

**Opción A****Ejercicio 1 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)**

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$  es continua.

- a) [1'5 puntos] Determina  $a$  y  $b$ .  
 b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de  $f$ .

**Solución**

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cdot \cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$  es continua.

- a)  
 Determina  $a$  y  $b$ .

Como nos dicen que es continua en  $\mathbb{R}$ , lo es también en  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

Como  $f$  es continua en  $x = 0$  tenemos:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 + 2a \cdot \cos(x)] = (0 + 2a \cdot \cos(0)) = 2a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [3x + 2] = (0 + 2) = 2. \text{ Igualando tenemos } 2a = 2, \text{ de donde } a = 1.$$

Como  $f$  es continua en  $x = \pi$  tenemos:  $f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [f(x)]$

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [ax^2 + b] = (1 \cdot \pi^2 + b) = \pi^2 + b.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi^-} [x^2 + 2a \cdot \cos(x)] = (\pi^2 + 2 \cdot 1 \cdot \cos(\pi)) = \pi^2 - 2. \text{ Igualando tenemos } \pi^2 + b = \pi^2 - 2, \text{ de donde } b = -2.$$

**Los valores pedidos son  $a = 1$  y  $b = -2$ .**

- b)  
 Estudia la derivabilidad de  $f$ .

Las ramas  $3x + 2$ ,  $x^2 + 2\cos(x)$  y  $x^2 - 2$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ , por lo tanto lo son en el intervalo abierto donde están definidas. Sólo nos falta ver la derivabilidad de  $f$  en  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 \cdot \cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 \cdot \text{sen}(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

Para que  $f$  sea derivable en  $x = 0$  se tiene que verificar:  $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [3] = 3.$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2x - 2\text{sen}(x)] = 0 - 2\text{sen}(0) = 0. \text{ Como } f'(0^-) = 3 \neq f'(0^+) = 0, \text{ la función } f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

Para que  $f$  sea derivable en  $x = \pi$  se tiene que verificar:  $f'(\pi^-) = f'(\pi^+)$

$$f'(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi^-} [2x - 2\text{sen}(x)] = (2\pi - 2\text{sen}(\pi)) = 2\pi.$$

$$f'(\pi^+) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [2x] = 2\pi. \text{ Como } f'(\pi^-) = f'(\pi^+) = 2\pi, \text{ la función } f \text{ si es derivable en } x = \pi,$$

**por tanto  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , y su derivada es:**  $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 \cdot \text{sen}(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$

**Ejercicio 2 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)**

Considera la función dada por  $f(x) = \sqrt{3 + |x|}$  para  $x \in [-3, 3]$ .

- a) [0'5 puntos] Expresa la función  $f$  definida a trozos.  
 b) [2 puntos] Halla  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ .

**Solución**

Considera la función dada por  $f(x) = \sqrt{3 + |x|}$  para  $x \in [-3, 3]$ .

a)

Expresa la función  $f$  definida a trozos.

$$\text{Sabemos que } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ +x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ por tanto } f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{3+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b)

Halla  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ .

Como  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{3+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ , vamos a calcular la integral indefinida de cada rama por separado, y después las juntaremos en la integral definida que me piden.

Ambas integrales son integrales por cambio, en la primera  $3-x = t^2$  y en la segunda  $3+x = t^2$ , después quitaremos el cambio.

$$I_1 = \int \sqrt{3-x} \cdot dx = \begin{cases} 3-x = t^2 \\ x = 3-t^2 \\ dx = -2t dt \end{cases} = \int \sqrt{t^2} \cdot (-2t) dt = -2 \int t^2 \cdot dt = -\frac{2t^3}{3} = \begin{cases} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{cases} = -\frac{2(\sqrt{3-x})^3}{3} = -\frac{2\sqrt{(3-x)^3}}{3}$$

$$I_2 = \int \sqrt{3+x} \cdot dx = \begin{cases} 3+x = t^2 \\ x = t^2-3 \\ dx = 2t dt \end{cases} = \int \sqrt{t^2} \cdot (2t) dt = 2 \int t^2 \cdot dt = \frac{2t^3}{3} = \begin{cases} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{cases} = \frac{2(\sqrt{3+x})^3}{3} = \frac{2\sqrt{(3+x)^3}}{3}$$

