5 ÁLGEBRA

Página 87

Resuelve

1 **¿Cuál de estas igualdades asocias al enunciado del montón de trigo que aparece en el papiro egipcio? ¿Cuántas *medidas* tiene ese *montón*?**

Ⅰ $x - \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{2}$ Ⅱ $x - \frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{2}$ Ⅲ $\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{2}$

La igualdad II.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 5 \rightarrow \frac{6x - 2x - 3x}{6} = 5 \rightarrow \frac{x}{6} = 5 \rightarrow x = 30$$

El montón tiene 30 medidas.

2 **Completa en tu cuaderno la igualdad que relaciona las áreas de las dos figuras geométricas que tienes en la página anterior: $a^2 - b^2 = \ldots$**

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

3 **Traduce a lenguaje algebraico (al estilo actual) el enunciado del problema de *la cosa*, descrito más arriba. Después, averigua el valor de dicha *cosa*. Si no sabes resolver la ecuación, halla la incógnita tanteando.**

$16x + 35 = 3x \cdot x \rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$

La cosa vale 7.

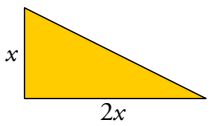
1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Página 88

1 **Describe mediante una expresión algebraica o una ecuación cada uno de los enunciados siguientes:**

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) 

El área de este triángulo es 36 cm^2.

d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

a) $2x - \frac{1}{3}x$

b) $2(x + 3)$

c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$

d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

2 MONOMIOS

Página 89

1 **¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?**

a) $-5xy^2z^3$ **b)** $11xy^2$ **c)** -12

a) Su grado es 6. b) Su grado es 3. c) Su grado es 0.

2 **Efectúa las siguientes sumas de monomios:**

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$ **b)** $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$ **d)** $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$ b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$ d) $yz^3 + 6y^3z$

3 **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ **b)** $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ **d)** $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $-4x^4$ b) $\frac{-2}{15}x^5$

c) $14xy^3$ d) $-15x^3yz^2$

4 **Simplifica cada uno de los siguientes cocientes. ¿Cuál de ellos es monomio?**

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$ **b)** $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2} = \frac{5x^3}{3y}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y} = \frac{5xy}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4} = \frac{\sqrt{3}}{5x^2}$

3 POLINOMIOS

Página 90

1 **Simplifica, cuando sea posible, cada uno de estos polinomios e indica su grado:**

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$ **b)** $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$ **d)** $x - 1 + 3x^2 - 4$

e) $x + x^3 + x^5 - x^3$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

d) $3x^2 + x - 5$. Su grado es 2.

e) $x^5 + x$. Su grado es 5.

2 **Sean** $A = 5x^3 - 2x + 1$, $B = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$, $C = x^3 - 1$ **y** $D = x^4 - x^3 + x^2$.

Realiza las siguientes operaciones:

a) Colocándolos uno encima de otro:

i) $A + B$ **ii)** $A - B$ **iii)** $A + C$ **iv)** $C - D$

b) Agrupando los monomios semejantes:

i) $A + B - C$ **ii)** $A + B + C + D$ **iii)** $A - C + D$

a)

i)
$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x + 1 \\ x^4 - 2x^2 + 2x - 2 \\ \hline x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 1 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x + 1 \\ -x^4 + 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline -x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

iii)
$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x + 1 \\ x^3 - 1 \\ \hline 6x^3 - 2x \end{array}$$

iv)
$$\begin{array}{r} x^3 - 1 \\ -x^4 + x^3 - x^2 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - x^2 - 1 \end{array}$$

b)

i) $5x^3 - 2x + 1 + x^4 - 2x^2 + 2x - 2 - x^3 + 1 = x^4 + 4x^3 - 2x^2$

ii) $5x^3 - 2x + 1 + x^4 - 2x^2 + 2x - 2 + x^3 - 1 + x^4 - x^3 + x^2 = 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2$

iii) $5x^3 - 2x + 1 - x^3 + 1 + x^4 - x^3 + x^2 = x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 2$

Página 91

3 **Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:**

a) $P \cdot Q$ **b) $P \cdot R$** **c) $Q \cdot R$**

a)
$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & 4x^2 & & + & 3 \\ & & & 5x^2 & - 3x & + & 7 \\ \hline & & & 28x^2 & & + & 21 \\ & - & 12x^3 & & - 9x & & \\ 20x^4 & & & + 15x^2 & & & \\ \hline 20x^4 & - & 12x^3 & + 43x^2 & - 9x & + & 21 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrr} & & 4x^2 & & + & 3 \\ & & & 5x & - & 8 \\ \hline & - & 32x^2 & & - & 24 \\ 20x^3 & & & + 15x & & \\ \hline 20x^3 & - & 32x^2 & + 15x & - & 24 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrr} & & 5x^2 & - 3x & + & 7 \\ & & & 5x & - & 8 \\ \hline & - & 40x^2 & + 24x & - & 56 \\ 25x^3 & - & 15x^2 & + 35x & & \\ \hline 25x^3 & - & 55x^2 & + 59x & - & 56 \end{array}$$

4 **Opera y simplifica la expresión resultante.**

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 = 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 3x^5 - 10x^4 + 38x^3 + 3x^2 - 4x + 20$

5 **Desarrolla los siguientes cuadrados:**

a) $(x+4)^2$ **b)** $(2x-5)^2$ **c)** $(1-6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ **e)** $\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(ax+b)^2$

a) $x^2 + 16 + 8x$

b) $4x^2 + 25 - 20x$

c) $1 + 36x^2 - 12x$

d) $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{16}+\frac{3x}{4}=\frac{1}{16}(4x^2+9+12x)$

e) $4x^4+\frac{1}{4}-2x^2=\frac{1}{4}(16x^4+1-8x^2)$

f) $a^2x^2 + b^2 + 2abx$

6 **Efectúa los siguientes productos:**

a) $(x+1)(x-1)$ **b)** $(2x+3)(2x-3)$

c) $\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)$ **d)** $(ax+b)(ax-b)$

a) $x^2 - 1$

b) $4x^2 - 9$

c) $\frac{x^2}{9}-\frac{1}{4}$

d) $a^2x^2 - b^2$

4 IDENTIDADES

Página 92

1 **De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?**

a) $a + a + a = 3a$

b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$

c) $x^2 \cdot x = 27$

d) $a + a + a = 15$

e) $x \cdot x \cdot x = x^3$

f) $a + 5 + a = 2a + 5$

g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$

h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

Son identidades a), b), e), f) y h).

2 **Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:**

a) $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} =$ [?]

b) $5a - 4 + a - \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} =$ [?]

c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b =$ [?]

d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 =$ [?]

a) a^3

b) $5a - 4 + a - a = 5a - 4$

c) $2ab + ac$

d) $1 - b^2 + b^2 + a - 1 = a$

3 **Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:**

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \rightarrow 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \rightarrow x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \rightarrow x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \rightarrow 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \rightarrow 4ab$

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x - 6 = 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) = (x^2 + 6x + 2x + 12) - (x^2 + 5x + 2x + 10) = x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 = (x^2 - 1) - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

Página 93

4 **Extrae factor común en cada expresión:**

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$ **b)** $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$ **d)** $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$ **f)** $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$ **h)** $\frac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \frac{4}{3}(2x^2 + 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$ b) $\frac{1}{3}\left(x^4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$ d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$ f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\frac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)$ h) $\frac{1}{3}(2x^2+1)[(2x^2+1)-4] = \frac{1}{3}(2x^2+1)(2x^2-3)$

5 **Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.**

a) $4x^2 - 25$ **b)** $x^2 + 16 + 8x$ **c)** $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$ **e)** $4x^2 + 25 - 20x$ **f)** $\frac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$ **h)** $\frac{(x^3)^2}{25} + \frac{x^3}{5} + \frac{1}{4}$ **i)** $16x^4 - 9$

j) $\frac{x^6}{100} + \frac{8x^3}{5} + 64$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$ b) $(x + 4)^2$ c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$ e) $(2x - 5)^2$ f) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

g) $(12x^2 - x) \cdot (12x^2 + x)$ h) $\left(\frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$ i) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

j) $\left(\frac{x^3}{10} + 8\right)^2$

6 **Completa estas igualdades para que sean identidades:**

a) $x^2 - \ldots + 1 = (x - \ldots)^2$ **b)** $4x^2 + \ldots + 36 = (\ldots + 6)^2$

c) $9x^2 - \ldots = (3x + \ldots)(\ldots - 5)$ **d)** $\frac{1}{4}x^2 + x + \ldots = (\ldots x + \ldots)^2$

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ b) $4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$

c) $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$ d) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(x + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right)^2$

7 **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$ **b)** $(3x-1)^2-(3x+1)^2$

c) $(x+3)^2-[x^2+(x-3)^2]$

a) $x^2-4-x^2-4=-8$

b) $(9x^2-6x+1)-(9x^2+6x+1)=9x^2-6x+1-9x^2-6x-1=-12x$

c) $(x^2+6x+9)-[x^2+(x^2-6x+9)]=x^2+6x+9-x^2-x^2+6x-9=-x^2+12x$

8 **Asocia cada expresión algebraica de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:**

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2$	$2(x-2)$
$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)$	$3x$
$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)$	$x-1$
$9x^2-18xy^2-6xyz+6x$	$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2=4x^2\left(3x-2x^3+y^2-\frac{1}{3}\right)$

$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)=(x-1)\,[(x+1)+(x-1)-4]=(x-1)(2x-4)$

$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)=2(x-2)\,[3(x-2)-(x+2)+15]=2(x-2)(2x+7)$

