12 TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Página 231

Resuelve

1 **En el triángulo de la figura A de la página anterior, ¿qué ángulo gira cada una de las piezas recortadas para dar lugar a la pieza con forma de «pajarita»?**

Cada una de las piezas recortadas gira 180°.

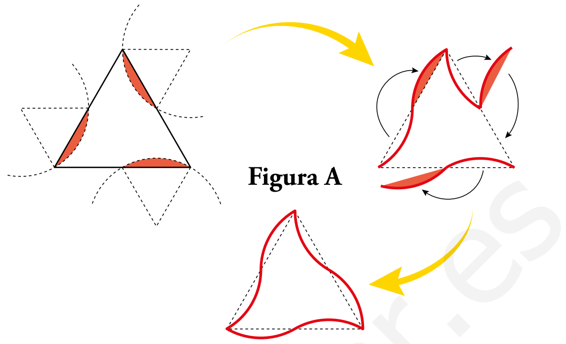


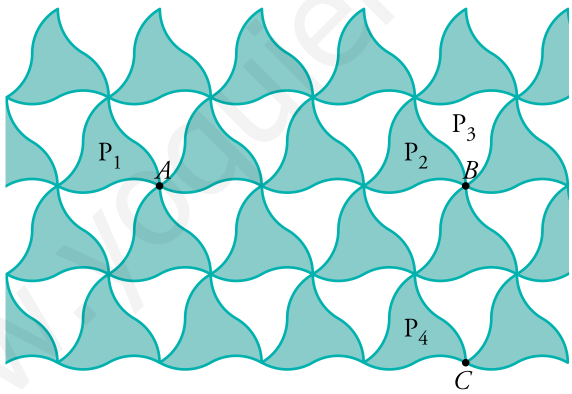
Figura A

2 **Describe los movimientos que se mencionan arriba, para la transparencia que calca la figura B.**

Para que P_1 se superponga sobre P_2 hay que mover el papel a la derecha la distancia AB.

Para que P_2 se superponga sobre P_3 hay que girar 60°, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de B.

Para que P_3 se superponga sobre P_4 hay que mover el papel hacia abajo la distancia BC y girar 60°, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor de C.



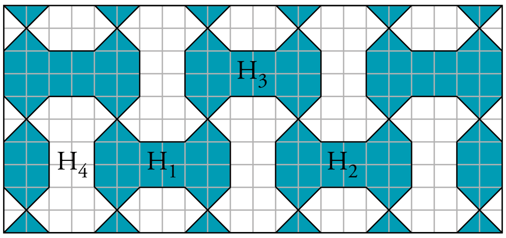
3 **Supón que la figura B se expande indefinidamente en todas direcciones. ¿En qué punto clavarías un alfiler para que, al girar la transparencia, desaparezca el color blanco?**

Pondríamos el alfiler en cualquiera de los vértices de cualquier pajarita.

3 ▶ TRASLACIONES

Página 242

1 **El mosaico de abajo se llama «multihueso». H_1, H_2, H_3 y H_4 son «huesos». Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

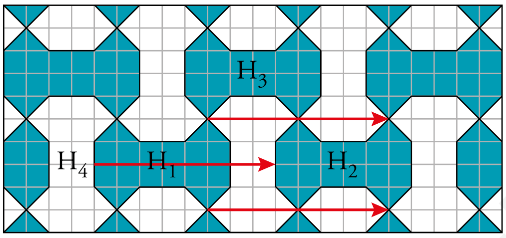


a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

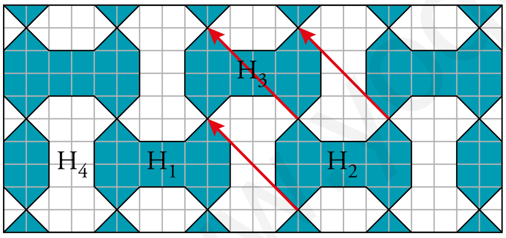
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

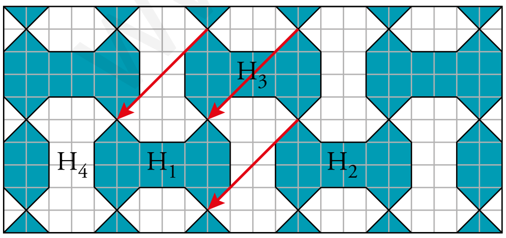
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

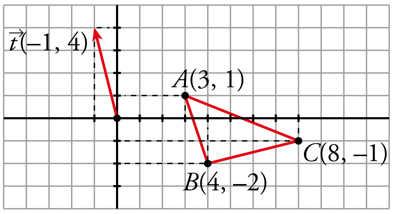


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 243

2 **a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, –2)$ y $C(8, –1)$ según el vector $\vec{t}(–1, 4)$.**

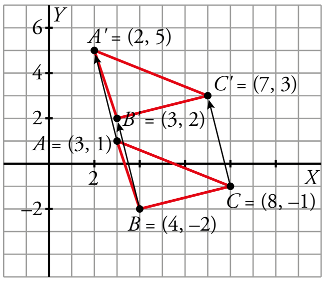


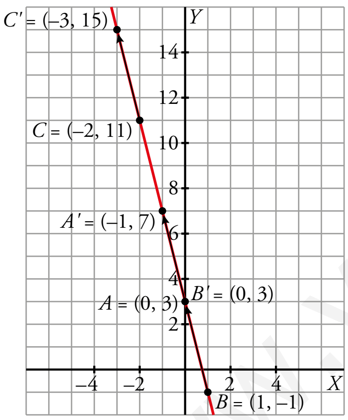
Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta r: $y = 3 – 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

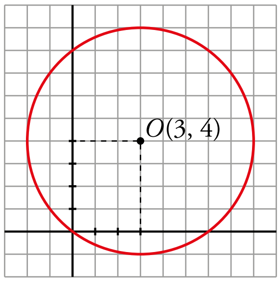
Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

a) Los dos triángulos son iguales.



b) 

3 **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro $O(3, 4)$ y radio 5.**

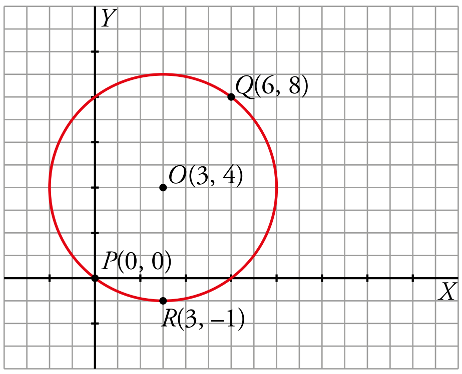


a) Comprueba que C pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

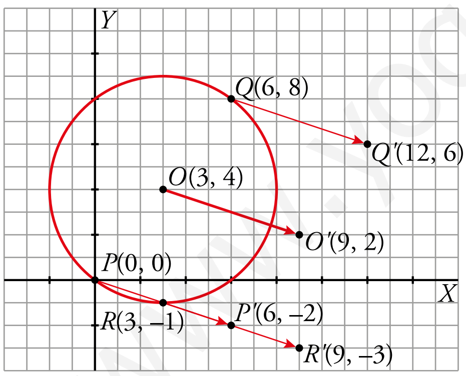
b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación T de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathrm{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

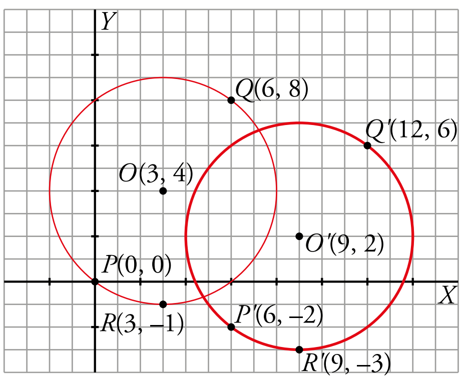
a) La circunferencia pasa por P, Q y R.



b) Los puntos trasladados son P', Q' y R'.



c) Al trasladar O, encontramos el centro $O'(9, 2)$. La circunferencia pasa por los trasladados de P, Q y R.



4 GIROS. FIGURAS CON CENTRO DE GIRO

Página 245

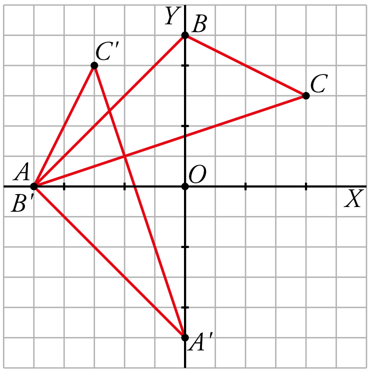
1 **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

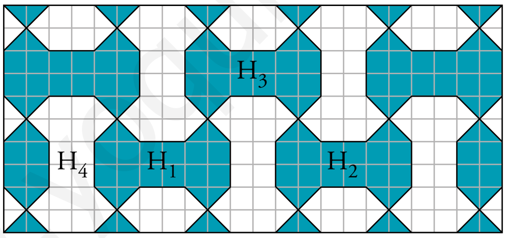
a)



b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

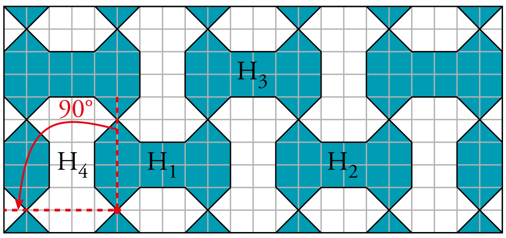
2 **Recuerda el mosaico «multihueso» que ya hemos visto en un ejercicio anterior.**



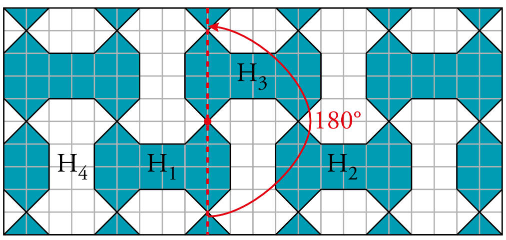
a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.

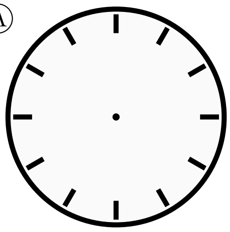
a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:

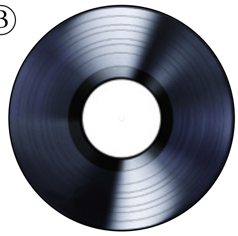


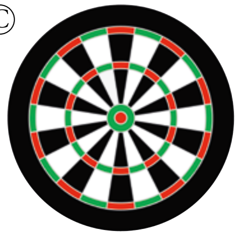
b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:

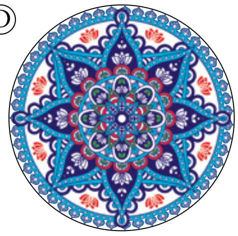


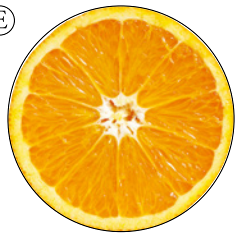
3 **Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

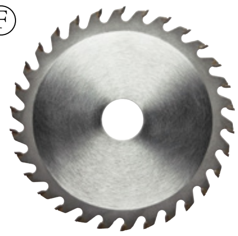
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


Ⓕ


Todas las figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n/veces, contando con la posición inicial.

