

Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Del año 2016**

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1'5 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Solución

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

a)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \ln(0^+) \cdot \frac{1}{0^+} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$, la **recta $x = 0$ es una asíntota vertical de $f(x)$** .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0$, **la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ en**

$+\infty$.

Como hay asíntota horizontal en $+\infty$, **no hay asíntota oblicua en $+\infty$.**

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0) = 0^+$, **la gráfica de f está por encima de la recta $y = 0$ en $+\infty$.**

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f .

Me piden la monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}; f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x) - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

De $f'(x) = 0$, tenemos $1 - \ln(x) = 0$, es decir $\ln(x) = 1$ de donde $x = e^1 = e \cong 2'71$, que será el posible extremo relativo.

Como $f'(1) = \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = \frac{1 - 0}{1^2} = 1 > 0 < 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(0, e)$.

Como $f'(3) = \frac{1 - \ln(3)}{3^2} = \frac{1 - 0}{3^2} \cong -0'0109 < 0 < 0$, f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(e, +\infty)$.

Por definición $x = e$ es un máximo relativo y vale $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = 1/e$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene

tangente horizontal en $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b .

Solución

De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente

horizontal en $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b .

Si tiene su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$, sabemos que $f'(0) = 0$.

$$f(x) = ae^x - bx, f'(x) = ae^x - b.$$

De $f'(0) = 0$, tenemos $ae^0 - b = 0$, es decir $a - b = 0$, por tanto **$a = b$** .

$$\text{De } \int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}, \text{ tenemos: } e - \frac{3}{2} = \int_0^1 (ae^x - ax)dx = \left[ae^x - a \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = (ae^1 - \frac{a}{2}) - (ae^0 - 0) = ae - \frac{3}{2},$$

igualando vemos que **$a = 1 = b$** .

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Del año 2016

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) [1'75 puntos] Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema dado por $(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a)

Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

$$C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda-4+2\lambda+\lambda^2) = (2-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2).$$

De $6-5\lambda+\lambda^2 = 0$ tenemos $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$.

Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 2$, $\det(C) \neq 0$, luego $\text{rango}(C) = \text{rango}(A - \lambda I) = 3$.

Si $\lambda = 2$, $C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como tenemos dos filas con números distintos de

cero resulta que $\text{rango}(C) = \text{rango}(A - \lambda I) = 2$.

Si $\lambda = 3$, $C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como tenemos dos filas con números distintos de

cero resulta que $\text{rango}(C) = \text{rango}(A - \lambda I) = 2$.

b)

Resuelve el sistema dado por $(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El sistema dado es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$, de donde $y = 0 = z$. **La**

solución del sistema es $(x,y,z) = (a,0,0)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Del año 2016

Sea "r" la recta dada por $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ y sea "s" la recta definida por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Sea "r" la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea "s" la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) y b)

Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s. Distancia de "r" a "s"

Para ver que las rectas $r(A;\mathbf{u})$ y $s(B;\mathbf{v})$ se cruzan tengo que ver que \mathbf{u} y \mathbf{v} no son paralelos o proporcionales, y después comprobar que $\det(\mathbf{AB},\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq 0$.

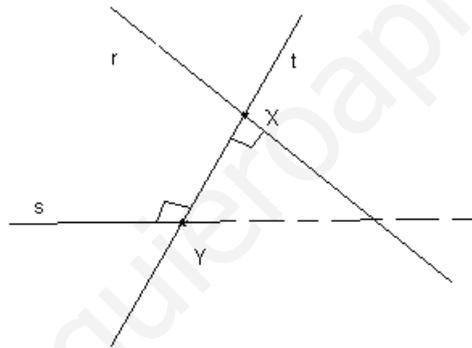
De "r" $\equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases} = \begin{cases} x=1-a \\ y=-1 \\ z=a \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$. Punto $A(1,-1,0)$ y vector $\mathbf{u} = (-1,0,1)$

De "s" $\equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Punto $B(2,2,2)$ y vector $\mathbf{v} = (1,0,2)$. Evidentemente \mathbf{u} y \mathbf{v} no son

proporcionales.