$9x^2-18xy^2-6xyz+6x=3x(3x-6y^2-2yz+2)$

9 **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ **por 8** **b)** $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ **por 9**

c) $\frac{(2x-4)^2}{8}-\frac{x(x+1)}{2}-5$ **por 8** **d)** $\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}$ **por 12**

a) $4x+2x+x-6x-2=x-2$

b) $9x+2x-3+3(x-1)-(12x+4)=9x+2x-3+3x-3-12x-4=2x-10$

c) $(2x-4)^2-4x(x+1)-40=(4x^2-16x+16)-4x^2-4x-40=$

$=4x^2-16x+16-4x^2-4x-40=-20x-24$

d) $9(x+2)+6(3x+5)-10(4x+1)+25=9x+18+18x+30-40x-10+25=-13x+63$

5 COCIENTE DE POLINOMIOS

Página 96

1 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$ **b)** $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

c) $(3x^5 - 2x^4 + 4x - 5) : (x^3 - 2x + 1)$ **d)** $(x^4 + 3x^3 + 2) : (x^4 + 3x)$

a)
$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^5 & -7x^4 & & +3x^2 & & -8 & x^2-3x+1 \\
\cline{8-8}
-x^5 & +3x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2-13x-32 \\
\cline{1-3}
 & -4x^4 & -x^3 & +3x^2 & & -8 & \\
 & +4x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -13x^3 & +7x^2 & & -8 & \\
 & & +13x^3 & -39x^2 & +13x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -32x^2 & +13x & -8 & \\
 & & & +32x^2 & -96x & +32 & \\
\cline{4-6}
 & & & & -83x & +24 &
\end{array}$$

Cociente: $x^3 - 4x^2 - 13x - 32$; Resto: $-83x + 24$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +3x^3 & -2x & & 3x^2+2 \\
\cline{5-5}
-6x^4 & & -4x^2 & & 2x^2+x-4/3 \\
\cline{1-3}
 & 3x^3 & -4x^2 & -2x & \\
 & -3x^3 & & -2x & \\
\cline{2-4}
 & & -4x^2 & -4x & \\
 & & +4x^2 & & +8/3 \\
\cline{3-5}
 & & & -4x & +8/3
\end{array}$$

Cociente: $2x^2 + x - \frac{4}{3}$; Resto: $-4x + \frac{8}{3}$

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -2x^4 & & +4x & -5 & x^3-2x+1 \\
\cline{6-6}
-3x^5 & & +6x^3 & -3x^2 & & 3x^3-2x+6 \\
\cline{1-3}
 & -2x^4 & +6x^3 & -3x^2 & +4x-5 & \\
 & 2x^4 & & -4x^2 & +2x & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^3 & -7x^2 & +6x-5 & \\
 & & -6x^3 & & +12x-6 & \\
\cline{3-5}
 & & & -7x^2 & +18x-11 &
\end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 2x + 6$; Resto: $-7x^2 + 18x - 11$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +3x^3 & & +2 & x^4+3x \\
\cline{5-5}
-x^4 & & -3x & & 1 \\
\cline{1-3}
 & 3x^3 & -3x & +2 &
\end{array}$$

Cociente: 1; Resto: $3x^3 - 3x + 2$

2 **Calcula por Ruffini el cociente y el resto de cada una de las siguientes divisiones:**

a) $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x + 1)$ **b)** $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6) : (x - 2)$

c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ **d)** $(x^3 - x^2 + 2x - 8) : (x + 2)$

a)

	3	2	–1	5	–3
–1		–3	1	0	–5
	3	–1	0	5	–8

Cociente: $3x^3 - x^2 + 5$; Resto: -8

b)

	1	–2	2	–1	–6
2		2	0	4	6
	1	0	2	3	0

Cociente: $x^3 + 2x + 3$; Resto: 0

c)

	5	6	–11	13
2		10	32	42
	5	16	21	55

Cociente: $5x^2 + 16 + 21$; Resto: 55

d)

	1	–1	2	–8
–2		–2	6	–16
	1	–3	8	–24

Cociente: $x^2 - 3x + 8$; Resto: -24

3 **Indica si alguno de los polinomios siguientes es divisible por $(x + 1)$ o por $(x - 2)$:**

a) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ **b)** $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

c) $R(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 4$ **d)** $S(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

a)

	1	1	1	1	1
–1		–1	0	–1	0
	1	0	1	0	1

→ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

	1	1	1	1	1
2		2	6	14	30
	1	3	7	15	31

→ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x - 2)$

b)

	1	4	1	–6
–1		–1	–3	2
	1	3	–2	4

→ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

	1	4	1	–6
2		2	12	26
	1	6	13	20

→ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x - 2)$

c)

	1	–2	–2	6	–4
–1		–1	3	–1	–5
	1	–3	1	5	–9

→ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

	1	–2	–2	6	–4
2		2	0	–4	4
	1	0	–2	2	0

→ Es divisible entre $(x - 2)$

d)

	1	–1	–1	–1	–2
–1		–1	2	–1	2
	1	–2	1	–2	0

→ Es divisible entre $(x + 1)$

2		2	0	2
	1	0	1	0

→ Es divisible entre $(x - 2)$

4 **En estos apartados se ha aplicado la regla de Ruffini para realizar divisiones. Indica en cada caso el dividendo, el divisor, el cociente y el resto, y exprésalos de esta forma:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

a)

	1	−1	−2	9	3
−2		−2	6	−8	−2
	1	−3	4	1	1

b)

	2	0	0	−2	1
1		2	2	2	0
	2	2	2	0	1

c)

	1	−2	0	−9
3		3	3	9
	1	1	3	0

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x + 3$

$Q(x) = x + 2$

$C(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

$R(x) = 1$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x + 3}{x + 2} = (x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + \frac{1}{x + 2}$$

b) $P(x) = 2x^4 - 2x + 1$

$Q(x) = x - 1$

$C(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x$

$R(x) = 1$

$$\frac{2x^4 - 2x + 1}{x - 1} = (2x^3 + 2x^2 + 2x) + \frac{1}{x - 1}$$

c) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

$Q(x) = x - 3$

$C(x) = x^2 + x + 3$

$R(x) = 0$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 9}{x - 3} = x^2 + x + 3$$

6 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Página 97

1 **Utiliza los productos notables y la extracción de factor común para factorizar estos polinomios:**

a) $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x$

b) $P(x) = 4x^4 + 6x^2$

c) $P(x) = 4x^2 - 24x + 36$

d) $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$

a) $3x^3 - 6x^2 + 12x = 3x(x^2 - 2x + 4)$

b) $4x^4 + 6x^2 = 2x^2(2x^2 + 3)$

c) $4x^2 - 24x + 36 = 4(x^2 - 6x + 9) = 4(x - 3)^2 = 4(x - 3)(x - 3)$

d) $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

2 **Transforma los siguientes polinomios en producto de factores. Ayúdate de la regla de Ruffini:**

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

b) $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ **(extrae factor común** x**)**

c) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$

d) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

a)

	1	4	−11	−30	
3		3	21	30	
	1	7	10	0	→ $(x - 3)$ es factor
−5		−5	−10		
	1	2	0		→ $(x + 5)$ es factor

$P(x) = (x - 3)(x + 5)(x + 2)$

b) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$

	1	−1	−4	4	
1		1	0	−4	
	1	0	−4	0	→ $(x - 1)$ es factor
2		2	4		
	1	2	0		→ $(x - 2)$ es factor

$P(x) = x(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

c)

	1	−3	−15	19	30	
2		2	−2	−34	−30	
	1	−1	−17	−15	0	→ $(x - 2)$ es factor
−3		−3	12	15		
	1	−4	−5	0		→ $(x + 3)$ es factor
−1		−1	5			
	1	−5	0			→ $(x + 1)$ es factor

$P(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 1)(x - 5)$

d)

	1	1	−1	1	−2	
1		1	2	1	2	
	1	2	1	2	0	→ $(x - 1)$ es factor
−2		−2	0	−2		
	1	0	1	0		→ $(x + 2)$ es factor

$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$

7 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Página 99

1 **Simplifica las fracciones siguientes:**

a) $\dfrac{5x^2}{5x^2(x-1)}$

b) $\dfrac{5(x-1)^2}{10(x-1)}$

c) $\dfrac{5(x+2)-(x+2)}{2(x+2)}$

d) $\dfrac{2x^2(x+3)}{4x(x+3)^2}$

a) $\dfrac{1}{(x-1)}$

b) $\dfrac{5(x-1)(x-1)}{5\cdot 2(x-1)} = \dfrac{(x-1)}{2}$

c) $\dfrac{(x+2)(5-1)}{2(x+2)} = \dfrac{4}{2} = 2$

d) $\dfrac{2\cdot x\cdot x(x+3)}{2\cdot 2\cdot x(x+3)(x+3)} = \dfrac{x}{2(x+3)}$

2 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{x-2}{x}$

b) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)^2}-\dfrac{2}{x}$

c) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3x}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{1}{x-2}$

a) $\dfrac{4}{2x}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{2(x-2)}{2x} = \dfrac{7+2x-4}{2x} = \dfrac{2x+3}{2x}$

b) $\dfrac{3x}{x(x+1)}+\dfrac{2}{x(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{x}{x(x+1)}$

c) $\dfrac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{3x}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$

3 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} : (x+1)$

b) $6x^2 \cdot \dfrac{x-3}{x^3}$

c) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{4x^2}{2(x-1)}$

d) $\dfrac{x+5}{10} \cdot \dfrac{5}{(x+5)^2}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} : \dfrac{18(x-1)}{3x}$

f) $\dfrac{2x^2}{3x} \cdot \dfrac{6x}{4x^3}$

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{6x^2(x-3)}{x^3} = \dfrac{6(x-3)}{x} = \dfrac{6x-18}{x}$

c) $\dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{2(x-1)}{(2x)^2} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{5(x+5)}{10(x+5)^2} = \dfrac{1}{2(x+5)}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} = \dfrac{3x}{18(x-1)} = \dfrac{9x}{8x^2} = \dfrac{1}{2x}$

f) $\dfrac{12x^3}{12x^4} = \dfrac{1}{x}$

4 **Ten en cuenta las identidades notables antes de operar y simplificar.**

a) $\dfrac{x^2-1}{x} : (x+1)$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x} : \dfrac{x-1}{x}$

d) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x} : (x+1) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x-1)}{x}$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = (x-2) \cdot \dfrac{1}{(x-2)} = 1$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x} : \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \cdot \dfrac{x}{x-1} = x-1$

d) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} \cdot \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3}{x}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 100