A Tiene orden $n = 12 \rightarrow 360°: 12 = 30°$.

B Tiene orden infinito Cualquier giro la hace coincidir consigo misma.

C Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

D Tiene orden $n = 8 \rightarrow 360°: 8 = 45°$.

E Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

F Tiene orden $n = 30 \rightarrow 360°: 30 = 12°$.

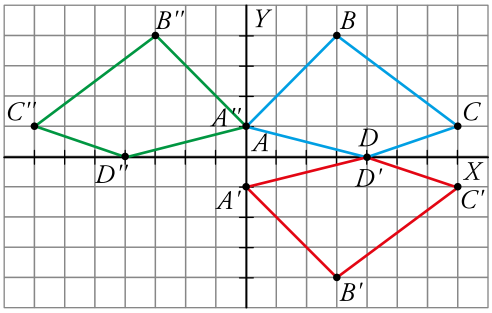
5 ▸ SIMETRÍAS AXIALES. FIGURAS CON EJES DE SIMETRÍA

Página 246

1 **¿Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y traza sobre ellos el cuadrilátero F cuyos vértices son, respectivamente, $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, $C(7, 1)$ y $D(4, 0)$.**

a) Dibuja el cuadrilátero transformado de F mediante la simetría de eje X. ¿Qué coordenadas tienen sus vértices?

b) Dibuja el transformado de F mediante la simetría de eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?



a) $A'(0, -1)$; $B'(3, -4)$; $C'(7, -1)$; $D'(4, 0)$.

b) $A''(0, 1)$; $B''(-3, 4)$; $C''(-7, 1)$; $D''(-4, 0)$.

2 **Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:**

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

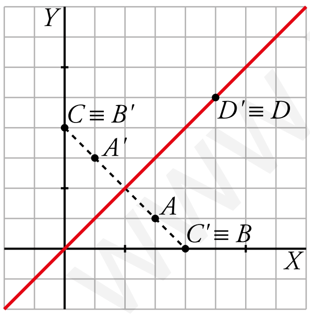
b) El eje X.

c) El eje Y.

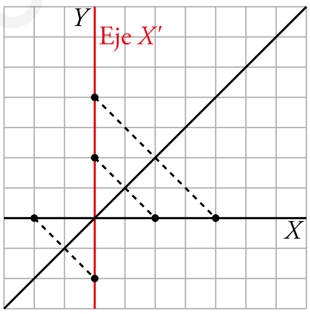
d) La circunferencia C_1 de centro $(1, 4)$ y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro $(3, 3)$ y radio 5.

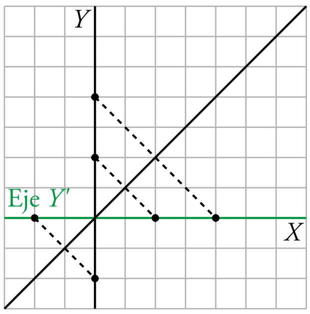
a)



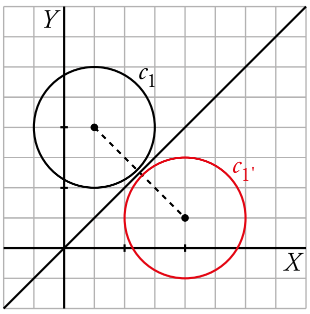
b)



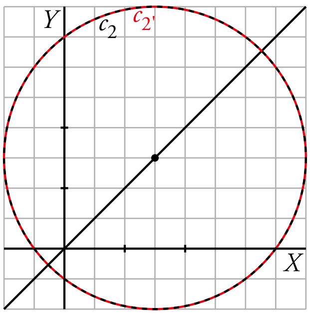
c)



d)

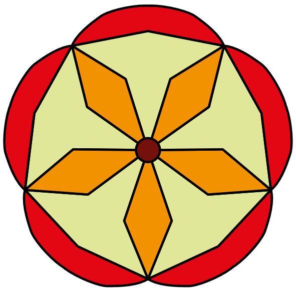


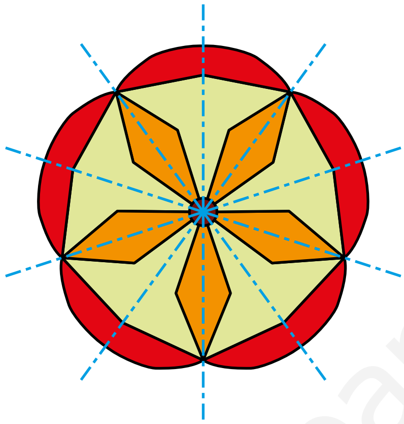
e)



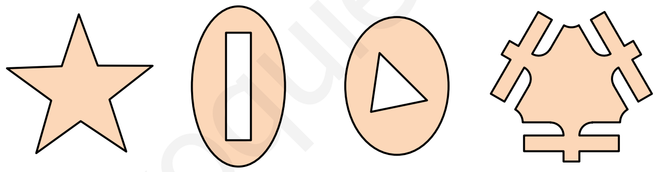
Página 247

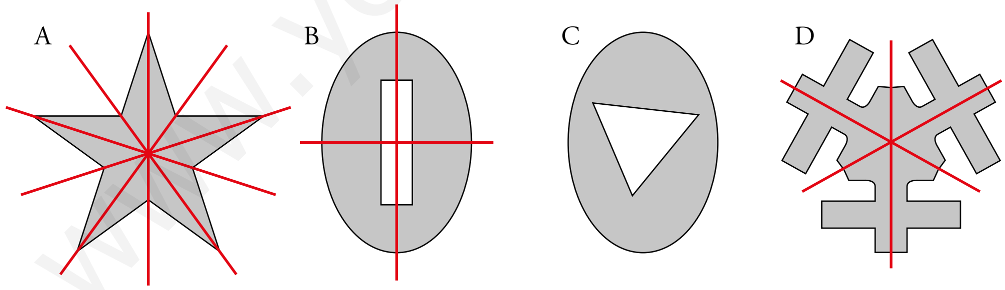
3 **Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría:**





4 **Encuentra los ejes de simetría de las siguientes figuras:**





No tiene

5 **Dibuja en tu cuaderno una figura con n ejes de simetría que no sea un polígono regular, donde:**

a) $n = 3$ **b)** $n = 4$

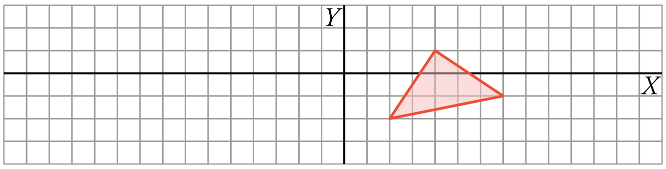
c) $n = 1$ **d)** $n = 0$

Respuesta abierta.

6 ▸ COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Página 248

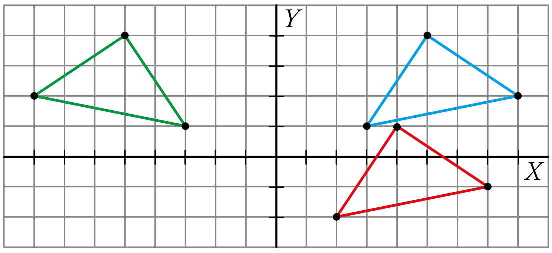
1 **Copia en tu cuaderno este dibujo:**



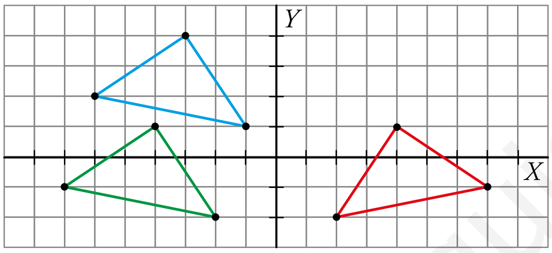
a) Traslada la figura mediante el vector $\vec{u}(1, 3)$ y aplica al resultado una simetría de eje *Y*.

b) Realiza la composición contraria al apartado anterior: primero la simetría y después la traslación. ¿Obtienes el mismo resultado?

a)

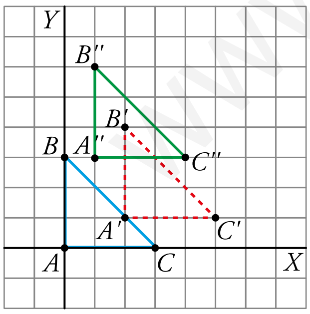


b)



No se obtiene el mismo resultado que en a).

2 **Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo Δ de vértices $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ y $C(3, 0)$. Realiza sobre él una traslación T_1 de vector $\vec{u}(2, 1)$ y luego otra T_2 de vector $\vec{v}(-1, 2)$. ¿Podrías haber realizado solo una traslación? ¿Cuál sería su vector?**



Se podía haber realizado una sola traslación de vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (-1, 2) = (1, 3)$

Página 249

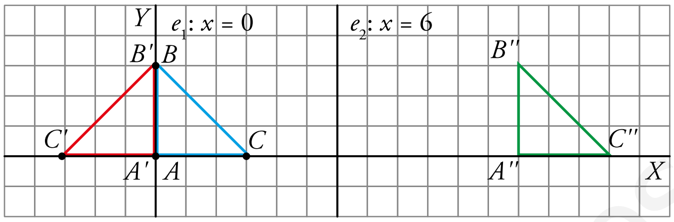
3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio 2 de la página anterior mediante S_1 compuesta con S_2.

b) Transforma Δ mediante S_1 compuesta con la simetría de eje X.

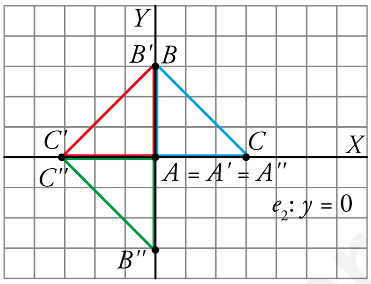
a) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(-3, 0)$.

$A''(12, 0)$; $B''(12, 3)$; $C''(15, 0)$.



b) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(-3, 0)$.

$A''(0, 0)$; $B''(0, -3)$; $C''(-3, 0)$.



4 **Dibuja en unos ejes coordenados un cuadrilátero de vértices $A(1, 3)$, $B(6, 5)$, $C(7, -1)$ y $D(-1, -2)$.**

a) Halla las coordenadas del cuadrilátero transformado mediante la composición de dos simetrías de ejes X e Y.

b) La composición de las dos simetrías corresponde a un giro cuyo centro es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el ángulo de giro?

a) $A(1, 3) \to A'(-1, 3) \to A''(-1, -3)$

$B(6, 5) \to B'(-6, 5) \to B''(-6, -5)$

$C(7, -1) \to C'(-7, -1) \to C''(-7, 1)$

$D(-1, -2) \to D'(1, -2) \to D''(1, 2)$

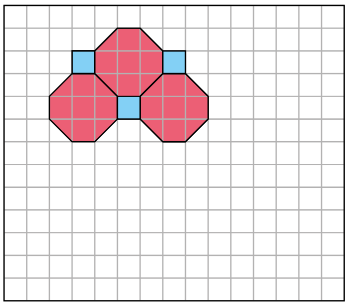
b) El ángulo de giro es 180°.

