

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES**

- Junio, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 7

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Estudia el rango de  $A$  según los valores de  $m$ .

b) (1 punto) Para  $m = 2$ , calcula la inversa de  $2020A$ .

**MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 3**

### RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m \cdot (m+1) - m \cdot (m+2) = -2m^2 - 3m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = -\frac{5}{2}$$

Para  $m = 1$  y  $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Luego:

	Rango( $A$ )
$m = 1$	2
$m = -\frac{5}{2}$	2
$m \neq 1$ y $-\frac{5}{2}$	3

b) Calculamos la inversa de  $2020A$  para  $m = 2$ :

$$|2020A| = 2020^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2020^3 \cdot (5 - 6 - 8) = 2020^3 \cdot (-9)$$

$$(2020A)^{Adj} = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ((2020A)^{Adj})^t = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1} = \frac{((2020A)^{Adj})^t}{|2020A|} = \frac{2020^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{2020^3 \cdot (-9)} = -\frac{1}{18180} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2'5 puntos) Considera  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Determina  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que

$A \cdot B = C$  y la matriz  $A$  tiene rango 2.

**MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 3.**

### RESOLUCIÓN

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=2 \\ c+1+4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$R(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a + b \cdot c + 1 - a \cdot c - 4 - b = 0 \Rightarrow 4a + b \cdot c - a \cdot c - b = 3$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, obtenemos que:  $a = \frac{8}{13}$ ;  $b = \frac{5}{13}$ ;  $c = -4$

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) (1'5 Puntos). Calcula  $A^{37}$  y  $A^{41}$ .

b) (1 Punto). Halla el determinante de la matriz  $3A^{52}(A^t)^4$ , donde  $A^t$  es la traspuesta de la matriz  $A$

**MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 7**

### RESOLUCIÓN

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{37} = A^{3 \cdot 12 + 1} = (A^3)^{12} \cdot A = (I)^{12} \cdot A = A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{41} = A^{3 \cdot 13 + 2} = (A^3)^{13} \cdot A^2 = (I)^{13} \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos  $|A| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Calculamos el determinante de la matriz que nos piden

$$\begin{aligned} |3A^{52}(A^t)^4| &= |3A \cdot A^{51} \cdot (A^t)^4| \xrightarrow{\text{Paso 1}} = |3A| \cdot |A^{51}| \cdot |(A^t)^4| \xrightarrow{\text{Paso 2}} = 3^2 |A| \cdot |A|^{51} \cdot |A|^4 = \\ &= 3^2 \cdot 1 \cdot 1^{51} \cdot 1^4 = 9 \end{aligned}$$

Paso 1: Propiedad  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Paso 2: Propiedad  $|k \cdot A_n| = k^n |A_n|$  y propiedad  $|A^t| = |A|$

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Sabiendo que una matriz  $X$  verifica  $X^3AX = B^2$ , halla los posibles valores de su determinante.

b) (1'5 Puntos). Determina, si existe, una matriz  $Y$  que verifique  $A^2YB^{-1} = A$

**MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 7**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los determinantes de  $A$  y  $B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$\begin{aligned} |X^3AX| &= |B^2| \xrightarrow{\text{Paso 1}} = |X| \cdot |X| \cdot |X| \cdot |A| \cdot |X| = |B| \cdot |B| \Rightarrow |X|^4 \cdot 1 = (-2) \cdot (-2) \Rightarrow \\ \Rightarrow |X| &= \sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

En el paso 1 hemos aplicado la propiedad:  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

b) Si multiplicamos por  $(A^2)^{-1}$  a la izquierda y por  $B$  a la derecha, nos queda:

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} \cdot B = (A^2)^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de  $A$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) (1 Punto). Determina los valores de  $m$  para los que la ecuación  $AX + B = C$  tiene solución única.  
 b) (1'5 Puntos). Para  $m = 0$ , halla  $X$  tal que  $AX + B = C$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 7**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B$ . Esta ecuación tiene solución si la matriz  $A$  tiene inversa, es decir, si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3m - 3 - 2m^2 + 2m + 4m = 0 \Rightarrow -2m^2 + 9m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}; m = 5$$

Por lo tanto, la ecuación tiene solución única para todos los valores de  $m \neq -\frac{1}{2}$  y  $m \neq 5$ .

b) Calculamos la matriz inversa de  $A$  para  $m = 0$ .

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz  $X$ .

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$