1. Expresiones algebraicas

Hazlo tú

- **Expresa en lenguaje algebraico la siguiente afirmación: «La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm^2».**

$x \rightarrow$ Altura $\rightarrow (x + 5)(x - 2) = 60$

2. Utilización de identidades

Hazlo tú

- **Simplifica a) y transforma en producto b).**

a) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{3x^3 - 15x^2}$ **b)** $(x - 1) \cdot x^2 - (x - 1) \cdot 4$

a) $\dfrac{(x-5)^2}{3x^2(x-5)} = \dfrac{x-5}{3x^2}$ b) $(x - 1)(x^2 - 4)$

3. Transforman en producto

Hazlo tú

- **Transforma en producto.**

a) $180x^3 - 80x$ **b)** $x^3 - 3x - 2$

a) $20x(9x^2 - 4) = 20x(3x + 2)(3x - 2)$

b)

	1		−3	−2	
2		2	4	2	
	1	2	1	0	$\rightarrow (x - 2)$
−1		−1	−1		
	1	1	0		$\rightarrow (x + 1)$

$(x - 2)(x + 1)(x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 101

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1 Expresa en lenguaje algebraico utilizando una sola incógnita.

a) El doble de un número más su cuadrado.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad de un número aumentado en 3.

d) Un múltiplo de 3 menos 7.

e) El precio de una raqueta después de aplicarle una rebaja del 20 %.

f) El precio de un libro después de cargarle un 4 % de IVA.

a) $2x + x^2$ b) $x(x + 1)$ c) $\frac{(x + 3)}{2}$

d) $3x - 7$ e) $0{,}8x$ f) $1{,}04x$

2 Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La suma de las edades de una madre y su hijo hace 5 años.

d) La edad de Andrea, dentro de 7 años, será el doble que la que tenga Lucía.

e) En una empresa se han envasado 1 500 litros de aceite en garrafas de dos tamaños: unas de 2,5 litros y otras de 5 litros.

f) En un test de matemáticas te dan 4 puntos por cada acierto y te restan 1 punto por cada error. Luis obtuvo 60 puntos.

g) El cubo de la diferencia de dos números es 8.

a) $x + \frac{y^2}{2}$ b) $(x - y)^2$ c) $(x - 5) + (y - 5)$

d) Edad de Andrea $\rightarrow x$
Edad de Lucía $\rightarrow y$
$\Big\rangle$ $x + 7 = 2(y + 7)$

e) $x \rightarrow$ N.º de garrafas de 2,5 litros
$y \rightarrow$ N.º de garrafas de 5 litros
$\Big\rangle$ $2{,}5x + 5y = 1\,500$

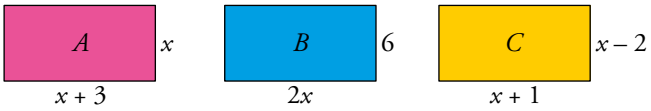
f) $x \rightarrow$ Aciertos
$y \rightarrow$ Errores
$\Big\rangle$ $4 \cdot x + 1 \cdot y = 60$

g) $(x - y)^3 = 8$

3 **Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C que tienes debajo:**

a) $12x$ **b)** $4x - 2$ **c)** $4x + 6$

d) $4x + 12$ **e)** $x^2 + 3x$ **f)** $x^2 - x - 2$



a) $12x$ es el área de B

b) $4x - 2$ es el perímetro de C.

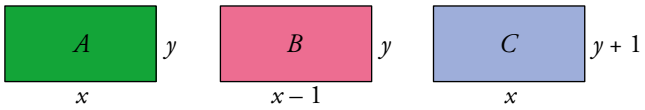
c) $4x + 6$ es el perímetro de A.

d) $4x + 12$ es el perímetro de B.

e) $x^2 + 3x$ es el área de A.

f) $x^2 - x - 2$ es el área de C.

4 **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



a) A $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$

b) B $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$

c) C $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$

Monomios y polinomios

5 **En cada uno de los siguientes monomios, indica el coeficiente, el grado y su valor numérico para $x = -2$ e $y = 1/3$. ¿Cuáles son semejantes?**

a) $-5xy$ **b)** $(-7x)^3$ **c)** $8x$ **d)** $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{4}{5}x^3$ **g)** $\frac{-3y^2x^2}{5}$ **h)** $\frac{1}{2}x$

a) Coeficiente $\rightarrow -5$
Grado $\rightarrow 2$
Valor numérico $\rightarrow \frac{10}{3}$

b) Coeficiente $\rightarrow -343$
Grado $\rightarrow 3$
Valor numérico $\rightarrow -8$

c) Coeficiente $\rightarrow 8$
Grado $\rightarrow 1$
Valor numérico $\rightarrow -16$

d) Coeficiente $\rightarrow 1$
Grado $\rightarrow 4$
Valor numérico $\rightarrow \frac{4}{9}$

e) Coeficiente $\rightarrow \frac{2}{3}$
Grado $\rightarrow 0$
Valor numérico $\rightarrow \frac{2}{3}$

f) Coeficiente $\rightarrow \frac{4}{5}$
Grado $\rightarrow 3$
Valor numérico $\rightarrow -\frac{32}{5}$

g) Coeficiente $\rightarrow -\frac{3}{5}$
Grado $\rightarrow 4$
Valor numérico $\rightarrow -\frac{4}{15}$

g) Coeficiente $\rightarrow \frac{1}{2}$
Grado $\rightarrow 1$
Valor numérico $\rightarrow -1$

6 **Simplifica estos polinomios:**

a) $\frac{5}{2}x - x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$ **b)** $2x - 7y - 3x + 6y + x$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ b) $-y$ c) $x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

7 **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $(6x^2)(-3x)$ **b)** $(2xy^2)(4x^2y)$ **c)** $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2\,(-3x) = -18x^3$ b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

8 **Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:**

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$ **b)** $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$

$= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2\,(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$

$= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow$ Grado 3.

9 **Considera estos polinomios:**

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$ $C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x =$

$= 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$

$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$

$= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$

10 **Opera y simplifica.**

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

d) $(x^3 - 13x + 2) \cdot (x^2 - 1)$

e) $(-x^2 + 2) \cdot (x^3 - 14x^2)$

f) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 2) \cdot (4x - 1)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x = -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 = 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

d) $(x^3 - 13x + 2)(x^2 - 1) = x^5 - x^3 - 13x^3 + 13x + 2x^2 - 2 = x^5 - 14x^3 + 2x^2 + 13x - 2$

e) $(-x^2 + 2)(x^3 - 14x^2) = -x^5 + 14x^4 + 2x^3 - 28x^2$

f) $(2x^2 + x - 1)(4x - 1) = 8x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

11 **Piensa y sustituye en tu cuaderno los huecos por los números que faltan.**

$$(2x^2 - \square x) \cdot (\square x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$$

$(2x^2 - 3x) \cdot (5x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$

Página 102

12 **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $6\left(\frac{5x-4}{6}+\frac{2x-3}{2}-\frac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\frac{x+6}{3}-\frac{x+1}{2}+\frac{3x-1}{4}\right)$

c) $20\left[\frac{2(x-1)}{10}-\frac{x(x+1)}{5}+\frac{1}{4}\right]$

a) $6\left(\frac{5x-4}{6}+\frac{2x-3}{2}-\frac{x-1}{3}\right)=5x-4+3(2x-3)-2(x-1)=$

$=5x-4+6x-9-2x+1=9x-12$

b) $12\left(\frac{x+6}{3}-\frac{x+1}{2}+\frac{3x-1}{4}\right)=4(x+6)-6(x+1)+3(3x-1)=$

$=4x+24-6x+6+9x-3=7x+15$

c) $20\left[\frac{2(x-1)}{10}-\frac{x(x+1)}{5}+\frac{1}{4}\right]=4(x-1)-4x(x+1)+5=4x-4-4x^2-4x+5=-4x^2+1$

13 **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:**

a) $\frac{3+x}{8}-\frac{5-x}{6}-\frac{x+1}{12}$

b) $\frac{3}{4}(x-1)-\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{6}$

c) $\frac{3x-3}{5}-\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}$

a) $\frac{3+x}{8}-\frac{5-x}{6}-\frac{x+1}{12}=24\left(\frac{3+x}{8}-\frac{5-x}{6}-\frac{x+1}{12}\right)=3(3+x)-4(5-x)-2(x+1)=$

$=9+3x-20+4x-2x-2=5x-13$

b) $\frac{3}{4}(x-1)-\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{6}=12\left(\frac{3}{4}(x-1)-\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{6}\right)=$

$=3\cdot 3(x-1)-4(x+1)+2=9x-9-4x-4+2=5x-11$

c) $\frac{3x-3}{5}-\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}=30\left[\frac{3x-3}{5}-\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}\right]=6(3x-3)-10(x+1)+15=$