7 ▶ MOSAICOS, CENEFAS Y ROSETONES

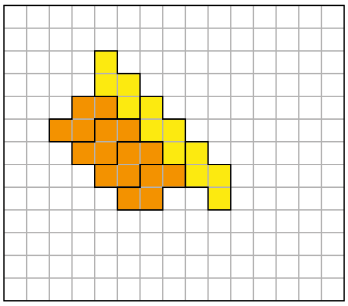
Página 250

1 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:**

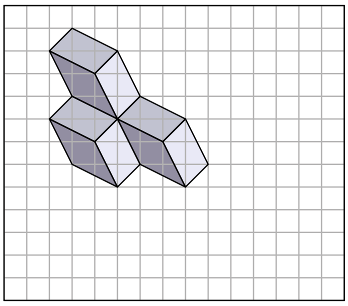
a)



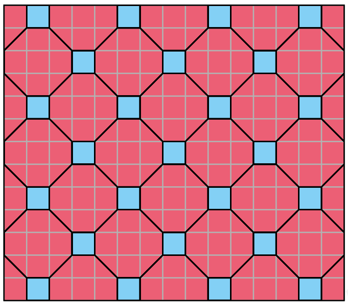
b)



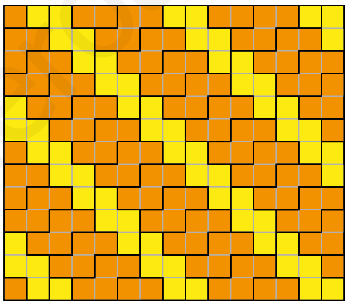
c)



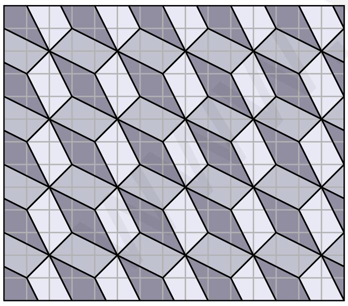
a)



b)

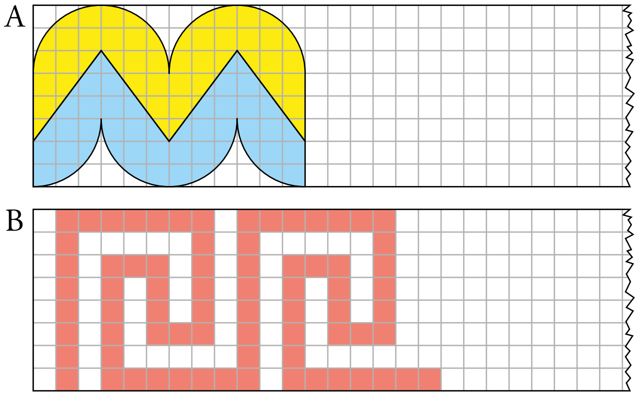


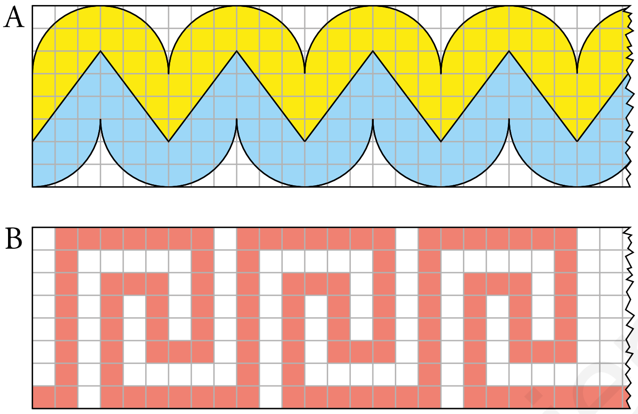
c)



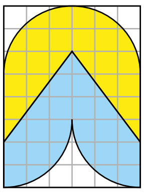
Página 251

2 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?**

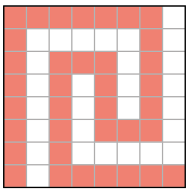




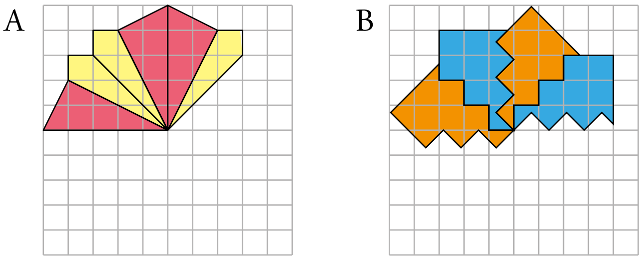
A Motivo mínimo:



B Motivo mínimo:

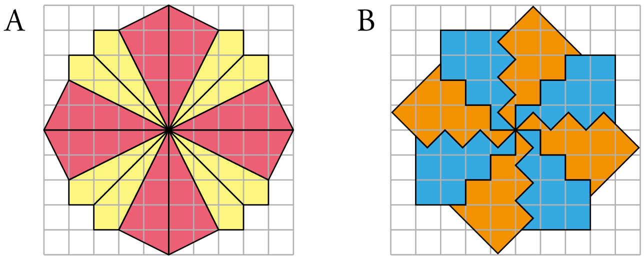


3 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas:**

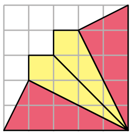


a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

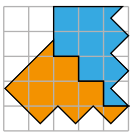
b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?



A. Este rosetón es de orden 4. El motivo mínimo es el siguiente:



B. Este rosetón es de orden 8. El motivo mínimo es el siguiente:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 252

2. Frisos

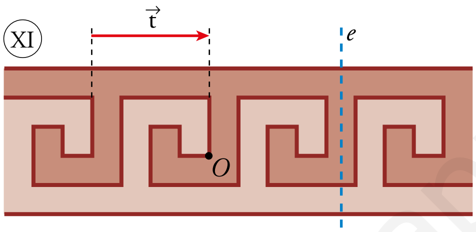
Hazlo tú

- **Encuentra movimientos que dejen invariante la cenefa XI de la página anterior.**

  a) Con color. **b) Sin color.**

  a) Dejan invariante la cenefa, respetando los colores, la traslación de vector $\vec{t}$ y la simetría de eje *e*.

  b) Si no tenemos en cuenta el color, también deja invariante la cenefa el giro de centro *O* y ángulo 180°.



3. Rosetones

Hazlo tú

- **¿Qué movimientos dejan invariante el rosetón XIII de la página anterior?**

  Llamamos *O* al centro del rosetón.

  El giro asociado al rosetón es de centro *O* y $\alpha = 360°: 16 = 22{,}5°$.

  Otros giros de centro *O* y ángulos 2α, 3α, … 15α también dejan invariante la figura. Es decir, *O* es un centro de orden 16.

  Además, tiene 16 ejes de simetría que pasan por *O*.

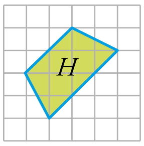
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 253

Practica

Trasluciones. Vectores

1 **a) Representa en papel cuadriculado la figura *H* y trasládala mediante el vector $\vec{t}_1(6, 1)$. Llamamos H_1 a la figura resultante.**

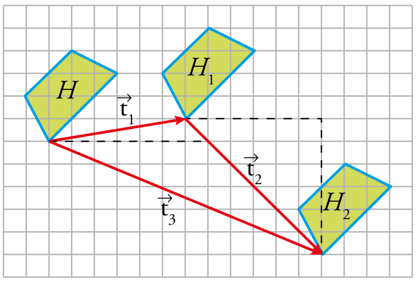


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(3, -4)$.

c) Indica el vector de traslación que permite obtener H_2 a partir de *H*.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para obtener *H*?

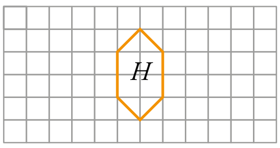
a) y b)



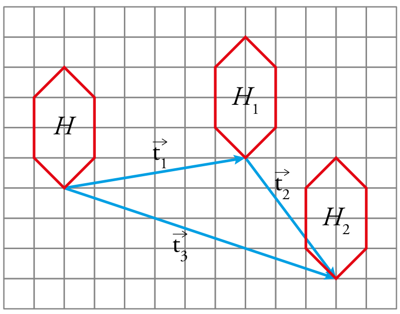
c) El vector es $\vec{t}_3 = (6, 1) + (3, -4) = (9, -3)$, respresentado en la imagen.

d) Es el vector $-\vec{t}_3 = (-9, 3)$.

2 **Responde a los apartados de la actividad anterior con esta otra figura:**



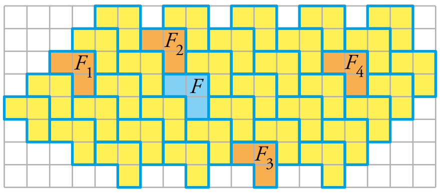
a) y b)



c) El vector es $\vec{t}_3 = (9, -3)$.

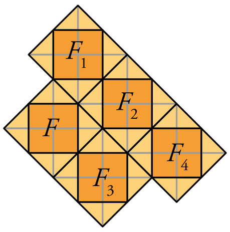
d) El vector $-\vec{t}_3 = (-9, 3)$.

3 **Halla los vectores $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$, $\vec{t_3}$ y $\vec{t_4}$ que nos permiten transformar *F* en cada una de las otras figuras.**



$\vec{t_1} = (-5, 1)$; $\vec{t_2} = (-1, 2)$; $\vec{t_3} = (3, -3)$; $\vec{t_4} = (7, 1)$

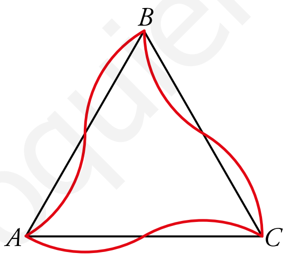
4 **Repite la actividad anterior con estas otras piezas:**

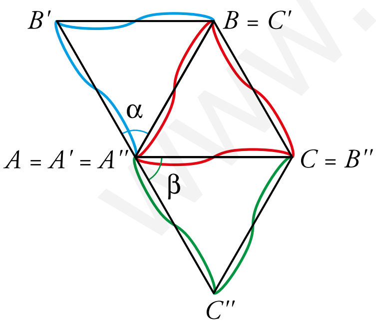


$\vec{t_1} = (1, 3)$; $\vec{t_2} = (3, 1)$; $\vec{t_3} = (2, -2)$; $\vec{t_4} = (5, -1)$

Giros

5 **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro *A* y ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**





6 **Se ha realizado un giro de centro *O* que transforma *A* en *D*.**

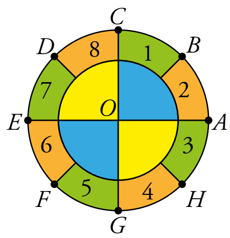
a) Indica en qué puntos se transforman los puntos *E*, *G* y *H*.

b) ¿En qué se convierten los trapecios circulares 1, 3, 6 y 7?

c) ¿Ha cambiado la disposición de colores de la figura original?

d) Define el giro realizado (centro y ángulo) en el caso de que sea positivo y en el que sea negativo.

e) Si nos fijamos en los colores, ¿cuál es el menor ángulo de giro que hace que la figura se quede igual?



a) El punto *E* se transforma en el *H*; el punto *G*, en el *B*; y el *H*, en el *C*.