$\mathbf{AB} = (1,3,2)$. Como $\det(\mathbf{AB},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda = $(-3) \cdot (-3) = 9 \neq 0$, las rectas "r" y "s" se cruzan.

Para calcular la recta "t" perpendicular a ambas y la distancia entre ellas, tomamos los puntos X e Y que están a mínima distancia entre ellas, como se indica en la figura.



Calculamos los puntos X e Y de intersección de cada una de las rectas con la recta perpendicular común a ambas, para lo cual tomamos un punto genérico X e Y de cada una de ellas, formamos el vector \mathbf{XY} y le imponemos la condición de que dicho vector sea perpendicular a cada recta. Una vez que obtengamos los puntos X e Y tenemos la recta perpendicular pasa por el punto X y tiene vector director el \mathbf{XY} , y la distancia entre ellas es $d(r;s) = d(X;Y) = \|\mathbf{XY}\|$

X punto genérico de "r", $X(1-a, -1, a)$ con $a \in \mathbb{R}$

Y punto genérico de "s", $Y(2+b, 2, 2+2b)$ con $b \in \mathbb{R}$

Vector $\mathbf{XY} = (1+a+b, 3, 2+2b-a)$

Un vector director de "r" es $\mathbf{u} = (-1,0,1)$

Como $\mathbf{XY} \perp \text{"r"} \rightarrow \mathbf{XY} \perp \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{XY} \cdot \mathbf{u} = 0$, es decir

$$(1+a+b, 3, 2+2b-a) \cdot (-1,0,1) = 0 = -1-a-b+2+2b-a = 1+b-2a = 0$$

Un vector director de "s" es $\mathbf{v} = (1,0,2)$

Como $\mathbf{XY} \perp \text{"s"} \rightarrow \mathbf{XY} \perp \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{XY} \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir

$$(1+a+b, 3, 2+2b-a) \cdot (1,0,2) = 0 = 1+a+b+4+4b-2a = 5+5b-a = 0$$

Resolviendo el sistema

$$1+b-2a = 0$$

$5+5b-a = 0$, ($F_2 - 5F_1$) obtenemos $9a = 0$, de donde $a = 0$ y $b = -1$, por tanto los puntos X e Y son

$$X(1-a, -1, a) = X(1, -1, 0)$$

$$Y(2+b, 2, 2+2b) = Y(1, 2, 0)$$

El vector \mathbf{XY} es $\mathbf{XY} = (0, -3, 0)$, la recta perpendicular a ambas es "t" $\equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, y la distancia entre ellas

$$\text{es } d(r;s) = d(X;Y) = \|\mathbf{XY}\| = \sqrt{(0^2+3^2+0^2)} = \sqrt{9} = 3 \text{ u.}$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x = 1$ y un punto de inflexión en $(-1, 5)$.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x = 1$ y un punto de inflexión en $(-1, 5)$.

Si tiene su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 1$, sabemos que $f'(1) = 0$.

Si $(-1, 5)$ es punto de inflexión, por punto de inflexión $f''(-1) = 0$, y por punto $f(-1) = 5$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a.$$

$$\text{De } f''(-1) = 0 \rightarrow 6(-1) + 2a = 0, \text{ de donde } a = 3.$$

$$\text{De } f'(1) = 0 \rightarrow 3(1)^2 + 2(3)(1) + b = 0, \text{ de donde } b = -9.$$

$$\text{De } f(-1) = 5 \rightarrow (-1)^3 + 3(-1)^2 + (-9)(-1) + c = 5, \text{ de donde } c = -11.$$

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x \cdot (2m - x)}{m^3}$, con $m > 0$.

Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x \cdot (2m - x)}{m^3}$, con $m > 0$.

Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

La gráfica de $f(x) = \frac{3x \cdot (2m - x)}{m^3} = \frac{1}{m^3} \cdot (6mx - 3x^2)$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (el número que multiplica a x^2 es negativo) y corta en $x = 0$ y $x = 2m$ (soluciones de $f(x) = 0$).

$$\text{Área} = \int_0^{2m} \frac{1}{m^3} \cdot (6mx - 3x^2) dx = \frac{1}{m^3} \cdot [3mx^2 - x^3]_0^{2m} = \frac{1}{m^3} \cdot [(3m(2m)^2 - (2m)^3) - (0)] = \frac{12m^3 - 8m^3}{m^3} = 4$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Del año 2016

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Discútelo según los valores de λ .