La integral pedida es  $\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 \sqrt{3-x} \cdot dx + \int_0^3 \sqrt{3+x} \cdot dx =$

$$= \left[ -\frac{2\sqrt{(3-x)^3}}{3} \right]_{-3}^0 + \left[ \frac{2\sqrt{(3+x)^3}}{3} \right]_0^3 = \left[ \left( -\frac{2\sqrt{(3-0)^3}}{3} \right) - \left( -\frac{2\sqrt{(3-(-3))^3}}{3} \right) \right] + \left[ \left( \frac{2\sqrt{(3+3)^3}}{3} \right) - \left( \frac{2\sqrt{(3+0)^3}}{3} \right) \right] =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3^3}}{3} + \frac{2\sqrt{6^3}}{3} + \frac{2\sqrt{6^3}}{3} - \frac{2\sqrt{3^3}}{3} = \frac{4\sqrt{6^3}}{3} - \frac{4\sqrt{3^3}}{3} = 6\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$$

### Ejercicio 3 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de  $(A+B)$ .b) [1'25 puntos] Calcula el determinante de  $2A^{-1}(A+B)^t$ , siendo  $(A+B)^t$  la matriz traspuesta de  $A+B$ .

#### Solución

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de  $(A+B)$ .

Llamamos  $C = A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . La matriz  $C = A+B$  tiene inversa si  $\det(C) =$

$$= |C| \neq 0$$

Como  $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$  Adjuntos  
primera =  $-1(0-20) + 2 \cdot (-2-0) = 24 \neq 0$ , existe la matriz inversa  
fila

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t)$$

Calculamos  $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t)$ .  $|C| = 24$ ;  $C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ , por tanto la matriz

$$\text{inversa es } C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 & 5/24 \\ 5/6 & -1/3 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & -1/24 \end{pmatrix} = (A + B)^{-1}.$$

b)

Calcula el determinante de  $2A^{-1}(A+B)^t$ , siendo  $(A+B)^t$  la matriz traspuesta de  $A+B$ .

De las propiedades de los determinantes, sabemos que  $\det(C^T) = \det(C)$ , y  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

También sabemos que  $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$ , siendo "n" el orden de la matriz A, en este caso "3".

$$\text{Calculamos } \det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (1) \cdot (-2) = 4, \text{ puesto que en una matriz triangular su determinante es el}$$

producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\det(2A^{-1}(A+B)^t) = \det(2A^{-1}) \cdot \det(A+B)^t = 2^3 \cdot \det(A^{-1}) \cdot \det(A+B)^t = [2^3/\det(A)] \cdot \det(C)^t = [2^3/(\det(A))] \cdot \det(C) = [8/4] \cdot 24 = 2 \cdot 24 = 48.$$

#### Ejercicio 4 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Considera los vectores  $u = (2,3,4)$ ,  $v = (-1,-1,-1)$  y  $w = (-1,\lambda,-5)$  siendo  $\lambda$  un número real.

a) [1'25 puntos] Halla los valores de  $\lambda$  para los que el paralelepípedo determinado por  $u$ ,  $v$  y  $w$  tiene volumen 6 unidades cúbicas.

b) [1'25 puntos] Determina el valor de  $\lambda$  para el que  $u$ ,  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes.

#### Solución

Considera los vectores  $u = (2,3,4)$ ,  $v = (-1,-1,-1)$  y  $w = (-1,\lambda,-5)$  siendo  $\lambda$  un número real.

a)

Halla los valores de  $\lambda$  para los que el paralelepípedo determinado por  $u$ ,  $v$  y  $w$  tiene volumen 6 unidades cúbicas.

