

Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 2 Junio 2016**

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite (ln denota logaritmo neperiano).

Solución

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite (ln denota logaritmo neperiano).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(3x)}{x^2} = \frac{\ln(1) - a \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0)}{0} = 0/0.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$), con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(3x)}{x^2} &= (0/0; L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cdot \cos(x) + \cos(3x) + x \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cdot \cos(x) + \cos(3x) - 3x \cdot \sin(3x)}{2x} = \frac{\frac{1}{0+1} - a \cdot \cos(0) + \cos(0) - 0 \cdot \sin(0)}{0} = \\ &= \frac{1 - a \cdot 1 + 1 - 0}{0} = \frac{2 - a}{0}. \end{aligned}$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que el límite es un número, es decir $2 - a = 0$, de donde **a = 2**.

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2 \cdot \cos(x) + \cos(3x) - 3x \cdot \sin(3x)}{2x} &= (0/0; L'H) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} - 2 \cdot (-\sin(x)) - \sin(3x) \cdot 3 - (3 \cdot \sin(3x) + 3x \cdot \cos(3x) \cdot 3)}{2} = \\ &= \frac{\frac{-1}{(1)^2} - 2 \cdot (-\sin(0)) - \sin(0) \cdot 3 - (3 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) \cdot 3)}{2} = \frac{-1 + 0 - 0 - (0 + 0)}{2} = -1/2. \end{aligned}$$

Resumiendo **el valor de a es 2 y el valor del límite es -1/2**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 2 Junio 2016

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

Solución

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$

Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral que $f(x) = \int f'(x) dx$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

De $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, tenemos **$f'(1) = \frac{(1-1)^2}{1+1} = 0$** .

Nos falta determina $f(1)$ para lo cual primero tenemos que calcular $f(x) = \int f'(x) dx$, con $f(0) = 0$

Empezamos: $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{(x-1)^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx$.

Observamos que es una integral racional con el numerador de grado mayor o igual que el denominador, por tanto antes hay re realizar la división entera.

La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \quad | \quad x + 1 \\ -x^2 - x \quad \quad \quad x - 3 \\ \hline -3x + 1 \\ 3x + 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

Recordamos que $f(x) = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1} \right) dx = x^2/2 - 3x + 4 \cdot \ln|x+1| + K$, donde \ln es el logaritmo neperiano.

Como $f(0) = 0$, tenemos $0^2/2 - 0 + 4 \cdot \ln|0+1| + K = 0$, es decir $0 + \ln(1) + K = 0$, de donde $K = 0$.

La función es $f(x) = x^2/2 - 3x + 4 \cdot \ln|x+1|$, y $f(1) = 1^2/2 - 3(1) + 4 \cdot \ln|1+1| = -5/2 + 4 \cdot \ln(2)$.

La recta tangente pedida es: $y - (-5/2 + 4 \cdot \ln(2)) = 0 \cdot (x - 1)$, es decir $y = -5/2 + 4 \cdot \ln(2)$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 2 Junio 2016

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$.

(a) [0'75 puntos] Calcula B^2 y B^{2016} .

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

(a)

Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda = $1(-1+2) = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$.

De $AX + B = 2A$, tenemos $AX = 2A - B$. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por A^{-1} tenemos:
 $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot 2A - A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = 2 \cdot I - A^{-1} \cdot B \rightarrow X = 2 \cdot I - A^{-1} \cdot B$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$. $|A| = 1$; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La matriz es } X = 2 \cdot I - A^{-1} \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 9 & 5 \\ -8 & 7 & 4 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a)

Calcula B^2 y B^{2016} .

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$B^{2016} = (B^2)^{1008} = (I_3)^{1008} = I_3.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 2 Junio 2016

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a "r".

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia de P a la recta "r" y el punto simétrico de P respecto a "r".

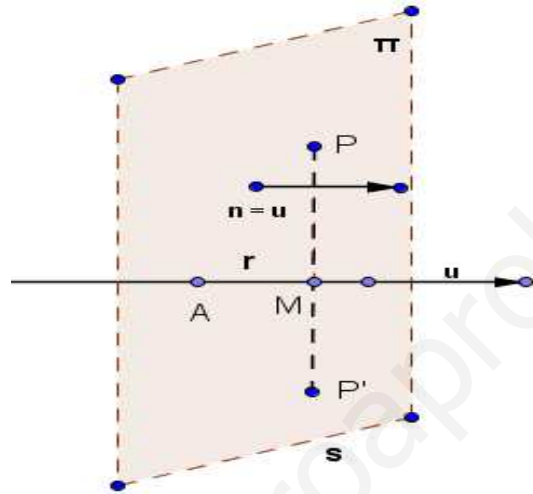
Solución

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

(a)

Determina la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a "r".