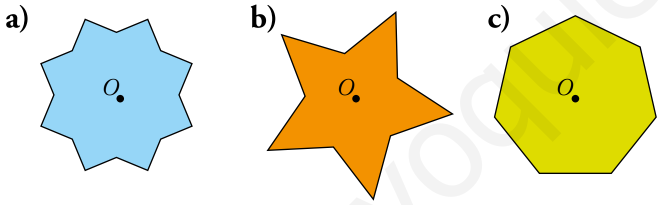
b) El trapecio circular 1 se convierte en el 6; el 3, en el 8; el 6, en el 3; y el 7 en el 4.

c) El color sí cambia.

d) Los giros realizados tienen centro *O* y ángulos 135° y –225°.

e) El menor ángulo de giro para que los colores de la figura no cambien es 90°.

7 **Indica el menor ángulo que se debe girar alrededor de *O* cada una de estas figuras para mantenerse idénticas y halla el orden del centro de giro de *O*.**

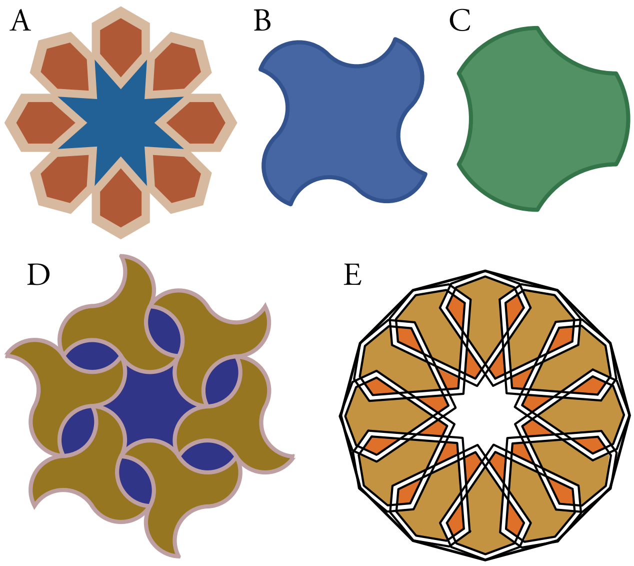


a) El menor ángulo es 45°. El centro es de orden 8.

b) El menor ángulo es 72°. El centro es de orden 5.

c) El menor ángulo es de, aproximadamente, 51,43°. El centro es de orden 7.

8 **a) Indica dónde tiene el centro de giro cada una de las siguientes figuras:**



b) Halla el orden de cada uno de estos centros y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

c) ¿Cuáles tienen, además, centro de simetría?

a) El centro de cada figura es su centro de giro.

b) Todas tienen centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

Los órdenes de giro de cada una y sus ángulos mínimos de coincidencia son:

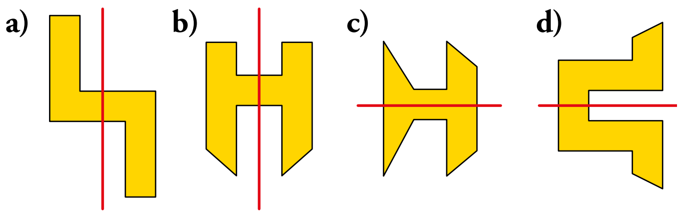
FIGURA	A	B	C	D	E
ORDEN DE GIRO	8	4	3	6	12
ÁNGULO MÍNIMO	45°	90°	120°	60°	30°

c) Todas las figuras tienen centro de simetría excepto la C.

Página 254

Simetrías

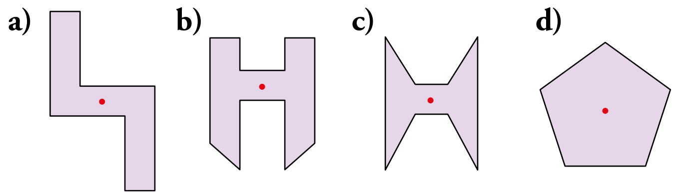
9 **Indica en cada caso si se trata o no de un eje de simetría:**



Son ejes de simetría los de las figuras b), c) y d).

En a) no hay eje de simetría.

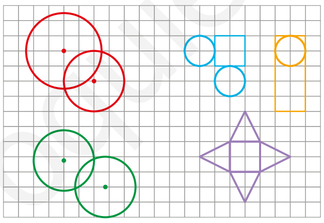
10 **Indica si cada uno de los puntos dibujados sobre las figuras es o no centro de simetría:**

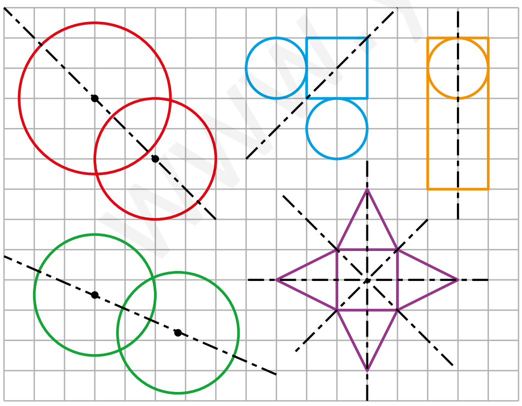


Revisa el margen de la página 244.

Son centros de simetría los de las figuras a) y c).

11 **Copia en tu cuaderno y señala los ejes de simetría de estas figuras:**





12 **Indica cuáles de las figuras de la actividad anterior tienen simetría central y señala su centro.**

Tienen simetría central las figuras d) y e). Sus centros están en el punto de corte de sus ejes de simetría, dibujados en el ejercicio anterior.

13 **Calcula las coordenadas de los vértices de la figura** F **transformada mediante:**

a) La simetría de eje X**.**

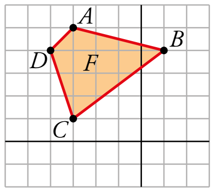
b) La simetría de eje Y**.**

c) La simetría central que tiene por centro el origen de coordenadas.

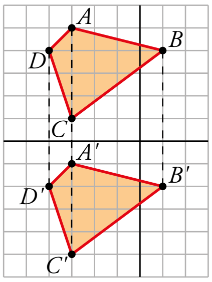
d) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por C **y** B**.**

e) La simetría central que tiene por centro el vértice B**.**

f) ¿Qué puntos o segmentos son invariantes con respecto a las simetrías de los apartados d) y e)?



a)



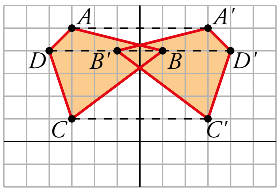
$A' = (-3, -5)$

$B' = (1, -4)$

$C' = (-3, -1)$

$D' = (-4, -4)$

b)



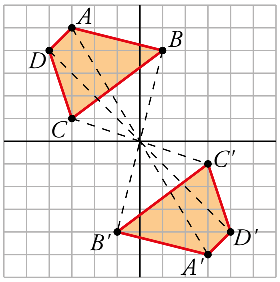
$A' = (3, 5)$

$B' = (-1, 4)$

$C' = (3, 1)$

$D' = (4, 4)$

c)



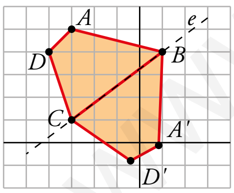
$A' = (3, -5)$

$B' = (-1, -4)$

$C' = (3, -1)$

$D' = (4, -4)$

d)



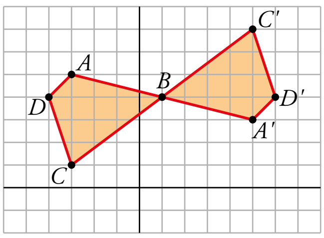
$A' = (0{,}84; -0{,}12)$

$B' = B = (1, 4)$

$C' = C = (-3, 1)$

$D' = (-0{,}4; -0{,}8)$

e)



$A' = (5, 3)$

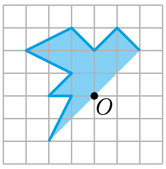
$B' = B = (1, 4)$

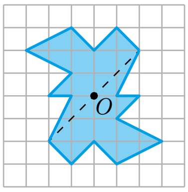
$C' = (5, 7)$

$D' = (6, 4)$

f) Con respecto a la simetría del apartado d), el segmento BC es invariante, y con respecto a la del apartado e), es invariante el punto B.

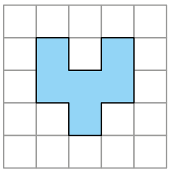
14 **Copia en tu cuaderno y completa la figura de la derecha para que el punto *O* sea el centro de una simetría central.**

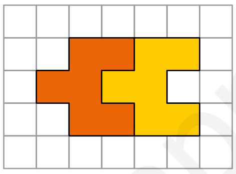


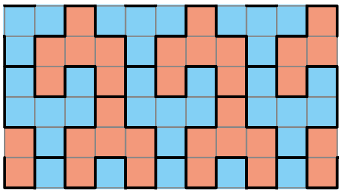


Mosaicos

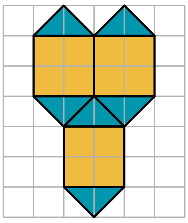
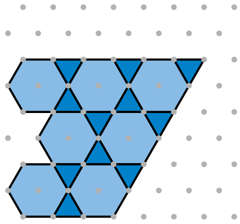
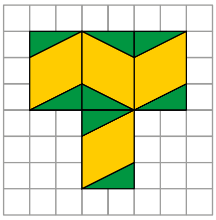
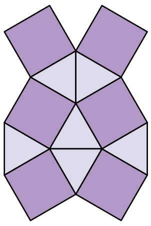
15 **Completa en tu cuaderno el siguiente mosaico a partir de la pieza azul. Busca una forma de engranarla distinta de la de la derecha.**



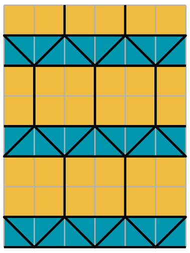
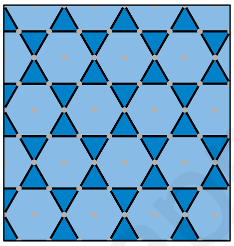
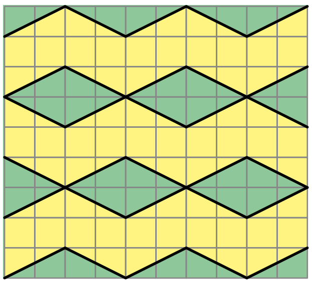
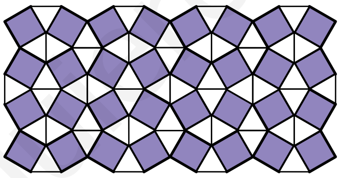