Sabemos que el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$ , es el valor absoluto (lo notaremos  $||$ ) del producto mixto (lo notaremos con corchetes  $[ ]$ ) de los tres vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

$$\text{Tenemos, volumen} = 6 = |[u, v, w]| = |\det(u, v, w)| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} =$$

$$= | -(-1) \cdot (-4 - 2\lambda - 2) | = |-6 - 2\lambda|.$$

Tenemos la ecuación  $|-6 - 2\lambda| = 6$ , que no da lugar a dos ecuaciones:

$$+(-6 - 2\lambda) = 6 \text{ y } -(-6 - 2\lambda) = 6.$$

$$\text{De } -6 - 2\lambda = 6 \rightarrow -12 = 2\lambda, \text{ luego } \lambda = -6.$$

$$\text{De } 6 - 2\lambda = 6 \rightarrow 0 = 2\lambda, \text{ luego } \lambda = 0.$$

**Luego los valores de  $\lambda$  para los que el paralelepípedo determinado por  $u$ ,  $v$  y  $w$  tiene volumen 6 unidades cúbicas son  $\lambda = -6$  y  $\lambda = 0$ .**

b)

Determina el valor de  $\lambda$  para el que  $u$ ,  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes.

Los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes si y solo si  $\det(u, v, w) = 0$

$$\det(u, v, w) = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = -(-1) \cdot (-4 - 2\lambda - 2) = -6 - 2\lambda = 0.$$

De  $-6 - 2\lambda = 0$ , tenemos  $\lambda = -3$ , es decir para  $\lambda = -3$  los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes.

#### Opción B

#### Ejercicio 1 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)$ .

#### Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} \right) = \frac{\sin(0) - 0 \cdot \cos(0)}{0 \cdot \sin(0)} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en  $[a - \delta, a + \delta]$ , derivables en  $(a - \delta, a + \delta)$ , verificando que  $f(a) = g(a) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , entonces si existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos  $\infty/\infty$ , y si  $x \rightarrow \infty$ , con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} \right) &= \left\{ \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) - (1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)))}{1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)} \right) = \{ \text{Opero} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cdot \sin(x)}{1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)} \right) = \\ &= \left\{ \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)}{\cos(x) + 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x))} \right) = \frac{\sin(0) + 0 \cdot \cos(0)}{\cos(0) + 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot (-\sin(0))} = \frac{0 + 0}{1 + 1 + 0} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

### Ejercicio 2 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x \cdot \arctan(x)$ . Determina la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0, \pi)$ .

#### Solución

Calculamos primero la integral indefinida, es decir una primitiva  $F$  de  $f$ .

$F(x) = \int x \cdot \arctan(x) dx$ , vemos que es una integral por partes ( $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ )

$$F(x) = \int x \cdot \arctan(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \arctan(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan(x)$$

Luego

$$F(x) = \int x \cdot \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} I_1 = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + K = \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} x + K, \text{ es}$$

$$\text{decir } F(x) = \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} x + K.$$

La primitiva  $F(x)$  que pasa por el punto  $(0, \pi)$ , verifica  $F(0) = \pi$ , en nuestro caso:

$$F(0) = \frac{0^2}{2} \arctan(0) + \frac{1}{2} \arctan(0) - \frac{1}{2} (0) + K = \pi, \text{ es decir } K = \pi, \text{ y la primitiva pedida es:}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} x + \pi.$$

### Ejercicio 3 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Determina, si existe, la

matriz  $X$  que verifica que  $ABX - 2C = CX$ .

#### Solución

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Determina, si existe, la matriz  $X$  que

verifica que  $ABX - 2C = CX$ .

De  $ABX - 2C = CX$ , tenemos  $ABX - CX = 2C$ , luego  $(AB - C) \cdot X = 2C$ .