Preparamos una figura para los dos apartados:



Ponemos la recta "r" $\equiv \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ en paramétricas "r" $\equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2a \\ z = a \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Un punto de la recta es el $A(1,0,0)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (0,-2,1)$.

El plano π que pasa por el punto $P(1,0,5)$ y es perpendicular a la recta "r", tiene por vector normal \mathbf{n} , el vector director de la recta, el $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (0,-2,1)$.

El plano π tiene de ecuación $\mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde $X(x,y,z)$ es un punto genérico del plano y \cdot es el producto escalar de dos vectores:

$$\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x - 1, y - 0, z - 5) \cdot (0, -2, 1) = -2y + z - 5 = -2y + z - 5 = 0.$$

(b)

Calcula la distancia de P a la recta "r" y el punto simétrico de P respecto a "r".

Empezamos calculando el simétrico P' de P respecto de r. Cuando calculemos el punto M proyección ortogonal de P sobre "r", por definición la distancia de P a "r" será el módulo del vector \mathbf{PM} .

Antes hemos puesto la recta "r" en paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2a \\ z = a \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Un punto genérico de la recta es $X(x,y,z) = (1, -2a, a)$.

En el apartado (a) hemos calculado plano que pasa por P y es perpendicular a "r".

La proyección M de P sobre "r", se obtiene como el punto de corte M del plano " π " con la recta "r". Sustituyendo el punto genérico de la recta "r" en el plano $\pi \equiv -2y + z - 5 = 0$, calculando el valor del parámetro "a" y sustituyendo de nuevo en la recta.

$$-2(-2a) + (a) - 5 = 0 \rightarrow 5a - 5 = 0 \rightarrow a = 5/5 = 1.$$

El punto M es $M(1, -2(1), (1)) = M(1, -2, 1)$. (Recuerdo que teníamos punto $P(1,0,5)$)

La distancia de P a "r" será el módulo del vector $\mathbf{PM} = (1 - 1, -2 - 0, 1 - 5) = (0, -2, -4)$.

$$\text{Luego } d(\mathbf{P}; \mathbf{r}) = \|\mathbf{PM}\| = \sqrt{(0^2 + 2^2 + 4^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

El punto simétrico $P'(x,y,z)$ se calcula sabiendo que el punto M es el punto medio del segmento PP' .

$(1,-2,1) = ((x+1)/2, (y+0)/2, (z+5)/2)$, de donde:

$$1 = (x+1)/2 \rightarrow x = 1.$$

$$-2 = y/2 \rightarrow y = -4.$$

$$1 = (z+5)/2 \rightarrow z = -3.$$

El simétrico P' de P respecto a la recta "r" es $P'(1,-4,-3)$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 2 Junio 2016

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f . Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f .

b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

a)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f . Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f .

Como el denominador no se anula nunca, y tenemos un cociente de polinomios, $f(x)$ **no tiene asíntotas verticales**.

Sabemos que en un cociente de polinomios si el grado del denominador es mayor que el del numerador tenemos una asíntota horizontal, y es la misma en $\pm \infty$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1/+\infty = 0$, **la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal $\pm \infty$** .

Como hay asíntota horizontal en $\pm \infty$, **no hay asíntotas oblicuas en $\pm \infty$** .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0) = 0^-$, **la gráfica de f está por debajo de la recta $y = 0$ en $-\infty$** .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0) = 0^+$, **la gráfica de f está por encima de la recta $y = 0$ en $+\infty$** .

Veamos los corte de la gráfica de f con la recta $y = 0$.

Igualando $\frac{x}{x^2 + 1} = 0$, de donde $x = 0$, luego **la gráfica de f corta a la asíntota horizontal $y = 0$ en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$** .

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f .

Me piden la monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

De $f'(x) = 0$, tenemos $-x^2 + 1 = 0$, es decir $x^2 = 1$ y las soluciones son $x = \pm 1$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 1}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0 < 0$, **f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\infty, -1)$** .