16 **a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:**

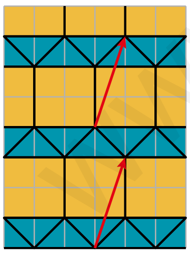
I

II

III

IV


b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

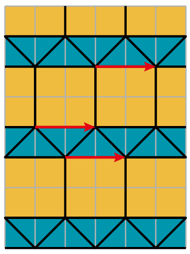
a) I

II

III

IV


b) • En la primera figura podemos encontrar diferentes traslaciones y giros:

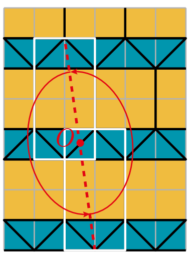
Traslación de vector $\vec{t} = (1, 3)$



Traslación de vector $\vec{t} = (2, 0)$

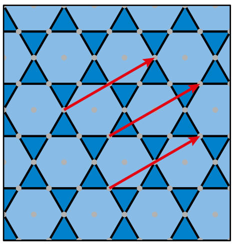


Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$

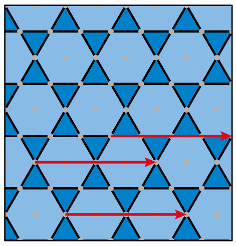


- En la segunda figura encontramos traslaciones y giros:

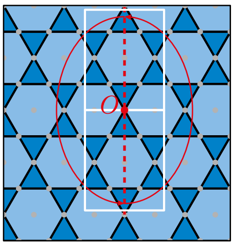
Traslación de vector $\vec{t} = (3, 2)$



Traslación de vector $\vec{t} = (4, 0)$



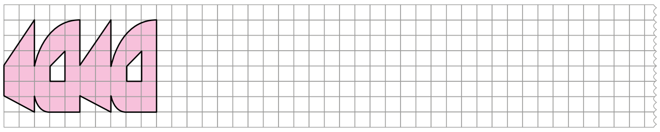
Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$



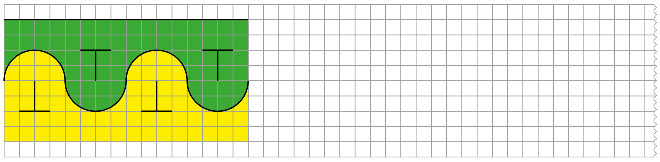
- En la tercera figura hay traslaciones, giros y simetrías.
  - — Vectores de las traslaciones: $\vec{t_1} = (2, 3)$; $\vec{t_2} = (4, 0)$; …
  - — Giros con centro en el centro de los rombos verde oscuro y ángulo $\alpha = 180°$, por ejemplo.
  - — Ejes de simetría verticales y horizontales que se cortan en el centro de los rombos verde oscuro.
- En la cuarta figura hay traslaciones, simetrías y giros.
  - — Traslaciones que llevan, por ejemplo, del vértice inferior de un cuadrado al vértice inferior de otro cuadrado que está en una posición más arriba y desplazado a la derecha.
  - — Giros de 45° con centro en el centro de los cuadrados.
  - — Ejes de simetría verticales y horizontales que coinciden con los lados de los triángulos.

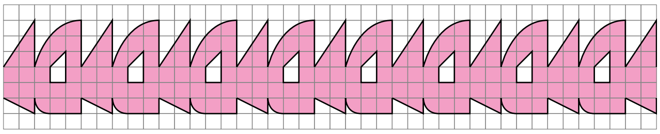
17 **Completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?**

A



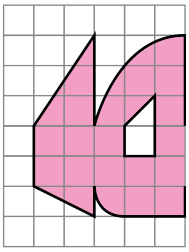
B

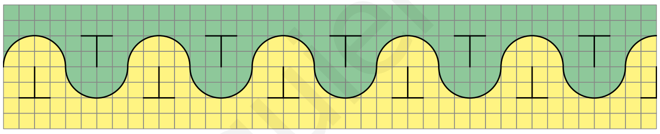




Motivo mínimo

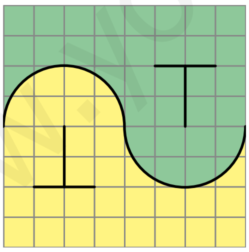
A



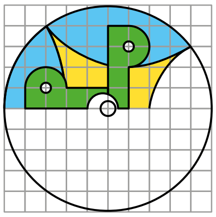


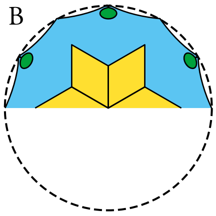
Motivo mínimo

B



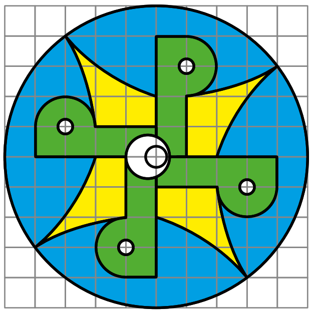
18 **Completa en tu cuaderno estos rosetones:**

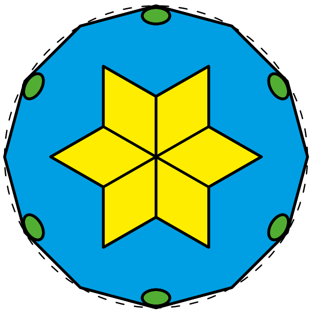
A 

B 

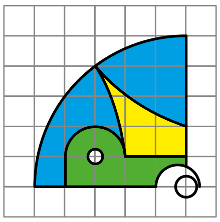
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

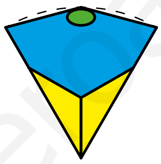
b) ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?





a) A → giro de orden 4. B → giro de orden 6.

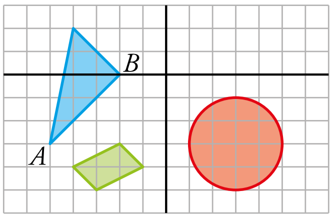
b) A 

B 

Página 255

Resuelve problemas

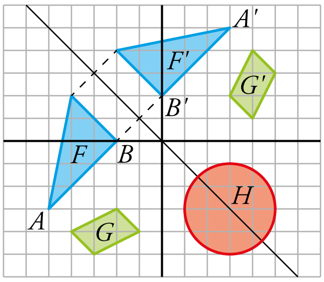
19 **a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$:**



b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?

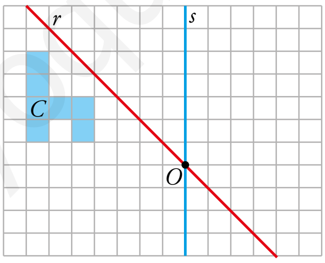
a)



b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, ya que es perpendicular al eje de simetría. Su ecuación es $y = x + 2$.

c) Sí, es invariante el círculo.

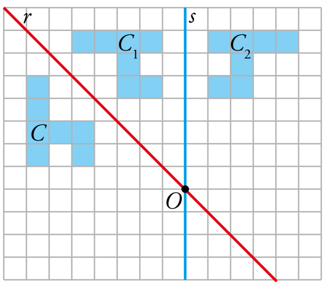
20 **a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.**



b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

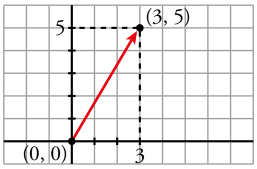
a) y b)



c) El giro equivalente a la composición de las dos simetrías es de centro O y ángulo –90°.

21 **En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).**

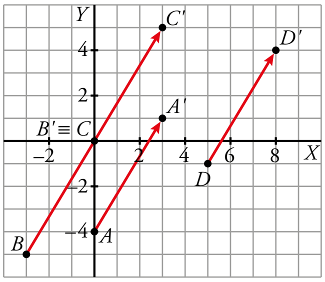
Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.



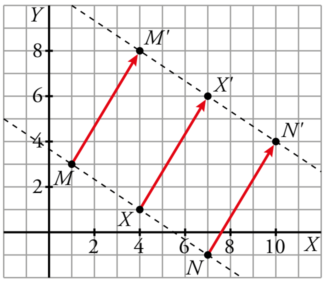
a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

a) Trasladamos cada punto por el vector $\vec{t} = (3,5)$.

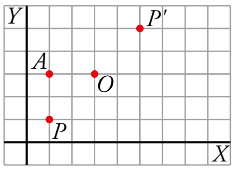


b)



22 **Observa la cuadrícula.**

Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.



a) Identifica otros tres movimientos que transformen P en P'.

b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno?

a) Otros movimientos que convierten P en P' son:

– La simetría central de centro O (mismo movimiento que el giro descrito en el enunciado).

– El giro de centro O y ángulo –180°.

– La traslación de vector $\vec{t} = (4, 4)$.

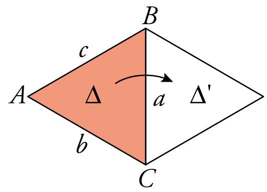
– La simetría axial de eje la recta que pasa por O y es perpendicular a PP'.

b) En la simetría central y los giros, $A' = (5, 3)$.

En la traslación, $A' = (5, 7)$.

En la simetría axial, $A' = (3, 5)$.

23 **Determina cada uno de los tres movimientos que transforma Δ en Δ' y designa en cada caso los vértices y los lados de Δ' teniendo en cuenta de qué vértices de Δ provienen. Por ejemplo:**

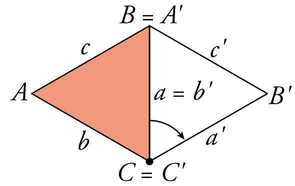


Un giro de centro C y ángulo –60° transforma:

$\boldsymbol{A \to B = A'}$

$\boldsymbol{B \to B'}$

$\boldsymbol{C \to C = C'}$

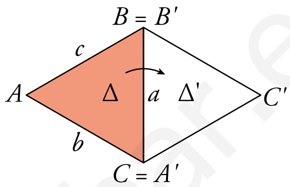


Movimiento 1: giro de centro B y ángulo 60°.

$A \to A' = C$

$B \to B = B'$

$C \to C'$

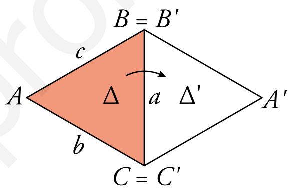


Movimiento 2: simetría axial de eje la recta que contiene al lado a.

$A \to A'$

$B \to B = B'$

$C \to C = C'$

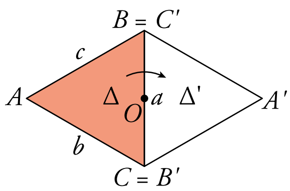


Movimiento 3: simetría central de centro el punto medio del lado a.