$=18x-18-10x-10+15=8x-13$

Identidades notables. Factor común

14 **Desarrolla estas expresiones:**

a) $(x+6)^2$ **b)** $(7-x)^2$ **c)** $(3x-2)^2$

d) $(5x+9)^2$ **e)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(x-2y)^2$

g) $\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}y\right)^2$ **h)** $(x^2-2x)^2$ **i)** $(2x^2-3y^2)^2$

a) $(x+6)^2 = x^2+36+12x$

b) $(7-x)^2 = 49+x^2-14x$

c) $(3x-2)^2 = 9x^2+4-12x$

d) $25x^2+90x+81$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+\frac{1}{4}+x$

f) $(x-2y)^2 = x^2+4y^2-4xy$

g) $\frac{4}{25}x^2-2\left(\frac{2}{5}x\cdot\frac{1}{3}y\right)+\frac{1}{9}y^2 = \frac{4}{25}x^2-2\left(\frac{2}{15}xy\right)+\frac{1}{9}y^2 = \frac{4}{25}x^2-\frac{4}{15}xy+\frac{1}{9}y^2$

h) $x^4-4x^3+4x^2$

i) $4x^4-12x^2y^2+9y^4$

15 **Expresa como diferencia de cuadrados.**

a) $(x+7)(x-7)$ **b)** $(3+x)(3-x)$ **c)** $(3+4x)(3-4x)$

d) $(x^2+1)(x^2-1)$ **e)** $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ **f)** $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$

a) $(x+7)(x-7) = x^2-49$

b) $(3+x)(3-x) = 9-x^2$

c) $(3+4x)(3-4x) = 9-16x^2$

d) $(x^2+1)(x^2-1) = x^4-1$

e) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{4}x^2-1$

f) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$

16 **Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:**

a) $x^2+\ldots+4x$ **b)** $x^2+\ldots-10x$

c) $x^2+9+\ldots$ **d)** $x^2+16-\ldots$

e) $4x^2+1+\ldots$ **f)** $9x^2+\ldots+12x$

g) $25x^2+y^2-\ldots$ **h)** $x^2+\ldots+x$

a) x^2+4+4x

b) $x^2+25-10x$

c) x^2+9+6x

d) $x^2+16-8x$

e) $4x^2+1+4x$

f) $9x^2+4+12x$

g) $25x^2+y^2-10xy$

h) $x^2+\frac{1}{4}+x$

17 **Extrae factor común.**

a) $12x^3-8x^2-4x$ **b)** $-3x^3+x-x^2$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2$ **d)** $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x$

a) $12x^3-8x^2-4x = 4x(3x^2-2x-1)$

b) $-3x^3+x-x^2 = x(-3x^2+1-x)$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2 = xy(2y-4x+xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x+x^2-5)$

18 **Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.**

• $x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2$

a) $x^2 + 49 - 14x$ **b)** $x^2 + 1 - 2x$

c) $4x^2 + 1 + 4x$ **d)** $x^2 + 12x + 36$

e) $25x^2 + 49 + 70x$ **f)** $100x^2 - 60x + 9$

a) $x^2 + 49 - 14x = x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1^2 - 2x = (x - 1)^2$

c) $4x^2 + 1 + 4x = (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (x + 6)^2$

e) $(5x)^2 + (7)^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5x = (5x + 7)^2$

f) $(10x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10x + (3)^2 = (10x - 3)^2$

19 **Reconoce las identidades notables y transfórmalas en productos.**

a) $49x^2 - 16$ **b)** $4x^2 - 49$

c) $x^2 - 18x + 81$ **d)** $121 - 100x^2$

e) $9x^2 + 12x + 4$ **f)** $9x^2 - 24x + 16$

g) $25 - 100y^2$ **h)** $4x^2 + 16x + 16$

i) $36x^2 - 1$ **j)** $16x^2 + 25 - 40x$

a) $(7x)^2 + (4) = (7x + 4)(7x - 4)$

b) $(2x)^2 - (7)^2 = (2x - 7)(2x + 7)$

c) $x^2 - 2 \cdot 9 \cdot x + (9)^2 = (x - 9)^2$

d) $(11) - (10x)^2 = (11 - 10x)(11 + 10x)$

e) $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3x + (2)^2 = (3x + 2)^2$

f) $9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x + (4)^2 = (3x - 4)^2$

g) $(5)^2 - (10y)^2 = (5 - 10y)(5 + 10y)$

h) $(2x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2x + (4)^2 = (2x + 4)^2$

i) $(6x)^2 - 1 = (6x + 1)(6x - 1)$

j) $(4x)^2 + (5)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4x = (4x - 5)^2$

20 **Extrae factor común y transforma en producto, como se hace en el ejemplo.**

• $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

a) $x^3 - 4x$ **b)** $4x^3 - 4x^2 + x$

c) $x^4 - x^2$ **d)** $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x - 1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x - 4)^2$

21 **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $18\left[\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}\right]$ **b)** $8\left[\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}\right]$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right]$

a) $18\left[\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}\right] = 2(2x-5)^2 - 3(x+1)^2 = 8x^2 - 40x + 50 - 3x^2 - 6x - 3 =$

$= 5x^2 - 46x + 47$

b) $8\left[\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}\right] = 4x(x-3) + 2x(x+2) - (3x+2)^2 =$

$= 4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x - 9x^2 - 12x - 4 =$

$= -3x^2 - 20x - 4$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right] = 2x(x-2) - 5(x^2 + 1 + 2x) + 15 =$

$= 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5 - 10x + 15 = -3x^2 - 14x + 10$

División de polinomios. Regla de Ruffini

22 **Efectúa las siguientes divisiones:**

a) $(12x^2 - 9x) : 3x$ **b)** $(25x^3 + 15x^2 - 5x) : 5x$

c) $(18x^5 - 12x^3 + 3x^2) : 6x^2$

a)
$$\begin{array}{rr|l}
12x^2 & -\ 9x & 3x \\ \hline
-\ 12x^2 & & 4x - 3 \\ \hline
& -\ 9x & \\
& 9x & \\ \hline
& 0 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrr|l}
25x^3 & +\ 15x^2 & -\ 5x & 5x \\ \hline
-\ 25x^3 & & & 5x^2 + 3x - 1 \\ \hline
& 15x^2 & -\ 5x & \\
& -\ 15x^2 & & \\ \hline
& & -\ 5x & \\
& & 5x & \\ \hline
& & 0 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrr|l}
18x^5 & -\ 12x^3 & +\ 3x^2 & 6x^2 \\ \hline
-\ 18x^5 & & & 3x^3 - 2x + 1/2 \\ \hline
& -\ 12x^3 & +\ 3x^2 & \\
& 12x^3 & & \\ \hline
& & 3x^2 & \\
& & -\ 3x^2 & \\ \hline
& & 0 &
\end{array}$$

División de polinomios. Regla de Ruffini

23 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 5) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 4x + 7) : (x - 1)$

d) $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x + 2)$

e) $(-x^2 + 3x - 7) : (x - 3)$

a)

	1	−5	6
2		2	−6
	1	−3	0

Cociente: $x - 3$; Resto: 0

b)

	1	−3	0	5
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	1

Cociente: $x^2 - 4x + 4$; Resto: 1

c)

	2	0	−4	7
1		2	2	−2
	2	2	−2	5

Cociente: $2x^2 + 2x - 2$; Resto: 5

d)

	1	−4	−7	10
−2		−2	12	−10
	1	−6	5	0

Cociente: $x^2 - 6x + 5$; Resto: 0

e)

	−1	3	−7
3		−3	0
	−1	0	−7

Cociente: $-x$; Resto: −7

24 **Ayúdate de la regla de Ruffini para comprobar si los números –1, 1, 2 y 3 son raíces de alguno de estos polinomios:**

a) $x^3 - 7x + 6$ **b)** $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ **c)** $x^3 - 3x^2 - x + 3$

a)

	1	0	–7	6	
–1		–1	1	6	
	1	–1	–6	12	→ $x = -1$ no es raíz.

	1	0	–7	6	
1		1	1	–6	
	1	1	–6	0	→ $x = 1$ es raíz.

	1	0	–7	6	
2		2	4	–6	
	1	2	–3	0	→ $x = 2$ es raíz.

	1	0	–7	6	
3		3	9	6	
	1	3	2	12	→ $x = 3$ no es raíz.

b)

	1	–3	4	–12	
–1		–1	4	–8	
	1	–4	8	–20	→ $x = -1$ no es raíz.

	1	–3	4	–12	
1		1	–2	2	
	1	–2	2	–10	→ $x = 1$ no es raíz.

	1	–3	4	–12	
2		2	–2	4	
	1	–1	2	–8	→ $x = 2$ no es raíz.

	1	–3	4	–12	
3		3	0	12	
	1	0	4	0	→ $x = 3$ es raíz.

c)

	1	−3	−1	3
−1		−1	4	−3
	1	−4	3	0

→ $x = -1$ es raíz.

	1	−3	−1	3
1		1	−2	−3
	1	−2	−3	0

→ $x = 1$ es raíz.

	1	−3	−1	3
2		2	−2	−6
	1	−1	−3	−3

→ $x = 2$ no es raíz.

	1	−3	−1	3
3		3	0	−3
	1	0	−1	0

→ $x = 3$ es raíz.

25 **¿Cuáles de estas divisiones son exactas?:**

a) $(3y^2 - 7y + 2) : (y - 2)$ **b)** $(3b^3 + 13b^2 + 5b) : (b + 4)$

c) $(-m^3 + 2m - 6) : (m + 2)$ **d)** $(a^4 + 3a^3 - a - 3) : (a + 3)$

a)

	3	−7	2
2		6	−2
	3	−1	0

→ Resto = 0 → División exacta.

b)

	3	13	5
−4		−12	−4
	3	1	1

→ Resto ≠ 0 → División no exacta.

c)

	−1	2	−3
−2		2	−8
	−1	4	−14

→ Resto ≠ 0 → División no exacta.

d)

	1	3	0	−1	−3
−3		−3	0	0	3
	1	0	0	−1	0

→ Resto = 0 → División no exacta.

26 **Comprueba si los siguientes polinomios son divisibles por $(x-2)$ o por $(x+1)$:**

a) $x^2 - x - 2$ **b)** $4x^3 + x^2 - 2x + 1$

c) $x^4 - 5x^2 + x + 2$ **d)** $x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

a)

	1	−1	−2
2		2	2
	1	1	0

→ Es divisible por $(x-2)$.

	1	−1	−2
−1		−1	2
	1	−2	0

→ Es divisible por $(x+1)$.

b)

	4	1	−2	1
2		8	18	32
	4	9	16	33

→ No es divisible por $(x-2)$.

	4	1	−2	1
−1		−4	3	−1
	4	−3	1	0

→ Es divisible por $(x+1)$.

c)

	1	0	−5	1	2
2		2	4	−2	−2
	1	2	−1	−1	0

→ Es divisible por $(x-2)$.

