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $A^2 + XA + 5A = 4I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{Es cierto.}$$

Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} a la izquierda:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A + 2A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \Rightarrow A + 2I = A^{-1} \Rightarrow \text{Es cierto}$$

b) Vamos a resolver la ecuación matricial $A^2 + XA + 5A = 4I$:

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha.

$$A^2 + XA + 5A = 4I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} + X \cdot A \cdot A^{-1} + 5A \cdot A^{-1} = 4I \cdot A^{-1} \Rightarrow A + X + 5I = 4A^{-1} \Rightarrow X = 4A^{-1} - A - 5I$$

Sustituimos $A^{-1} = A + 2I$

$$X = 4A^{-1} - A - 5I = 4(A + 2I) - A - 5I = 3(A + I) = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores α .
b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1; \alpha = -2$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

| | R(A) |
|------------------------|------|
| $\alpha = 1$ | 1 |
| $\alpha = -2$ | 2 |
| $\alpha \neq 1$ y -2 | 3 |

- b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.

b) Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}^t}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}}{12} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{4\alpha} &= \frac{\alpha}{12} \\ \frac{-1}{4\alpha} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} &= -\frac{\alpha}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = -3$$

El único valor que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha = -3$: $(A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}{-12}$

Por las propiedades de las matrices sabemos que: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, luego, la aplicamos para resolver la ecuación matricial

$$A^t \cdot X = B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot B = (A^{-1})^t \cdot B = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 2 & -15 & -7 \end{pmatrix}$$