Como $f'(0) = \frac{0 + 1}{(0 + 1)^2} = 1 > 0 < 0$, **f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-1, 1)$** .

Como $f'(2) = \frac{-(2)^2 + 1}{((2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0 < 0$, **f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(1, +\infty)$** .

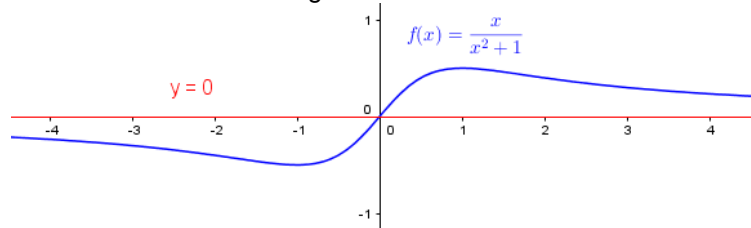
Por definición $x = -1$ es un *mínimo relativo* y vale $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -1/2$.

Por definición $x = 1$ es un *máximo relativo* y vale $f(1) = \frac{1}{(1)^2 + 1} = 1/2$.

c)

Esboza la gráfica de f .

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



Ejercicio 2 opción B, modelo 2 Junio 2016

Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (ln representa logaritmo neperiano).

(a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [2 puntos] Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f , la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

Solución

Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (ln representa logaritmo neperiano).

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$f(x) = \ln(x)$; luego $f(1) = \ln(1) = 0$.

$f'(x) = 1/x$, luego $f'(1) = 1/1 = 1$.

La recta tangente pedida es $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, luego **la recta tangente pedida es $y = x - 1$** .

(b)

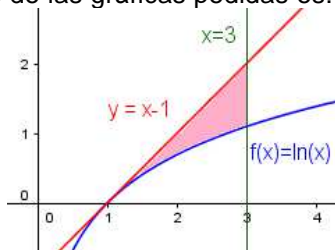
Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f , la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

Sabemos que la gráfica de $\ln(x)$ es estrictamente creciente y que en $x = 0^+$ es asíntota vertical, porque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty, \text{ y además } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \ln(+\infty) = +\infty.$$

También sabemos que $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

La recta $y = x - 1$, la dibujamos con dos puntos, el $(0, -1)$ y el $(1, 0)$. La recta $x = 3$ es una recta vertical. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas pedidas es:



Lo relleno de color, es el área que piden.

Recordamos que $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x$, pues es una integral por partes ($\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$).

$$\int \ln(x) dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = x \rightarrow v = \int dx = x \} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot dx/x = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x.$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 (x - 1 - \ln(x)) dx = [x^2/2 - x - x \cdot \ln(x) + x]_1^3 = [x^2/2 - x \cdot \ln(x)]_1^3 = \\ &= [(3^2/2 - 3 \cdot \ln(3)) - (1^2/2 - 1 \cdot \ln(1))] = 9/2 - 1/2 - 3 \cdot \ln(3) = 4 - 3 \cdot \ln(3) \text{ u}^2 \cong 0'70416 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 2 Junio 2016

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases},$$

a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro α .

b) [1 punto] Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe alguna solución donde $x = 4$.

Solución

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases},$$

a)

Discútelo según los valores del parámetro α .

Observamos que es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{pmatrix}.$$

La matriz cuadrada de 3×3 es la ampliada A^* .

Si $\det(A^*) = |A^*| \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3 \neq \text{rango}(A)$, pues como máximo $\text{rango}(A) = 2$. El sistema será incompatible.

$$\begin{aligned} |A^*| &= \begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (3\alpha - 1)(\alpha + 5 - 6) - (2)(\alpha^2 + 5\alpha - 6\alpha) + (5 - \alpha)(3\alpha - 3\alpha) = \\ &= (3\alpha - 1)(\alpha - 1) - (2) \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) + (5 - \alpha)(0) = (\alpha - 1) \cdot (3\alpha - 1 - 2\alpha) = (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) \end{aligned}$$

De $|A^*| = 0$, tenemos $(\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) = 0$ y la solución es $\alpha = 1$ (doble).

Si $\alpha \neq 1$, $\det(A^*) = |A^*| \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3 \neq \text{rango}(A)$, pues como máximo $\text{rango}(A) = 2$. **El sistema será incompatible.**

En $A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}$ vemos que la segunda y tercera fila son proporcionales. Podemos suprimir la tercera

e intercambiamos segunda con primera.