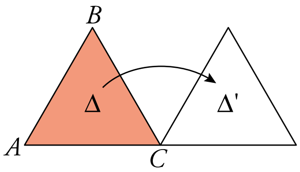
$A \to A'$

$B \to C = B'$

$C \to B = C'$

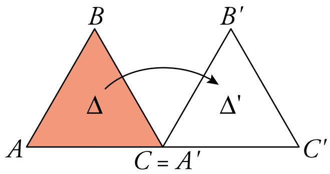


24 Encuentra una traslación, un giro y una simetría que transformen Δ en Δ'. Nombra, en cada caso, los vértices de Δ'.



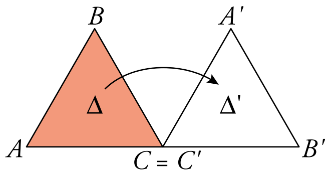
- Traslación de vector $\vec{t} = AC$.

$A \to C = A'$
$B \to B'$
$C \to C'$



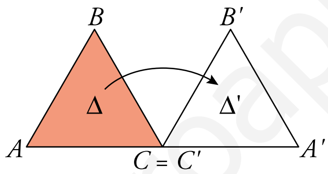
- Giro de centro C y ángulo –120°.

$A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C = C'$

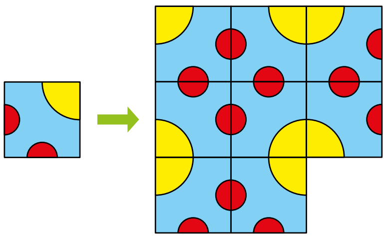


- Simetría de eje la recta que pasa por C y es perpendicular a AC.

$A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C = C'$



25 Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:

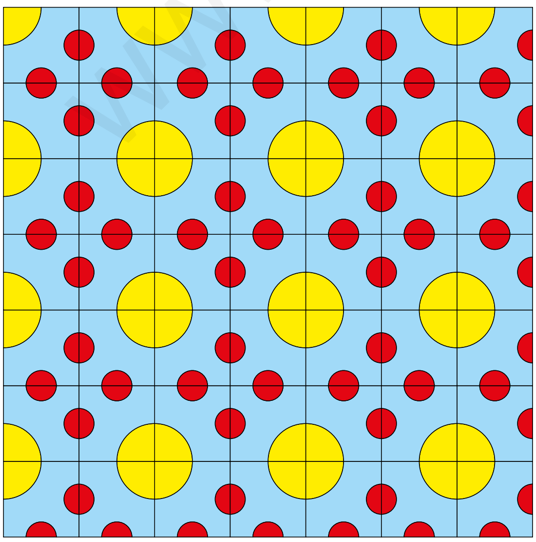


a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.

c) ¿Qué proporción de cada color (superficie) habrá en la pared? Radio del círculo grande: 10 cm; radio del círculo pequeño: 4 cm.

a)

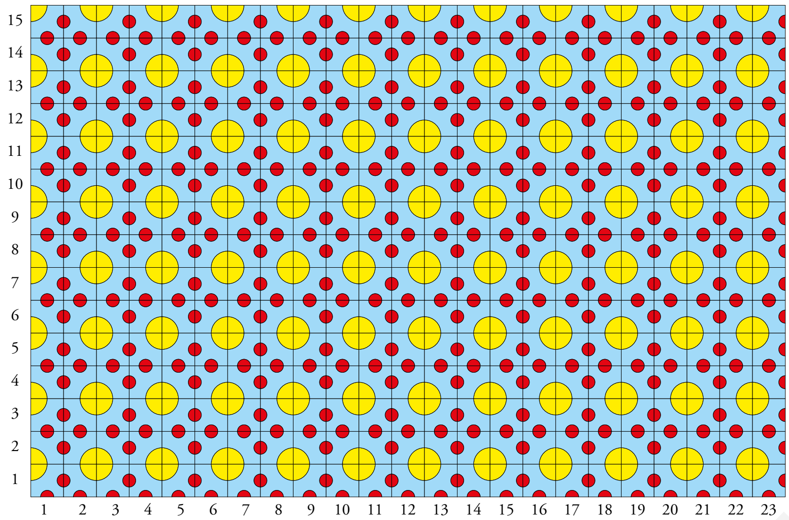


b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan "medios", es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, $11 \cdot 7 = 77$ círculos grandes.

Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

4.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos pequeños completos.

…

Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá $11 \cdot 22 + 12 \cdot 7 = 242 + 84 = 326$ círculos pequeños completos.

c) La proporción de cada color en la pared es igual a la proporción de cada color en un solo azulejo, ya que todos son iguales.

El cuadrado tiene $20 \cdot 20 = 400$ cm^2 de superficie.

El color rojo está en las dos mitades del círculo pequeño; es decir, un círculo pequeño completo (con $\frac{20}{6}$ cm de radio).

Por tanto, el color rojo ocupa una superficie de $\pi \cdot \frac{20}{6} \approx 34{,}91$ cm^2.

El color amarillo ocupa un cuarto de círculo grande (con 10 cm de radio):

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 78{,}54$ cm^2

Con estos datos, ya podemos hallar las proporciones de los colores que hay en cada azulejo y, por tanto, en toda la pared:

ROJO: $\frac{34{,}91}{400} \approx 0{,}0872 = 8{,}72\,\%$

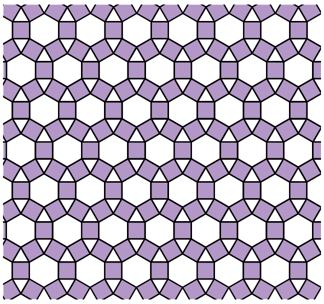
AMARILLO: $\frac{78{,}54}{400} \approx 0{,}1963 = 19{,}63\,\%$

AZUL: $100 - (8{,}72 + 19{,}63) = 71{,}65\,\%$

26 **Encuentra algunos movimientos que dejen invariante este mosaico.**

¿Es regular este mosaico?

¿Es semirregular?



- Respuesta abierta: Por ejemplo:
  - — Todas las traslaciones que van de un centro de un hexágono a otro centro de otro hexáono.
  - — Giros con centro en el centro de algún hexágono y ángulos de 60°, 120° y 180° …
  - — Simetrías con ejees que pasan por los vértices opuestos de cualquiera de los hexágonos.
- Se trata de un mosaico semirregular, pues está formado por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Página 256

27 Las figuras siguientes tienen centro de giro. Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

a) 

b) 

c) 

d) 

Todas tienen centro de giro porque al girarlas alrededor de su centro coinciden consigo mismas un número entero de veces.

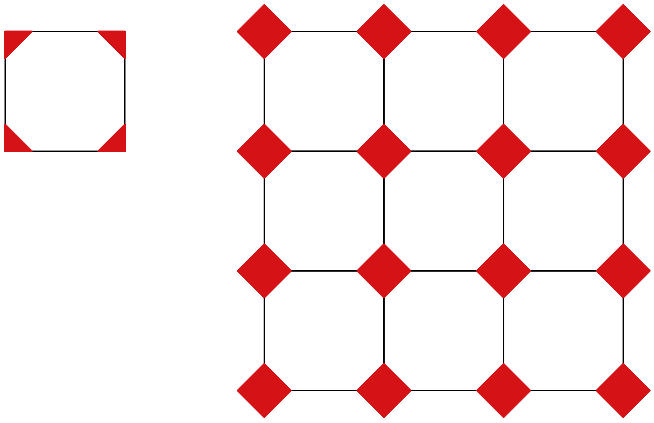
a) Orden de giro $\rightarrow$ 8. Ángulo mínimo $\rightarrow$ 360°: 8 = 45°

b) Orden de giro $\rightarrow$ 6. Ángulo mínimo $\rightarrow$ 360°: 6 = 60°

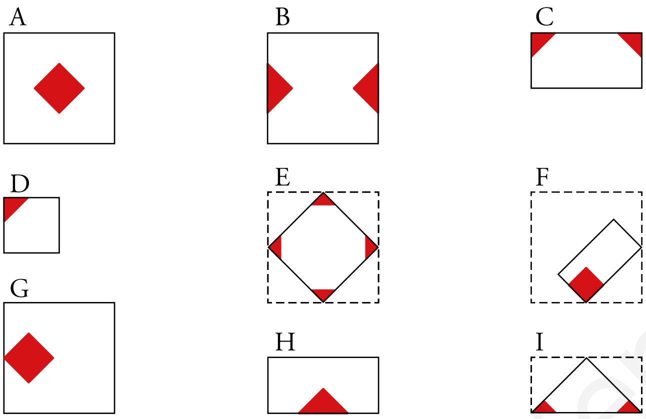
c) Orden de giro $\rightarrow$ 16. Ángulo mínimo $\rightarrow$ 360°: 16 = 22,5°

d) Orden de giro $\rightarrow$ 4. Ángulo mínimo $\rightarrow$ 360°: 4 = 90°

28 **Con la baldosa de la izquierda, se puede hacer un suelo como el de la derecha.**

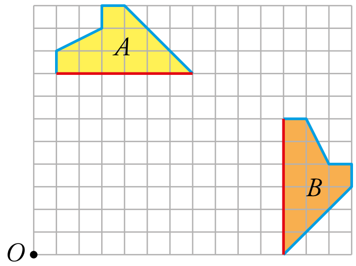


¿Con cuáles de estas otras se puede construir el mismo suelo si lo único que importa es la disposición de los cuadrados rojos, no las líneas entre baldosas?



Se puede construir el mismo suelo con las baldosas A, B, C, D, G, H e I.

29 **Las figuras *A* y *B* son iguales (compruébalo).**



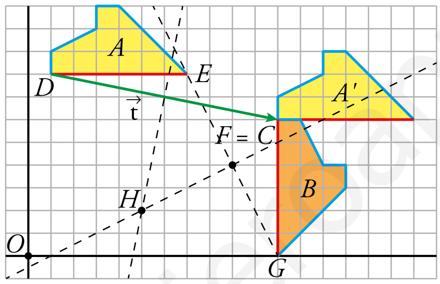
a) Lleva la figura *A* hasta la *B* mediante una traslación seguida de un giro.

b) ¿Cómo encontrarías el centro de un giro mediante el cual se transformara directamente *A* en *B*?

Busca el giro que transforma la base de A (segmento rojo) en la de B.

c) Describe las transformaciones anteriores utilizando unos ejes de coordenadas con centro en *O*.

a) Trasladamos la figura *A* hasta *A'* mediante el vector $\vec{t}(10, -2)$, después giramos *A'* centrando en *C* con un ángulo de –90°.

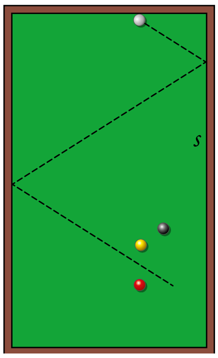


b) Trazamos el segmento *DF* y su mediatriz y el segmento *EG* y su mediatriz. El punto donde se cortan ambas mediatrices, *H*, será el centro del único giro, de ángulo –90°, que convierte la figura *A* en la *B*.