	1	0	−5	1	2
−1		−1	1	4	−5
	1	−1	−4	5	−3

→ No es divisible por $(x+1)$.

d)

	1	−2	0	5	−4
2		2	0	0	10
	1	0	0	5	6

→ No es divisible por $(x-2)$.

	1	−2	0	5	−4
−1		−1	3	−3	−2
	1	−3	3	2	−6

No es divisible por $(x+1)$.

27 **Calcula el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(2x^2 - 2x + 5) : (x^2 - 3)$ **b)** $(3x^2 - 7x - 4) : (x^2 + 2x - 3)$

c) $(5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) : (x^2 + x + 1)$ **d)** $(-x^4 + 6x^2 - 4) : (x^2 - 2x)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^2 & - 2x & + 5 & x^2 + 3 \\ \cline{4-4} -2x^2 & & + 6 & 2 \\ \cline{1-3} & - 2x & + 11 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow 2$; Resto $\rightarrow -2x + 11$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^2 & - 7x & + 4 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{4-4} -3x^2 & - 6x & + 9 & 3 \\ \cline{1-3} & - 13x & + 5 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow 3$; Resto $\rightarrow -13x + 5$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l} 5x^3 & + 3x^2 & - 2x & + 4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{5-5} -5x^3 & - 5x^2 & - 5x & & 5x - 2 \\ \cline{1-3} & - 2x^2 & - 7x & + 4 & \\ & 2x^2 & + 2x & + 2 & \\ \cline{2-4} & & - 5x & 6 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow 5x - 2$; Resto $\rightarrow -5x + 6$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l} -x^4 & & + 6x^2 & - 4 & x^2 - 2x \\ \cline{5-5} x^4 & - 2x^3 & & & -x^2 - 2x \\ \cline{1-2} & - 2x^3 & + 6x^2 & - 4 & \\ & 2x^3 & - 4x^2 & & \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & - 4 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow -x^2 - 2x$; Resto $\rightarrow 2x^2 - 4$

28 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1)$ **b)** $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + x - 1)$ **d)** $(x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 2x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & + 2x^2 & + 1 & & x^2 + 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & - x & & x + 2 \\ \cline{1-3} & 2x^2 & - x & + 1 & \\ & -2x^2 & & - 2 & \\ \cline{2-4} & & - x & - 1 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow x + 2$; Resto $\rightarrow -x - 1$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^3 & - x^2 & - x & + 1 & & x^2 - 1 \\ \cline{6-6} -2x^3 & & + 2x & & & 2x - 1 \\ \cline{1-4} & - x^2 & + x & + 1 & & \\ & x^2 & & - 1 & & \\ \cline{2-4} & & x & & & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow 2x - 1$; Resto $\rightarrow x$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l} x^3 & - 3x^2 & + 2x & - 2 & & x^2 + x - 1 \\ \cline{6-6} -x^3 & - x^2 & + x & & & 2x - 4 \\ \cline{1-4} & - 4x^2 & + 3x & - 2 & & \\ & 4x^2 & + 4x & - 4 & & \\ \cline{2-4} & & 7x & - 6 & & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow x - 4$; Resto $\rightarrow 7x - 6$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & - 5x^3 & & + 2x & & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6} -x^4 & + 2x^3 & - x^2 & & & x^2 - 3x - 7 \\ \cline{1-3} & - 3x^3 & - x^2 & + 2x & & \\ & 3x^3 & - 6x^2 & + 3x & & \\ \cline{2-4} & & - 7x^2 & + 5x & & \\ & & 7x^2 & - 14x & + 7 & \\ \cline{3-5} & & & - 9x & + 7 & \end{array}$$

Cociente $\rightarrow x^2 - 3x - 7$; Resto $\rightarrow -9x + 7$

Factorización de polinomios

29 **Aplica la regla de Ruffini para transformar en producto los polinomios siguientes:**

a) $x^2 + 2x - 3$ **b)** $x^2 - 4x - 5$

c) $2x^2 - 5x + 2$ **d)** $x^2 - x - 6$

e) $2x^2 - x - 3$ **f)** $x^3 - x^2 - 4x + 4$

a)

	1	2	−3
−3		−3	3
	1	−1	0

$\rightarrow (x + 3)$

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

b)

	1	−4	−5
−1		−1	5
	1	−5	0

$\rightarrow (x + 1)$

$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$

c)

	2	−5	2
2		4	−2
	2	−1	0

$\rightarrow (x - 2)$

$2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$

d)

	1	−1	−6
3		3	6
	1	2	0

$\rightarrow (x - 3)$

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

e)

	2	−1	−3
−1		−2	3
	2	−3	0

$\rightarrow (x + 1)$

$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

f)

	1	−1	−4	4
1		1	0	−4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$\rightarrow (x - 1)$

$\rightarrow (x - 2)$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$

30 **Factoriza estos polinomios:**

a) $x^3 - 3x^2 + 2x$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

e) $4x^2 + 13x - 12$

f) $x^2 - 17x + 72$

g) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

h) $-2x^4 - 8x^3 + 24x^2$

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$

	1	−3	2	
1		1	−2	
	1	−2	0	→ $(x - 1)$

$x(x - 1)(x - 2)$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3)$

	1	−2	−3	
−1		−1	3	
	1	−3	0	→ $(x + 1)$

$x^2(x + 1)(x - 3)$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(x + 1)(x + 1)$

	1	−1	−5	−3	
3		3	6	3	
	1	2	1	0	→ $(x - 3)$
−1		−1	−1		
	1	1	0		→ $(x + 1)$

$(x - 3)(x + 1)(x + 1)$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x - 3)(x + 3)$

	1	2	−9	−18	
−2		−2	0	18	
	1	0	−9	0	→ $(x + 2)$
3		3	9		
	1	3	0		→ $(x - 3)$

$(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

e) $4x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(4x - 3)$

	4	13	−12	
−4		−16	12	
	4	−3	0	→ $(x + 4)$

$(x + 4)(4x - 3)$

f) $x^2 - 17x + 72 = (x - 2)(x - 9)$

	1	−17	72	
8		8	−72	
	1	−9	0	→ $(x - 8)$

$(x - 2)(x - 9)$

g) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$

	1	−3	−10	
−2		−2	10	
	1	−5	0	→ $(x + 2)$

$3x(x + 2)(x - 5)$

h) $-2x^4 - 8x^3 + 24x^2 = 2x^2(-x^2 - 4x + 12)$

	−1	−4	12	
2		−2	−12	
	−1	−6	0	→ $(x - 2)$

$2x^2(x - 2)(-x - 6)$

Fracciones algebraicas

31 **Simplifica estas fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{9x}{12x^2}$ **b)** $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)}$ **c)** $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3}$

d) $\dfrac{x+5}{(x+5)^2}$ **e)** $\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$ **f)** $\dfrac{x^2-2x}{3x}$

a) $\dfrac{9x}{12x^2}=\dfrac{3}{4x}$ b) $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)}=\dfrac{x}{5}$ c) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3}=\dfrac{x+2}{2x^3}$

d) $\dfrac{x+5}{(x+5)^2}=\dfrac{1}{x+5}$ e) $\dfrac{2x^2-4x}{x-2}=\dfrac{2x(x-2)}{(x-2)}=2x$

f) $\dfrac{x^2-2x}{3x}=\dfrac{x(x-2)}{3x}=\dfrac{x-2}{3}$

32 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:**

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2}$ **b)** $\dfrac{3x}{x^2+2x}$ **c)** $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}$ **e)** $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}$ **f)** $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2}$

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2}=\dfrac{x(x-4)}{x^2}=\dfrac{x-4}{x}$ b) $\dfrac{3x}{x^2+2x}=\dfrac{3x}{x(x+2)}=\dfrac{3}{x+2}$

c) $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{3(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{x+1}$ d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}=\dfrac{2x(x+2)}{x^2(x+2)}=\dfrac{2}{x}$

e) $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}=\dfrac{4x^2(2x-1)}{(2x-1)^2}=\dfrac{4x^2}{2x-1}$ f) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2}=\dfrac{5x(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{5}{x}$

33 **Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.**

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **c)** $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ **e)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ **f)** $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}=\dfrac{2(x+2)}{3x(x+2)}=\dfrac{2}{3x}$ b) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$ d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x}{x+3}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

f) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}=\dfrac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)}=\dfrac{x(x+1)^2}{3(x+1)}=\dfrac{x(x+1)}{3}$

34 **Simplifica.**

a) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^4-9x^2}$ **b)** $\dfrac{4x^4+4x^3+x^2}{4x^2-1}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-x^2-4x+4}$ **d)** $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^3-4x^2-5x}$

a) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^4-9x^2}=\dfrac{x(x^2-6x+9)}{x(x^2-9x)}=\dfrac{(x^2-6x+9)}{x^2-9x}=\dfrac{(x^2)-2\cdot 3\cdot x+(3)^2}{x(x+3)(x-3)}=$

$=\dfrac{(x-3)^2}{x(x+3)(x-3)}=\dfrac{x-3}{x(x+3)}$

b) $\dfrac{4x^4+4x^3+x^2}{4x^2-1}=\dfrac{x^2(4x^2+4x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{x^2((2x)^2+2\cdot 2x+1^2)}{(2x-1)(2x+1)}=$

$=\dfrac{x^2(2x+1)^2}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{x^2(2x+1)}{2x-1}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-x^2-4x+4}=\dfrac{x(x^2-3x+2)}{(x-1)(x^2-4)}=\dfrac{x(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x}{x+2}$

*	1	−1	−4	4
1		1	0	−4
	1	0	−4	0

$\rightarrow (x-1)$

$(x-1)(x^2-4)$

*	1	−3	2
2		2	−2
	1	−1	0

$\rightarrow (x-2)$

$(x-2)(x-1)$

d) $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^3-4x^2-5x}=\dfrac{x^2(x^2-2x-3)}{x(x^2-4x-5)}=\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{x(x+1)(x-5)}=\dfrac{x(x-3)}{(x-5)}$