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 - 3F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 - 3F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que **si $\alpha = 1$** , las dos filas son proporcionales y **$\text{rango}(A) = 1$** .

Veamos el $\text{rango}(A^*)$ para $\alpha = 1$.

$$\text{Si } \alpha = 1, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 - 2F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ luego } \text{rango}(A^*) = 1, \text{ pues tenemos una fila solamente con}$$

números distinto de cero.

Resumiendo:

Si $\alpha \neq 1$, $\det(A^*) = |A^*| \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3 \neq \text{rango}(A)$, pues como máximo $\text{rango}(A) = 2$. **El sistema será incompatible.**

Si $\alpha = 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1 < n^\circ$ de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe alguna solución donde $x = 4$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $\alpha = 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1 < n^\circ$ de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 1, sólo necesitamos una ecuación. Tomo la segunda:

$x + y = 2$. Tomo $x = a \in \mathbb{R}$, de donde $y = 2 - a$. (Es la ecuación de una recta en el plano)

Solución $(x,y) = (a, 2 - a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Si tomamos $x = 4 = a$, tenemos $y = 2 - 4 = -2$. **Solución $(x,y) = (4,-2)$.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 2 Junio 2016

Considera las rectas "r" y "s" dadas por: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

(b) [1 punto] Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas "r" y "s", calcula su área.

Solución

Considera las rectas "r" y "s" dadas por: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

(a)

Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

Ponemos la recta "s" $\equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ en paramétricas "s" $\equiv \begin{cases} x = -1 - 2b \\ y = b \\ z = -1 \end{cases}$, con $b \in \mathbb{R}$.

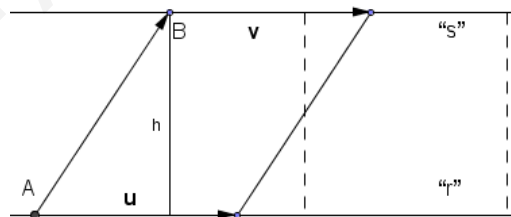
De la recta "r" tenemos el punto $A(1,1,1)$ y un vector director $\mathbf{u} = (-2,1,0)$.

De la recta "s" tenemos el punto $B(-1,0,-1)$ y un vector director $\mathbf{v} = (-2,1,0)$.

Sabemos que dos rectas determinan un plano si son paralelas y distintas o bien si se cortan en un punto.

En nuestro caso vemos que los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son iguales, por tanto son paralelas. Para ver que son distintas vemos que el vector \mathbf{u} no es proporcional al vector \mathbf{AB} .

$\mathbf{AB} = (-2,-1,-2)$. Como $-2/-2 \neq 1/-1$, \mathbf{u} no es proporcional al vector \mathbf{AB} y las rectas "r" y "s" son paralelas y distintas.



Me piden el plano π que determinan las rectas "r" y "s". De la recta "r" tomo el punto $A(1,1,1)$ y su vector director $\mathbf{u} = (-2,1,0)$. El otro vector es el $\mathbf{AB} = (-2,-1,-2)$.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-1)(-2-0) - (y-1)(4-0) + (z-1)(2+2) =$$

$$= -2x + 2 - 4y + 4 + 4z - 4 = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 = -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

(b)

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas "r" y "s", calcula su área.

Si observamos la figura el lado del cuadrado es la distancia entre las rectas y su área es el lado al cuadrado.

Como ya sabemos que las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo. *Es la altura del paralelogramo.* Nos sirve la figura anterior.

Dada la recta "r" conocemos el punto $A(1,1,1)$ y su vector director $\mathbf{u} = (-2,1,0)$. De la recta "s" sólo tomamos el punto $B(-1,0,-1)$.

El área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{AB} es $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$, pero la altura "h" es $d(s,r) = d(B;r)$, luego $d(B;r) = (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$

$$\mathbf{AB} = (-2,-1,-2); \quad \mathbf{u} \times \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2-0) - \vec{j}(4-0) + \vec{k}(2+2) = (-2,-4,4); \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{AB}\| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Luego } d(s,r) = d(B;r) = (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = 6/\sqrt{5} \text{ u}^1.$$

$$\text{El área del cuadrado es } [6/\sqrt{5}]^2 = 36/5 \text{ u}^2.$$

www.yoquieroaprobar.es