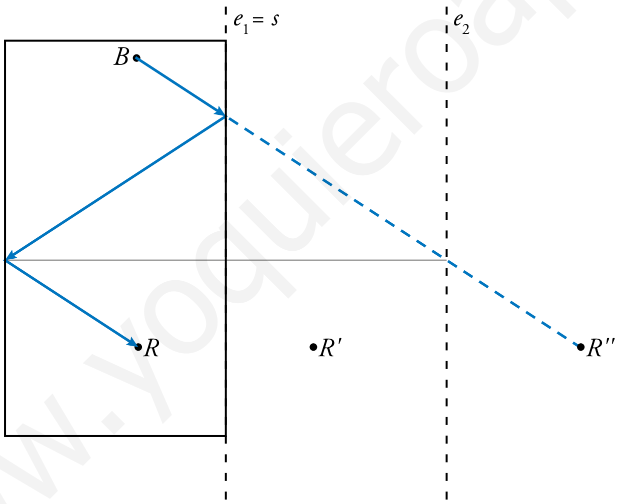
c) La traslación es de vector $\vec{t} = (10, -2)$. El giro es de centro $C = (11, 6)$. El último giro tiene centro en el punto $H = (5, 2)$.

31 **Para golpear la bola roja con la blanca después de un doble rebote, se ha hecho un intento fallido (línea punteada).**

Dibuja en tu cuaderno el punto de la banda *s* de la mesa de billar donde debe golpear la bola blanca para que esta rebote a dos bandas y toque la bola roja.



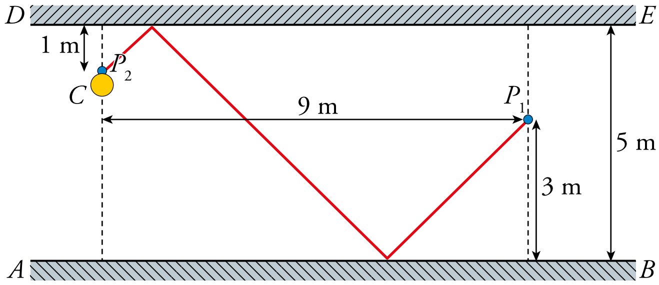
- *B* representa a la bola blanca.
- *R* representa a la bola roja.
- La distancia entre los ejes de simetría $e_1 = S$ y e_2 es la misma que la anchura de la mesa de billar.
- R' y R'' son el resultado de aplicar a R la simetría de eje $e_1 = S$ y, después, al resultado R', la simetría de eje e_2.



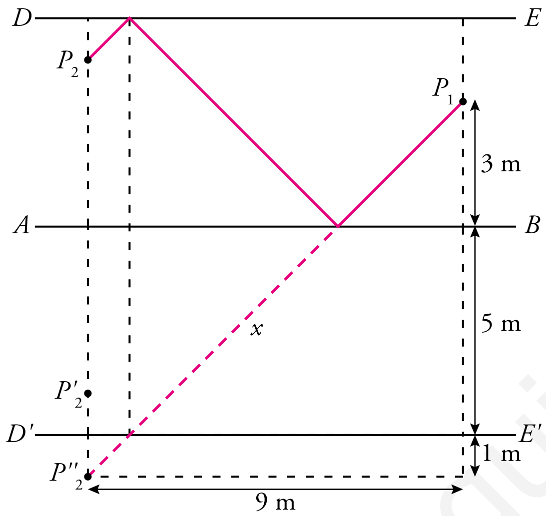
Página 257

Resuelve: un poco más difícil

32 **Dos personas, P_1 y P_2, se encuentran en un pasillo de espejos.**



Teniendo en cuenta la columna *C*, halla la distancia a la que P_1 cree ver a P_2 cuando P_1 mira hacia el espejo *AB*.



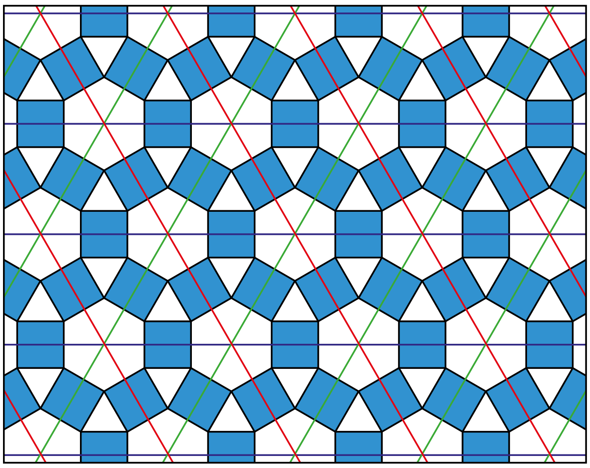
Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 9^2 + (3 + 5 + 1)^2 \rightarrow x^2 = 2 \cdot 81 \text{ m}^2 \rightarrow x = 9 \cdot \sqrt{2} \approx 12{,}73$ m.

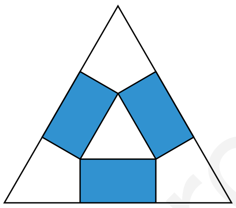
P_1 cree ver a P_2 a unos 12,73 m.

33 **Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza «no se notan» salvo que los hayamos pintado expresamente.**

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:



descubrimos la pieza de aquí abajo como candidata a «motivo mínimo».

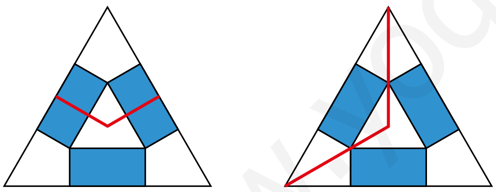


a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.

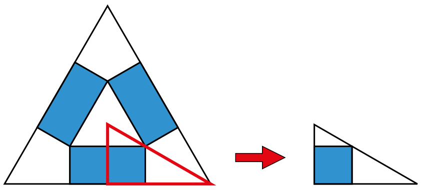
b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?

c) Descubre otro «motivo mínimo» trazando ejes de simetría perpendiculares.

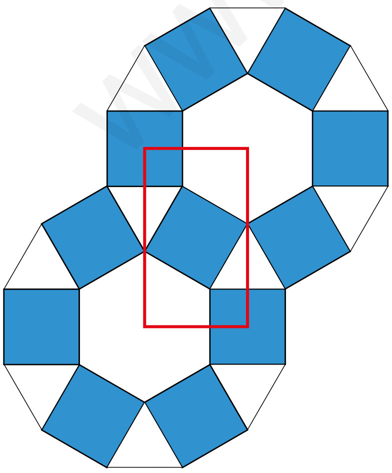
a)



b)



c)



Reflexiona

34 **Si consideramos una transformación que *deja todo como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad (I).**

a) Define un giro que sea equivalente a la transformación identidad.

b) ¿Cuántos giros de esta amplitud son equivalentes a una identidad?

a) Un giro de 360° y cualquier centro es equivalente a una identidad.

b) Tantos como queramos, siempre que sean completos: $2 \cdot 360° = 720°$, $3 \cdot 360 = 1\,080°$ …

35 **Recuerda que dos transformaciones, T y T^{-1}, son recíprocas si al componerlas de las dos formas posibles se obtiene en ambos casos la transformación identidad (I).**

Encuentra la transformación recíproca en cada uno de los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector $\vec{t}(-5, 2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -45°$.

c) Una simetría de eje la recta $y = x$.

a) Una traslación de vector $\vec{t}(5, -2)$.

b) Un giro de centro O y ángulo $\alpha = 45°$.

c) Es recíproca de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

36 **La composición de movimientos no cumple la propiedad conmutativa, es decir, que, en general, el orden en el que se aplican dos movimientos influye en el resultado final. Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.**

Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:

a) Composición de dos traslaciones.

b) Composición de dos giros del mismo centro.

c) Composición de dos simetrías axiales.

d) Composición de una traslación y un giro.

a) Sí, es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.

b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.

c) No es conmutativa.

d) No es conmutativa.

37 **Se dice que una transformación es idempotente (o involutiva) si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba).**

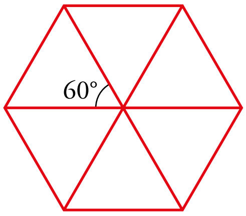
Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.

Por ejemplo:

Un giro de centro cualquiera y ángulo 180°, ya que al componerlo dos veces es equivalente a la identidad.

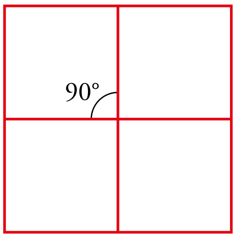
38 **Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello, ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico. Y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.**

- Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



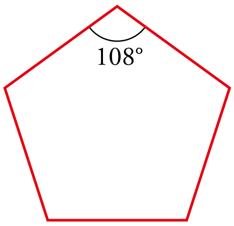
$60° \cdot 6 = 360°$

- Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$90° \cdot 4 = 360°$

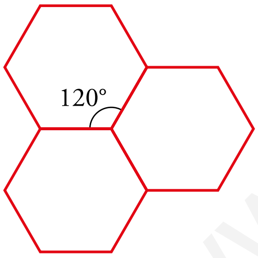
- No podemos encajar los pentágonos regulares:



$180° \cdot 3 = 324°$ → Con tres pentágonos no llega a 360°.

$180° \cdot 4 = 432°$ → Con cuatro pentágonos pasamos de 360°.

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$120° \cdot 3 = 360°$

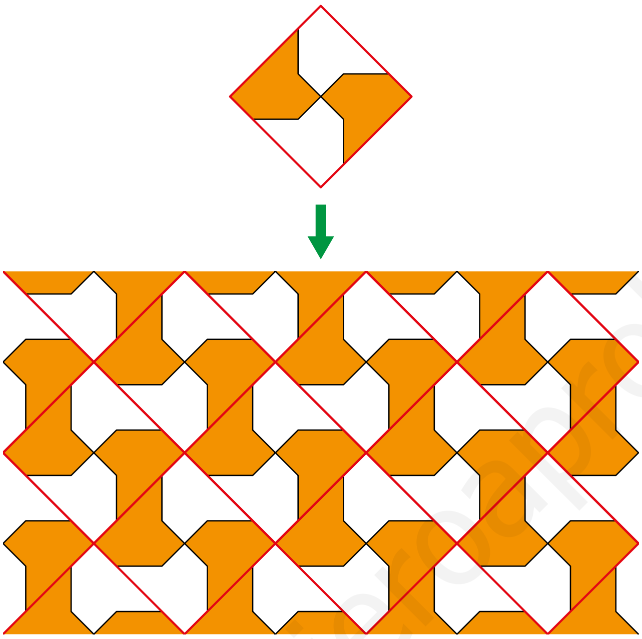
- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayor de 360°; luego no se pueden encajar en el plano.

