PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2012

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro *k* no existe la inversa de la matriz *A*?. Justifica la respuesta.
b) Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A = A^t$, donde *I* denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de *A*.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A| = 2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego, la matriz *A* no tiene inversa para $k=\frac{1}{2}$, ya que su determinante vale cero.

b) Calculamos la matriz inversa de *A* para $k=0$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$(X+I)\cdot A = A^t \Rightarrow X\cdot A + I\cdot A = A^t \Rightarrow X\cdot A = A^t - I\cdot A$$

Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X\cdot A = A^t - I\cdot A \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1} = A^t\cdot A^{-1} - I\cdot A\cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^t\cdot A^{-1} - I$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$X = A^t\cdot A^{-1}-I=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica: $A\cdot X\cdot B=C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A\cdot X\cdot B=C^t\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-2&1&0\\4&-2&1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$(B)^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la inversa de A:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Calculamos la matriz X: Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X \cdot A + A^3B = A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} + A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica $AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X-B=BA$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3+10=13\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

Sabemos que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\Rightarrow|B|=\dfrac{|A\cdot B|}{|A|}=\dfrac{-13}{13}=-1\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

b) Si multiplicamos por A a la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}X-B=BA\Rightarrow A\cdot A^{-1}X-A\cdot B=ABA\Rightarrow X=ABA+AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}$$