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $\lambda = 0$.

c) [0'75 puntos] Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcula esa solución.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

a) y b)

Discútelo según los valores de λ . Resuélvelo para $\lambda = 0$.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

En A , $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera = $1 \cdot (\lambda^2 - \lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) = 0$.
columna

De $\det(A) = 0$, tenemos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $\det(A) \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ = número de incógnitas, sistema compatible y determinado, solución única.

Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (terminante triangular), $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por que tiene una fila de cero, luego $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones, más de una.

Como $\text{rango} = 2$, dos ecuaciones y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad \quad \quad + z = 0 \end{cases}$, tenemos $z = 0$ y $x = 1 - y$, tomando $y = a \in \mathbb{R}$ la solución es $(x, y, z) = (1 - a, a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$.

c)

Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcula esa solución.

De $\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases} \approx \begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ (\lambda - 1)z = \lambda \end{cases}$, en la última ecuación tenemos $(\lambda - 1) \cdot 2 = \lambda$, de

donde $2\lambda - 2 = \lambda$, luego $\lambda = 2$. Entrando en la ecuación anterior $2y + 2 = 0$, es decir $y = -1$; y entrando en la primera ecuación $x + 3(-1) + 2 = 1$, de donde $x = 2$.

Si $z = 2$, $\lambda = 2$, $y = -1$ y $x = 2$. Solución $(x, y, z) = (2, -1, 2)$

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Del año 2016

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1,1,0) y B(2,2,1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

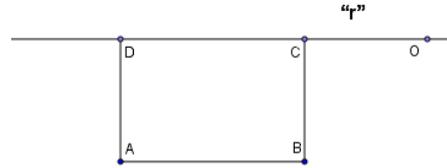
a) [0'75 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

- b) [1 punto] Calcula el área del triángulo ABC.
 c) [0'75 puntos] Determina las coordenadas del punto D.

Solución

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1,1,0) y B(2,2,1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

- a)
 Halla unas ecuaciones paramétricas de r.



La recta "r" pasa por el punto O(0,0,0) y tiene vector director el $\mathbf{AB} = (1,1,1)$. Ecuación $r \equiv \begin{cases} x = 0 + a \\ y = 0 + a \\ z = 0 + a \end{cases}$, con

$a \in \mathbb{R}$.

b) y c)

Calcula el área del triángulo ABC. Determina las coordenadas del punto D.

C y D son puntos genéricos de "r" de coordenadas C(c,c,c) y D(d,d,d). $\mathbf{AD} = (d-1, d-1, d)$, $\mathbf{BC} = (c-2, c-2, c-1)$
 El vector \mathbf{AD} es perpendicular al $\mathbf{AB} \rightarrow \mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB} = 0 \rightarrow (d-1, d-1, d) \cdot (1, 1, 1) = 0 = d-1+d-1+d = 3d-2=0$, $d=2/3$,
 y el punto D es $D(2/3, 2/3, 2/3)$.
 El vector \mathbf{BC} es perpendicular al $\mathbf{AB} \rightarrow \mathbf{BC} \cdot \mathbf{AB} = 0 \rightarrow (c-2, c-2, c-1) \cdot (1, 1, 1) = 0 = c-2+c-2+c-1 = 3c-5=0$,
 $c=5/3$, y el punto C es $C(5/3, 5/3, 5/3)$, de donde $\mathbf{BC} = (-1/3, -1/3, 2/3)$
 El área del triángulo es $= (1/2) \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = (1/2) \cdot |\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{BC}| = (1/2) \cdot \sqrt{(1^2+1^2+1^2)} \cdot \sqrt{((1/3)^2+(1/3)^2+(2/3)^2)} =$
 $= (1/2) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(6/9)} = (1/2) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}/2$