Página 258

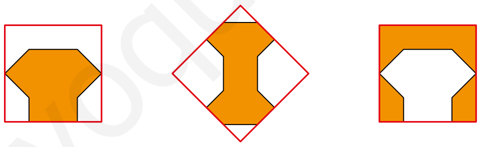
Investiga

Fabricación actual

La industria actual copia los diseños de los mosaicos nazaríes pero en vez de construirlos pieza a pieza, que sería mucho más costosos en dinero y tiempo, los consigue mediante baldosas cuadradas e iguales, con cuya composición se obtiene el dibujo deseado. Observa las ilustraciones de abajo:



- **¿Sabrías decir cuáles de estas baldosas sirven para reproducir el «multihueso»?**



- **¿Te atreves a descubrir alguna por tu cuenta?**

  Todas las baldosas sirven para reproducir el mosaico multihueso.

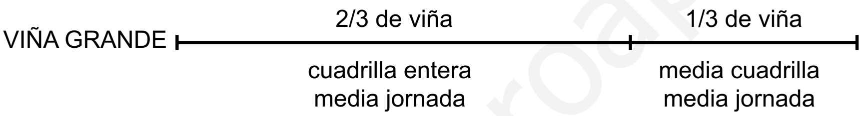
Entrénate resolviendo otros problemas

- **Una cuadrilla de vendimiadores y vendimiadoras trabaja media jornada en una viña. Por la tarde, la mitad pasa a otra viña, que es la mitad de grande que la anterior, y ambos grupos trabajan hasta el final de la jornada.**

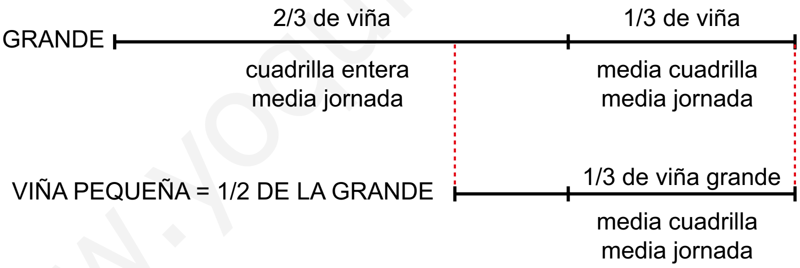
  De esta forma, han terminado de vendimiar la viña grande y queda un trozo de la pequeña, que acaba una sola persona en una jornada completa.

¿Cuántas personas componen la cuadrilla?

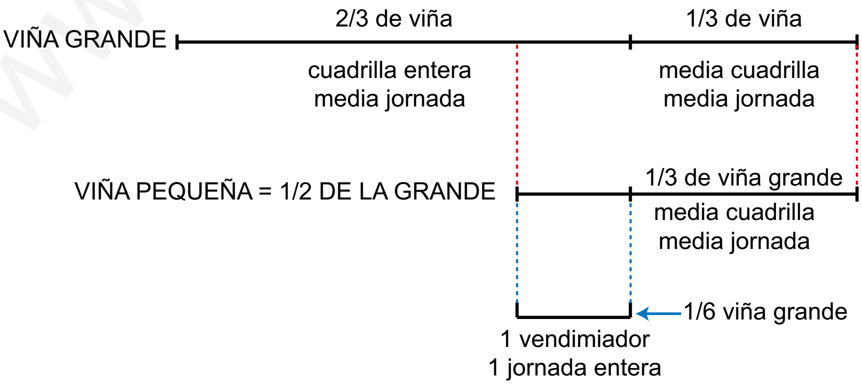
La viña grande se vendimia por la cuadrilla entera durante media jornada y por media cuadrilla otra media jornada. Es decir, por la mañana vendimian dos tercios de la viña grande y, por la tarde, el tercio que queda.



La media cuadrilla que pasa a la pequeña, vendimia en media jornada lo que la otra mitad de la cuadrilla; es decir, lo equivalente a 1/3 de la viña grande. Y la viña pequeña es la mitad de la grande.



Lo que queda, que es equivalente a 1/6 de la grande, lo acaba un jornalero en 8 horas al día siguiente.



Se concluye que cada sexta parte de la grande necesita un vendimiador un día entero. Es decir, 6 vendimiadores para la viña grande.

Lo que vendimian por la tarde de la pequeña es lo equivalente a 1/3 de la grande. Es decir, otros dos vendimiadores.

Por tanto, la cuadrilla está compuesta por 8 personas.

- **a) Tienes cuatro pesas de 1 kg, 2 kg, 4 kg y 8 kg y una báscula de dos platillos. Comprueba que con ellas puedes realizar cualquier pesada de un número entero de kilos entre 1 kg y 15 kg.**

  b) Si añades una pesa de 16 kg, ¿hasta qué pesada puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 21 kg? ¿Y para pesar 29 kg?

  c) ¿Qué pesas más deberías tener para poder pesar, al menos, 120 kg? Con esas pesas, ¿cuál es la mayor pesada que puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 113 kg?

a) Marcamos en esta tabla las pesas que se pueden poner en uno de los platillos para conseguir las distintas pesadas, desde 1 kg hasta 15 kg.

PESO	1 kg	2 kg	4 kg	8 kg
1 kg	×			
2 kg		×		
3 kg	×	×		
4 kg			×	
5 kg	×		×	
6 kg		×	×	
7 kg	×	×	×	
8 kg				×
9 kg	×			×
10 kg		×		×
11 kg	×	×		×
12 kg			×	×
13 kg	×		×	×
14 kg		×	×	×
15 kg	×	×	×	×

b) Añadiendo una pesa de 16 kg se pueden pesar desde 1 kg hasta 15 + 16 = 31 kg.

Para pesar 21 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 4 y 1 kilos:

16 + 4 + 1 = 21.

Para pesar 29 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 8, 4 y 1 kilos:

16 + 8 + 4 + 1 = 29.

c) Después de 16, la siguiente potencia de 2 es 32, y como 31 + 32 = 63, no llegamos a los 120.

La siguiente potencia de 2 es 64, y como 63 + 64 = 127, con esta ya se consigue llegar a los 120.

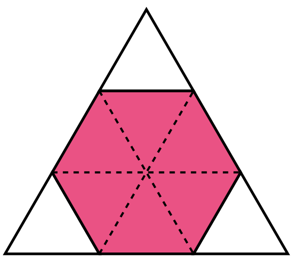
Habría que añadir, por tanto, las pesas de 32 kg y de 64 kg.

Tenemos, pues, las pesas 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64, con las que podríamos pesar hasta 127 kg.

Para pesar 113 kg, habría que poner: 113 = 64 + 32 + 16 + 1

$\boxed{\begin{array}{c}96\\ \text{(faltan 17)}\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c}112\\ \text{(falta 1)}\end{array}}$

- **Cortando las esquinas de un triángulo equilátero se puede obtener un hexágono regular. ¿Cuál será el área de ese hexágono si la del triángulo original era de 90 m²?**

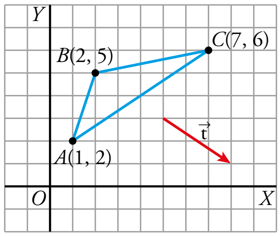


El hexágono ocupa $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ del área del triángulo.

Por tanto, su área es $A = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60 \text{ m}^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del *ABC* mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje *X*.

c) La simetría de eje *Y*.

d) El giro de centro *O* y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto *P*(0, 4) es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje *Y* es una recta doble?

a) $A'(4, 0)$; $B'(5, 3)$; $C'(10, 4)$

b) $A'(1, –2)$; $B'(2, –5)$; $C'(7, –6)$

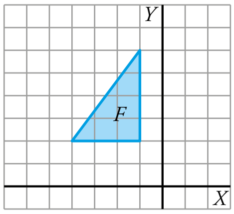
c) $A'(–1, 2)$; $B'(–2, 5)$; $C'(–7, 6)$

d) $A'(2, –1)$; $B'(5, –2)$; $C'(6, –7)$

e) En la simetría de eje *Y* el punto *P*(0, 4) es doble.

f) En las simetrías de eje *X* y de eje *Y*, el eje *Y* es doble

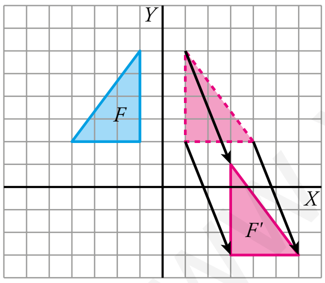
2 **Llamamos S a la simetría de eje *Y*, y T, a la traslación de vector $\vec{t}$ (2, –5).**



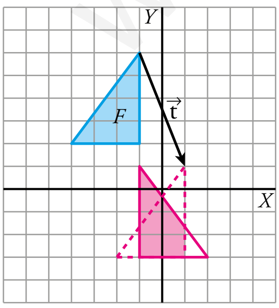
a) Obtén la transformada de la figura *F* mediante la composición de S con T.

b) Obtén la transformada de *F* mediante la composición de T con S.

a)

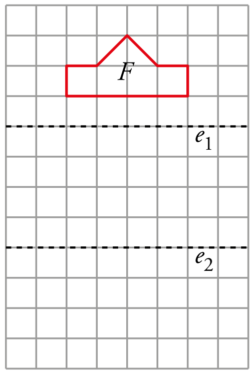


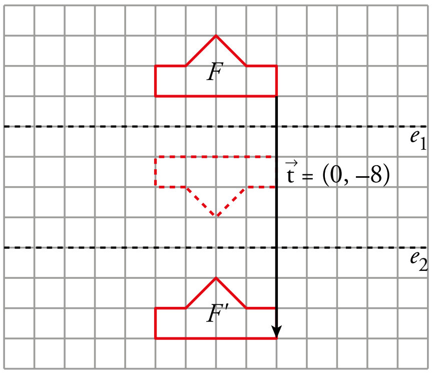
b) La figura coloreada es el resultado de la composición de movimientos.



3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la figura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

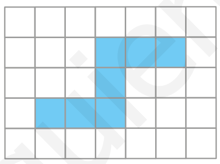
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?





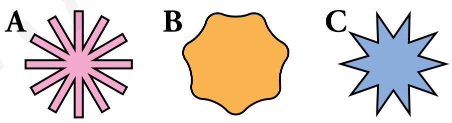
Con una traslación de vector $\vec{t}\,(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4 **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Respuesta abierta.

5 **Dibuja en tu cuaderno los ejes de simetría y los centros de giro de estas figuras.**



Indica el orden del centro de giro de cada una. ¿Cuál es el ángulo mínimo de coincidencia?

A → Tiene 12 ejes de simetría. Todos pasan por el centro de la figura. 6 de ellos pasan por el medio de dos brazos opuestos. Los otros 6 pasan por los vértices donde se unen dos brazos.

El orden del centro de giro es 12, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 12 = 30°.

B → Tiene 7 ejes de simetría. Cada uno de ellos pasa por el centro de la figura y por el punto medio de uno de sus salientes.

El orden del centro de giro es 7, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 7 ≈ 51,43°.

C → Tiene 10 ejes de simetría. 5 de ellos pasan por uno de los puntos de la estrella y por el centro de la figura. Los otros 5 pasan por uno de los vértices donde se juntan 2 brazos de la estrella y por el centro.

El orden del centro de giro es 10, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 10 ≈ 36°.