En principio la operación matricial  $(AB - C) \cdot X = 2C$  tiene sentido.

$$\text{Llamamos } D = AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación  $(AB - C) \cdot X = 2C$ , se reduce a  $D \cdot X = 2C$ .

Como  $\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  Adjuntos tercera fila  $= +1(-4 + 3) = -1 \neq 0$ , existe la matriz inversa  $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D^t)$ .

Calculamos  $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D^t)$ .  $|D| = -1$ ;  $D^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$ , por tanto la matriz inversa

$$\text{es } D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Como existe la matriz inversa  $D^{-1}$ , multiplicando por la izquierda la expresión  $D \cdot X = 2C$ , tenemos  $D^{-1} \cdot D \cdot X = D^{-1} \cdot 2C \rightarrow I \cdot X = 2D^{-1}C \rightarrow X = 2D^{-1}C$

$$\text{La matriz pedida es } X = 2D^{-1} \cdot C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -20 & 19 & -12 \\ -15 & 15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

#### Ejercicio 4 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Sea  $r$  la recta que pasa por  $A(4,3,6)$  y  $B(-2,0,0)$  y sea  $s$  la recta dada por  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

- a) [1'25 puntos] Determina la posición relativa de  $r$  y  $s$ .  
b) [1'25 puntos] Calcula, si existen, los puntos  $C$  de  $s$  tales que los vectores  $CA$  y  $CB$  son ortogonales.

#### Solución

Sea  $r$  la recta que pasa por  $A(4,3,6)$  y  $B(-2,0,0)$  y sea  $s$  la recta dada por  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

- a)  
Determina la posición relativa de  $r$  y  $s$ .

De la recta " $r$ " tomamos un punto, el  $B(-2,0,0)$  y un vector director, el  $BA = (6,3,6)$ , otro es el  $u = (2,1,2)$ .  
Un punto  $D$  de " $s$ " es  $D(2,0,1)$  y un vector director es  $v = (1,1,-2)$ .

Como los vectores  $u$  de " $r$ " y  $v$  de " $s$ " no son proporcionales, las recta " $r$ " y " $s$ " se cortan o se cruzan.

Si  $\det(BD, u, v) = 0$ , " $r$ " y " $s$ " se cortan, con  $BD = d - b = (4,0,1)$

Si  $\det(BD, u, v) \neq 0$ , " $r$ " y " $s$ " se cruzan.

Como  $\det(BD, u, v) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} F_2 - F_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$  Adjuntos segunda columna  $= -(1) \cdot (16-1) = -15 \neq 0$ , " $r$ " y " $s$ " se cruzan

- b)  
Calcula, si existen, los puntos  $C$  de " $s$ " tales que los vectores  $CA$  y  $CB$  son ortogonales.

De la recta  $s(D;v)$  tomamos un punto genérico  $C(x,y,z) = C(2+\lambda, \lambda, 1-2\lambda)$ .

$$CA = a - c = (4-2-\lambda, 3-\lambda, 6-1+2\lambda) = (2-\lambda, 3-\lambda, 5+2\lambda)$$

$$CB = b - c = (-2-2-\lambda, 0-\lambda, 0-1+2\lambda) = (-4-\lambda, -\lambda, -1+2\lambda)$$

$CA$  y  $CB$  son ortogonales si y solo si su producto escalar ( $\bullet$ ) es cero.

$$CA \bullet CB = 0 = (2-\lambda, 3-\lambda, 5+2\lambda) \bullet (-4-\lambda, -\lambda, -1+2\lambda) = (2-\lambda) \cdot (-4-\lambda) + (3-\lambda) \cdot (-\lambda) + (5+2\lambda) \cdot (-1+2\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8 + \lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 + 8\lambda - 5 = 6\lambda^2 + 7\lambda - 13 = 0.$$

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 312}}{12} = \frac{-7 \pm 19}{12}, \text{ de donde } \lambda = 1 \text{ y } \lambda = -13/6.$$

$CA$  y  $CB$  son ortogonales tomando  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -13/6$ .