	1	−2	−3
−1		−1	3
	1	−3	0

$\rightarrow (x+1)$

$(x+1)(x-3)$

	1	−4	−5
−1		−1	5
	1	−5	0

$\rightarrow (x+1)$

$(x+1)(x-5)$

35 **Reduce a mínimo común denominador y opera estas expresiones:**

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ **b)** $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{3x}$

c) $\dfrac{5}{2x}-\dfrac{3}{x^2}$ **d)** $\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}$

a) $\dfrac{x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{18+3-10}{6x}=\dfrac{11}{6x}$

c) $\dfrac{5x-6}{2x^2}$ d) $\dfrac{x(3-x)+x-1}{x^2}=\dfrac{-x^2+4x-1}{x^2}$

36 **Opera y reduce.**

a) $\frac{x+2}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$

b) $\frac{x-3}{2x} \cdot \frac{x^2}{x-3}$

c) $\frac{3}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{2}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$

e) $\frac{5}{x-2} : \frac{x-1}{x-2}$

f) $\frac{x+5}{5x} : \frac{x+5}{x^2}$

a) $\frac{x+2}{3(x+2)} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)} = \frac{x}{2}$

c) $\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2(x-2)}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x}$

e) $\frac{5(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{x-1}$

f) $\frac{x^2(x+5)}{5x(x+5)} = \frac{x}{5}$

37 **Opera, y simplifica si es posible.**

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2}$

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3x}{(x+1)x^2} = \frac{3}{(x+1)x}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2} = \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

Página 104

Resuelve problemas

38 **Expresa en lenguaje algebraico:**

a) La cantidad de agua que queda en un depósito del que se sacan 1/3 y después los 2/5 de lo que queda.

b) Lo que pagué por un bocadillo, un refresco y una chocolatina, si el bocadillo cuesta el triple que el refresco y el refresco 1 € más que la chocolatina.

a) Se sacan $\frac{1}{3} \rightarrow 1 - \frac{1}{3}$.

Se sacan de lo que queda $\frac{2}{5} \rightarrow -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$.

Luego $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.

Sea $x \rightarrow$ La cantidad de agua del depósito $\rightarrow x - \frac{x}{3} - \frac{4x}{15} \rightarrow \frac{2x}{5}$.

b) Sea $x \rightarrow$ Lo que cuesta la chocolatina.

El refresco cuesta $\rightarrow x + 1$.

El bocadillo $\rightarrow 3(x + 1)$.

Luego en total $\rightarrow x + (x + 1) + 3(x + 1) = 5x + 4$.

39 **Con el dinero que tiene Laura, puede comprar tres cómics del mismo precio y le sobran 8 €. Al día siguiente ve que los cómics han bajado 2 € y piensa que con el dinero que tenía ayer podría comprar 5 cómics a este precio. Escribe de forma algebraica este enunciado.**

Sea $x \rightarrow$ Lo que cuestan los cómics el primer día.

Luego $\rightarrow 3x + 8 = 5(x - 2)$.

40 ***La mitad de un número es 20 unidades menor que su triple.*** **Elige la expresión de este enunciado.**

a) $\frac{x - 20}{2} = 3x$ **b)** $\frac{x}{2} - 20 = 3x$ **c)** $\frac{x}{2} + 20 = 3x$

Es la c).

41 **Si Jorge tiene 12 años y su madre 38, ¿cuántos años, x, tienen que pasar para que la edad de su madre sea el doble de la de Jorge? Indica la igualdad que representa esta situación.**

a) $2(x + 38) = x + 12$ **b)** $38 = 2(x + 12)$ **c)** $38 + x = 2(12 + x)$

c) $38 + x = 2(12 + x)$.

42 **Un grupo de amigos quiere comprar un regalo para María y les toca a 12 € cada uno. Si fueran tres amigos más, les tocaría a 4 € menos cada uno. ¿Cuál de estas igualdades representa este enunciado?**

a) $12(x - 4) = 8(x + 3)$ **b)** $12x = 8(x + 3)$ **c)** $12x = 9(x + 4)$

La igualdad b).

43 **La expresión $10a + b$ representa un número de dos cifras. Escribe en forma algebraica:**

a) Un número de tres cifras.

b) El siguiente y el anterior al que has escrito en a).

c) La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir sus cifras.

a) $100a + 10b + c$

b) $100a + 10b + c + 1$ y $100a + 10b + c - 1$

c) $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$

44 **Si mezclamos 6 kg de pintura con 9 kg de otra que cuesta 3 € menos por kilo, la mezcla nos sale a 5,20 €/kg. Si x es el precio de la pintura cara, rellena la tabla y expresa algebraicamente este enunciado.**

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9		
MEZCLA		5,20	

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
PINTURA 1	**6**	x	$6x$
PINTURA 2	**9**	$x - 3$	$9(x - 3)$
MEZCLA	15	**5,20**	$6x + 9(x - 3)$

Coste de la mezcla $\rightarrow \dfrac{6x + 9(x - 3)}{15} = 5{,}20$ €

45 **Si a un número de dos cifras le sumamos 10, se obtiene el doble del número obtenido al invertir sus cifras. Escribe este enunciado de forma algebraica.**

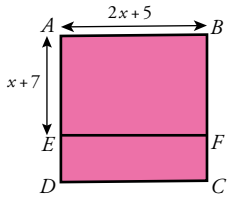
Sea $x \rightarrow$ Cifra de las decenas
Sea $y \rightarrow$ Cifra de las unidades
$\Big\rangle$ $10x + y + 10 = 2(10y + x)$

46 **Dos ciclistas salen a la misma hora, una de A hacia B a 22 km/h y la otra de B hacia A a 18 km/h. La distancia entre A y B es 30 km. Si llamamos x al tiempo que tardan en encontrarse, ¿cuál es la expresión que representa este enunciado?**

a) $22x = 18(30 - x)$ **b)** $40x = 30$ **c)** $\dfrac{x}{22} + \dfrac{30 - x}{18} = x$

$x \rightarrow$ Tiempo que tardará en encontrarse $\rightarrow 22x + 18x = 30 \rightarrow (22 + 18)x = 30 \rightarrow$
$\rightarrow 40x = 30 \rightarrow$ La b).

47 ***ABCD*** **es un cuadrado de lado** $2x + 5$ **m. Al trazar una paralela a** ***AB*** **(que llamamos** ***EF***) **a una distancia** $x + 7$ **m de** ***AB*****, obtenemos dos rectángulos** ***EFCD*** **y** ***ABFE*****.**



a) Expresa en función de x **las áreas del cuadrado y del rectángulo** ***EFCD*****.**

b) Indica qué representa en la figura esta expresión: $(2x + 5)^2 - (2x + 5) \cdot (x - 2)$

c) ¿Y la expresión $6x + 6$**?**

a) Área del cuadrado $\rightarrow A_{ABCD} = l^2 \rightarrow A_{ABCD} = (2x + 5)^2$

Área del rectángulo $\rightarrow b \cdot h$

Base de *EFCD* $\rightarrow 2x + 5$

Altura de *EFCD* $\rightarrow (2x + 5) - (x + 7)$

$A_{EFCD} = (2x + 5)[(2x + 5) - (x + 7)] = (2x + 5)(x - 2) = 2x^2 - 4x + 5x - 10 =$
$= 2x^2 + x - 10 \text{ m}^2$

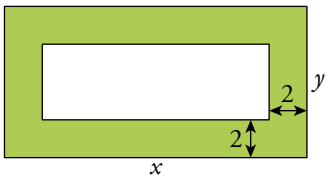
b) $(2x - 5)^2 \rightarrow$ Área del cuadrado *ABCD*.

$(2x + 5)(x - 2) \rightarrow$ Área del rectángulo *EFCD*.

Luego $(2x + 5)^2 - (2x + 5)(x - 2) \rightarrow$ Área del rectángulo *ABFE*.

c) $6x + 6 = (2x + 4x) + (10 - 4) = (2x - 4) + (4x + 10) = 2(x - 2) + 2(2x + 5) \rightarrow$ Perímetro de *EFCD*.

48 Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.



$A = xy - (x - 4)(x - 4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$

49 Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¡Obtienes siempre 4!

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son $x;\ x + 1;\ x + 2$

$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$

$$\frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$$

50 Escribe tres números impares consecutivos. Suma 3 al menor y elévalo al cuadrado. Réstale el producto de los otros dos. ¿Qué obtienes?

Tres números impares consecutivos: $2x - 1,\ 2x + 1,\ 2x + 3$

$(2x - 1 + 3)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = (2x + 2)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 3 = 1$

Siempre se obtiene 1.

51 **Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.**

Razona por qué obtengo el número inicial sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \rightarrow x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x.

52 **Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado.**

¿Cómo puedo saber el número que has pensado?

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplicamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

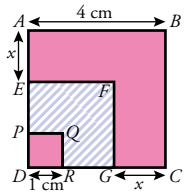
Si restamos 5 al resultado, obtenemos x.

Página 105

Resuelve: un poco más difícil

53 **En la figura *ABCD*, *EFGD* y *PQRD* son cuadrados.**

a) Expresa en función de *x* las longitudes de *DG* y *RG*, y el área de *EFGD*.



b) ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al área de la parte rayada?

$A_1 = 16 - (4 - x)^2$ $\quad A_2 = (4 - x)(3 - x)$

$A_3 = (4 - x)^2 - 1$

c) Copia el dibujo en tu cuaderno y señala en él qué representan las otras dos expresiones.

a) $DG = AB - GC \rightarrow DG = 4 - x$

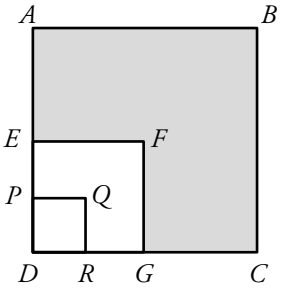
$RG = AB - DR - GC \rightarrow RG = 4 - 1 - x \rightarrow RG = 3 - x$

$RG = AB - DR - GC \rightarrow RG = 4 - 1 - x \rightarrow RG = 3 - x$

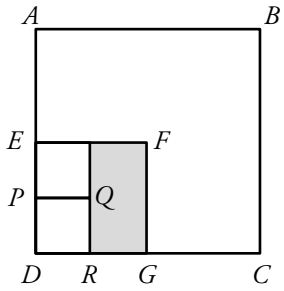
Área $EFGD = (DG)^2 \rightarrow$ Área $EFGD = (4 - x)^2$

b) El área de la parte rayada es el Área *EFGD* menos Área *PQRD* $\rightarrow (4 - x)^2 - 1^2 \rightarrow A_3$

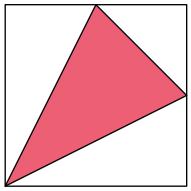
c) $A_1 = 16 - (4 - x)^2 \rightarrow$



$A_2 = (4 - x)(3 - x) \rightarrow$



54 **Expresa algebraicamente el área y el perímetro de la parte coloreada.**



Dos de los vértices del triángulo coinciden con puntos medios de los lados del cuadrado.

Calculamos el lado mayor del triángulo, L:

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow L = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

Calculamos el lado menor del triángulo, l:

$$l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Calculamos la altura que corresponde al lado menor del triángulo, h:

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} - \frac{x^2}{8} = \frac{10x^2 - x^2}{8} = \frac{9x^2}{8} \rightarrow h = \frac{3x}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro} = 2L + l = \sqrt{5}x + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}x + \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5}x + \sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}x$$

$$\text{Área} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3x}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{8}x^2$$

55 **¿Cuántos números de dos cifras verifican que sumando sus dos cifras más el producto de estas nos da el número inicial?**

Suponemos que el número es ab.

$a + b + a \cdot b = 10a + b \rightarrow ab = 9a \rightarrow b = 9$

Los números que acaben en 9 cumplirán esta regla.

56 **Observa:**

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

¿Cuál será el valor de $1 + 3 + 5 + \ldots + 19$?

¿Y de $1 + 3 + 5 + \ldots + n$?

Expresa con palabras esta propiedad e intenta demostrarla.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7…

$a_n = 2n - 1$

$$S_{10} = \frac{1 + 19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + n \rightarrow S_n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2.

57 **Si $a \cdot b = 9$, $b \cdot c = 16$ y $a \cdot c = 25$, ¿cuánto vale $a \cdot b \cdot c$?**

$a \cdot b = 9$
$b \cdot c = 16$ $\Rightarrow$ $ab \cdot bc \cdot ac = 9 \cdot 16 \cdot 25 \rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (3)^2 \cdot (4)^2 \cdot (5)^2 \rightarrow$
$a \cdot c = 25$

$\rightarrow a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5$

Reflexiona

58 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) El grado de la suma de dos polinomios de grados 2 y 3 es siempre 3.

b) Al multiplicar dos polinomios de grados 2 y 3 se obtiene otro de grado 5.

c) El producto de un binomio por un monomio es un binomio.

d) Si multiplicamos dos monomios, obtenemos un binomio.

e) Si la suma de dos monomios es positiva, también lo es su producto.

a) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = ex^2 + fx + g$

$P(x) + Q(x) = ax^3 + (b + e)x^2 + (c + f)x + (d + g) \rightarrow$ Grado 3.

Verdadero.

b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = ex^2 + fx + g$

$P(x) + Q(x) = (a \cdot e)ax^{3+2} + (a \cdot f + b \cdot e)x^4 + ((a \cdot g) + (b \cdot f) + (c \cdot e))x^3 +$
$+ ((d \cdot e) + (c \cdot f) + (b \cdot g))x^2 + ((c \cdot g) + (d \cdot g))x + d \cdot g \rightarrow$ Grado 5.

Verdadero.

c) ax^n

$(by^m + cz^p)$

$ax^n(by^m + cz^p) = abx^n y^m + acx^n y^p \rightarrow$ Binomio.

Verdadero.

d) $2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4 \rightarrow$ Monomio.

Falso.

e) $-2x^2$

$3x^2$

Suma $\rightarrow -2x^2 + 3x^2 = x^2$

Producto $\rightarrow -2x^2 \cdot 3x^2 = -6x^4$ $\rightarrow$ Falso.

59 **Expresa algebraicamente y comprueba si estas afirmaciones son verdaderas:**

a) La suma de un número par y otro impar es siempre impar.

b) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es siempre un número impar.

c) Si multiplicas dos números impares consecutivos y sumas 1, obtienes siempre un múltiplo de 4.

a) Número par $\rightarrow 2n$

Número impar $\rightarrow 2n + 1$

Suma $\rightarrow 2n + 2n + 1 = 4n + 1 \rightarrow$ Impar.

Verdadero.

b) Número entero $\rightarrow n$

El número entero siguiente $\rightarrow n + 1$

$(n)^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1 \rightarrow$ Impar.

Verdadero.

c) Número impar $\rightarrow 2n + 1$

El número impar siguiente $\rightarrow 2n + 3$

$(2n + 1)(2n + 3) + 1 = 4n^2 + 8n + 4 = 4(n^2 + 2n + 2) \rightarrow$ Múltiplo de 4.

Verdadero.

60 **Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) $(x + a)^2 = (-x - a)^2$ **b)** $(x - a)^2 = (a - x)^2$ **c)** $-(x)^2 = x^2$

a) Verdadero. Por ejemplo: $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25 = (-3 - 2)^2 = (-5)^2 = 25$

$(-x - a)^2 = [-(x + a)]^2 = (x + a)^2$

b) Verdadero. Por ejemplo: $(8 - 5)^2 = 3^2 = 9 = (5 - 8)^2 = (-3)^2$

$(x - a)^2 = [-(-x + a)]^2 = (-x + a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax$

c) Falso. Por ejemplo: $-(2)^2 = -4 \neq 2^2$

61 **¿Cuál debe ser el valor de** k **para que –2 sea raíz del polinomio** $x^3 - 5x^2 - 7x + k$**? Justifica tu respuesta.**

Para que –2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$(-2)^3 - 5\,(-2)^2 - 7\,(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$

62 **a) Simplifica la expresión** $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$**.**

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de:

$$2\,501^2 - 2\,499^2$$

a) $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$

b) $2\,501^2 - 2\,499^2 = 4 \cdot 2\,500 = 10\,000$

63 **Averigua cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:**

a) $(3x + a)(3x - a) + 7$ y $9x^2 - 18$ **b) $(x - a)^2 + 2xa - 46$ y $x^2 + 18$**

a) $(3x + a)(3x - a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$

Si $9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$

b) $(x - a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$

Si $x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

64 **Al simplificar la fracción algebraica $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2}$, ¿cuál de estas fracciones se obtiene? Justifícalo.**

a) $\frac{3x^2 - 4x}{2}$ **b) $\frac{x^2 - 8x^3}{6}$** **c) $\frac{3x^2 - 4x}{6}$**

La c): $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2} = \frac{2x^2(3x^2 - 4x)}{12x^2} = \frac{3x^2 - 4x}{6}$

65 **El polinomio $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)$ puede descomponerse en cuatro factores de primer grado. ¿Cuáles son?**

$(x^2 - 4) = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

	1	2	1
-1		-1	-1
	1	1	0

$\rightarrow (x + 1)$

$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x + 1)$

66 **Piensa y completa en tu cuaderno sin hacer operaciones.**

a) $x^4 - 16 = (x^2 + \square)(x + \square)(x - \square)$

b) $(2x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (\square x - 1)(x + \square)$

a) $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

b) $((2x + 1) + (x - 2))((2x + 1) - (x - 2)) = (3x - 1)(x + 3)$

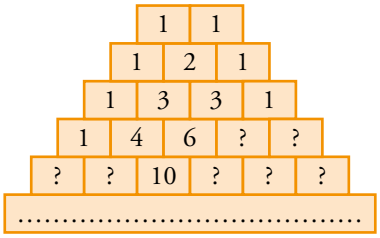
Página 106

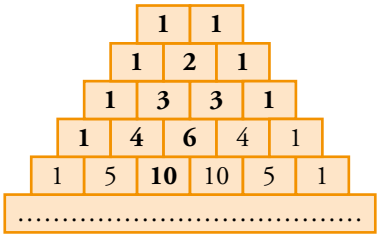
Investiga

Un triángulo curioso

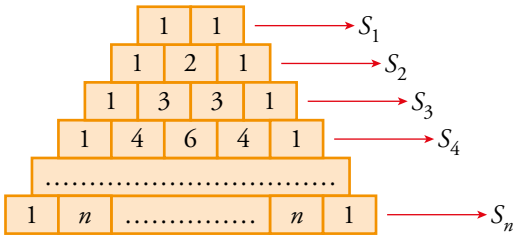
La colección de números que tienes a la derecha, que se abre indefinidamente hacia abajo, tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.

¿Podrías completar las casillas vacías?





- **Suma los números de cada fila y completa la tabla:**

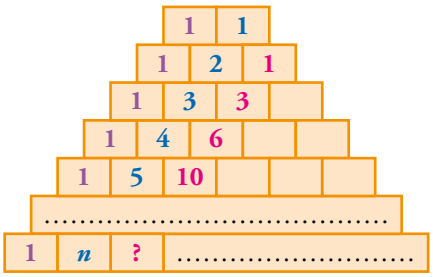


S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8			…	

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8	16	32	…	2^n

• **Fíjate en estas tres escaleras de números:**



Observa que:

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = ...

¿Cuál es el tercer número de la 6.ª fila? | 1 | 6 | ? |

¿Y el de la número 20 (vigésima)? | 1 | 20 | ? |

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la enésima fila: | 1 | n | ? |

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Así: $a_{20} = 1 + 2 + \ldots + 20 = \dfrac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$

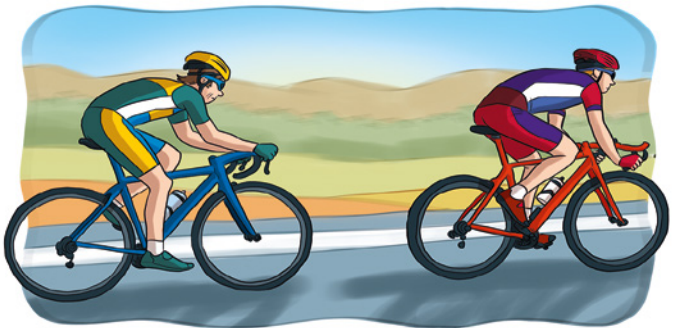
Y, por fin: $a_n = \dfrac{(1 + n) \cdot n}{2}$

Página 107

Entrénate resolviendo problemas

- **Dos ciclistas parten del mismo lugar, a la misma hora y en el mismo sentido. Sus velocidades respectivas son 30 km/h y 24 km/h.**

  ¿Qué ventaja le sacará el primero al segundo cuando haya transcurrido una hora y cuarenta minutos?

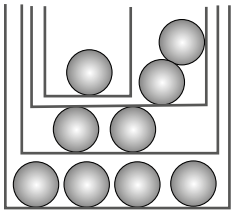


Los ciclistas se distancian a una velocidad de $\rightarrow$ $30 - 24 = 6$ km/h

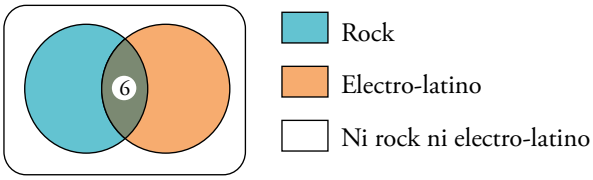
$$1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{4}{6} \text{ h} = \frac{10}{6} \text{ h} = \frac{5}{3} \text{ h}$$

En $\frac{5}{3}$ h se distancian $\rightarrow$ $6 \cdot \frac{5}{3} = 10$ km

- **Después de la clase de Educación Física, hemos guardado en 4 cajas los 9 balones que teníamos. Cada caja contiene un número impar de balones y en ningún caso coinciden el número de balones de dos cajas. ¿Cómo es posible?**



- **De 30 jóvenes a los que se entrevistó en una sala de baile, 15 declararon ser aficionados al rock, y 13, al electro-latino. De ellos, 6 aseguraron ser aficionados a ambos ritmos musicales.**



¿Cuántos no son aficionados ni a lo uno ni a lo otro?

Como hay 6 a quienes les gusta el rock y el electro-latino, a los chicos y a las chicas que les gusta uno de los dos estilos o ambos a la vez son: $15 + 13 - 6 = 22$.

Como en total hay 30, a quienes no les gusta ni lo uno ni lo otro son $30 - 22 = 8$.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:**

a) El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.

b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

c) El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

a) El precio es $\frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot x}{5 + 7} = \frac{15 + 7x}{12}$

b) Si x es el precio de un café, $x + 3x + \frac{3}{2}x = \frac{2x + 6x + 3x}{2} = \frac{11}{2}x$

c) Área total $= 2x^2 + 4 \cdot 5x = 2x^2 + 20x$

Volumen $= x^2 \cdot 5 = 5x^2$

2 **Efectúa y reduce.**

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$ **b)** $4\left[(x - 2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right]$

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x = 9x^3 - 12x^2 + 4x - 2x^3 + 7x^2 - 3x = 7x^3 - 5x^2 + x$

b) $\left[(x - 2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4\left[x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 - 16 = x^2 - 16x$

3 **Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.**

$$\frac{5(x - 1)}{9} + \frac{7x - 2}{12} - \frac{x(x - 1)}{2}$$

$$36\left(\frac{5(x - 1)}{9} + \frac{7x - 2}{12} - \frac{x(x - 1)}{2}\right) = 20(x - 1) + 3(7x - 2) - 18x(x - 1) =$$

$$= 20x - 20 + 21x - 6 - 18x^2 + 18x = -18x^2 + 59x - 26$$

4 **Transforma en productos el numerador y el denominador y simplifica la fracción siguiente:**

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9}$$

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x - 3)^2}{(2x - 3)(2x + 3)} = \frac{2x - 3}{2x + 3}$$

5 **Calcula el cociente y el resto en cada caso:**

a) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 + x)$ **b)** $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

a)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & - x^3 & + 2x^2 & + 4 & x^2 + x \\
\cline{6-6}
- 3x^4 & - 3x^3 & & & 3x^2 - 4x + 6 \\
\cline{1-2}
 & - 4x^3 & + 2x^2 & + 4 & \\
 & + 4x^3 & + 4x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 & + 4 & \\
 & & - 6x^2 & - 6x + 4 & \\
\cline{3-5}
 & & & - 6x + 4 &
\end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 4x + 6$; Resto: $-6x + 4$

b)

	1	3	–2	2
–2		–2	–2	8
	1	1	–4	10

Cociente: $x^2 + x - 4$; Resto: 10

6 **Extrae factor común, localiza identidades notables y busca las raíces para factorizar estos polinomios:**

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ **b)** $3x^4 - 30x^3 + 75x^2$

c) $x^3 + 3x^2 - 4$ **d)** $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$

a)

	2	−9	7	6
2		4	−10	−6
	2	−5	−3	0
3		6	3	
	2	1	0	

$\rightarrow (x-2)$

$\rightarrow (x-3)$

$(x-2)(x-3)(2x+1)$

b) $3x^4 - 30x^3 + 75x^2 = x^2(3x^2 - 30x + 75)$

	3	−30	75
5		15	−75
	3	−15	0

$\rightarrow (x-5)$

$x^2(x-5)(3x-15) = 3x^2(x-5)(x-5) = 3x^2(x-5)^2$

c)

	1	3	0	−4
1		1	4	4
	1	4	4	0
−2		−2	−4	
	1	2	0	

$\rightarrow (x-1)$

$\rightarrow (x+2)$

$(x-1)(x+2)(x+2) = (x-1)(x+2)^2$

d)

	1	3	−15	−19	30
1		1	4	−11	−30
	1	4	−11	−30	0
−2		−2	−4	30	
	1	2	−15	0	
3		3	15		
	1	5	0		

$\rightarrow (x-1)$

$\rightarrow (x+2)$

$\rightarrow (x-3)$

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$

7 **Opera y simplifica.**

a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ **b)** $\frac{x-2}{x} \cdot 3x$

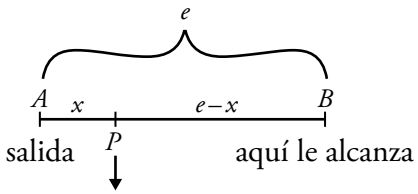
a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$

↓

m.c.m. $= x^2$

b) $\frac{x-2}{x} \cdot 3x = \frac{(x-2) \cdot 3\not{x}}{\not{x}} \cdot (x-2) \cdot 3 = 3x = 6$

8 **Un autobús que va a 90 km/h ha recorrido x km cuando sale un coche a 120 km/h en la misma dirección. Expresa en función de x el tiempo que tardará en alcanzarlo.**



(aquí se encuentra el bus cuando sale el coche)

$v = \frac{e}{t} \rightarrow e = v \cdot t$

Sea t = tiempo que tarda en alcanzarlo.

En el tiempo t el coche se desplaza de A a B.

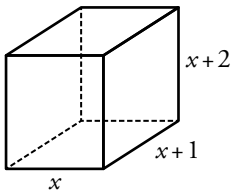
En el tiempo t el bus se desplaza de p a B.

$v = \frac{e}{t} \rightarrow e = v \cdot t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bus: } t = \frac{e-x}{90} \\ \text{Coche: } t = \frac{e-x}{120} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{e-x}{90} = \frac{e}{120} \rightarrow 120e - 120x = 90e \rightarrow 30e = 120e \rightarrow e = 4x \rightarrow$$

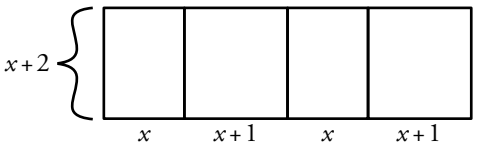
$$\rightarrow t = \frac{e}{120} = \frac{4x}{120} = \frac{x}{30} \rightarrow t = \frac{x}{30} \text{ horas}$$

9 **Escribe de forma algebraica el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales consecutivos.**



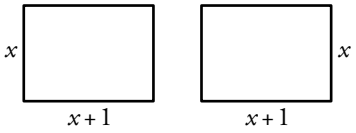
Área total = Área de las caras laterales + Área de las bases

1.º Calculamos el área de la cara lateral:



$A_l = (x + x + 1 + x + x + 1) \cdot (x + 2) = (4x + 2) \cdot (x + 2)$

2.º Calculamos el área de las bases:



$A_b = 2x(x + 1)$

Luego el área total es:

$A_t = (4x + 2) \cdot (x + 2) + 2x \cdot (x + 1) = 4x^2 + 2x + 8x + 4 + 2x^2 + 2x$

$A_t = 6x^2 + 12x + 4$

Volumen = A_{base} · altura $\rightarrow$ $V = x(x + 1) \cdot (x + 2) \rightarrow V = (x^2 + x)(x + 2) \rightarrow$

$\rightarrow V = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x \rightarrow V = x^3 + 3x^2 + 2x$

10 **Vendo 1/5 de mi colección de minerales y luego compro 54 más. Ahora tengo el doble que al principio. Expresa algebraicamente este enunciado.**

x = n.º minerales.

1) Vende $\frac{1}{5}x \rightarrow$ Le quedan $\frac{4}{5}x$

2) Compra 54 $\rightarrow$ ahora tiene $\frac{4}{5}x + 54$

Luego tiene el doble que al principio $\rightarrow$ $\frac{4}{5}x + 54 = 2x$