La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Se debe contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual (2,5 puntos). Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. Si $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ y g(x)=|1-x|, **a)** Dibujar las dos gráficas y hallar analíticamente sus puntos de intersección.

b) Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas (no vale usar decimales).

B. Calcular el área limitada por la curva $y=x^3-2x^2+x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas (sin usar decimales).

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **a)** Hallar A^2 y A^3

b) Utilizando exclusivamente lo anterior, hallar, razonadamente, A^{31}

B. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **a)** Obtener razonadamente, por inducción, A^{53}

b) Hallar $\lambda \in \mathrm{IR}$ tal que $\det(A-\lambda 1)=0$, siendo 1 la matriz identidad de orden 3

TERCER BLOQUE

A. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$, hallar: **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x/2 & y/2 & z/2 \\ a+7 & b+7 & c+7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

B. Calcular el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

CUARTO BLOQUE

A. *(UCLM, sept 2007)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial AX+X=B

b) Resolver el sistema $\begin{cases} 2X+2Y=A \\ 4X+3Y=B \end{cases}$

B. *(UCLM, sept 2001)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial AX-BCX=A

NOTA: Se ruega cuidar la ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático.

1^er bloque

(ver libro ejerc. 20 pág. 374)

Ⓐ a) $F(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$

$g(x)=|1-x| = \begin{cases} x-1 & si\ x\geq 1 \\ 1-x & si\ x<1 \end{cases}$ 0.25

↑ se anula en x = 1, y es negativo a su dcha.

$\sqrt{\frac{x}{2}}=x-1\ ;\ \frac{x}{2}=x^2-2x+1\ ;\ x=2x^2-4x+2\ ;$

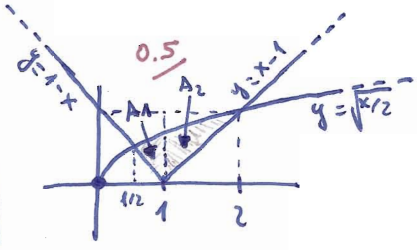
$\boxed{0=2x^2-5x+2} \begin{cases} \nearrow x_1=2 \\ \searrow x_2=1/2 \end{cases}$ 0.25

$\sqrt{\frac{x}{2}}=1-x\ ;\ \frac{x}{2}=(1-x)^2 \rightarrow$ ¡sale lo mismo!

X	1	2
$y=x-1$	0	1

x	0	1/2	1
$y=1-x$	1	1/2	0

x	0	1/2	1	2	3	4 ….∞
$y=\sqrt{\frac{x}{2}}$	0	1/2	0,71	1	1,22	1,41 ….∞



b) $A_1=\int_{1/2}^{1}\left[\sqrt{\frac{x}{2}}-(1-x)\right]dx=\int_{1/2}^{1}\sqrt{\frac{x}{2}}dx-\int_{1/2}^{1}dx+\int_{1/2}^{1}x\,dx=$

$=2\int_{1/2}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}dx-\int_{1/2}^{1}dx+\int_{1/2}^{1}x\,dx=2\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}}{3/2}-x+\frac{x^2}{2}=$

$=\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^3}-x+\frac{x^2}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{2}}-x+\frac{x^2}{2}\Big]_{1/2}^{1}=$

$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{16}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{-1}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{24}u^2$ 0.75

$A_2=\int_{1}^{2}\left[\sqrt{\frac{x}{2}}-(x-1)\right]dx=\int_{1}^{2}\sqrt{\frac{x}{2}}dx-\int_{1}^{2}x\,dx+\int_{1}^{2}dx=\ldots=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{2}}-\frac{x^2}{2}+x\Big]_{1}^{2}=\left(\frac{2}{3}\cdot2\cancel{-2}+\cancel{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}+1\right)=$

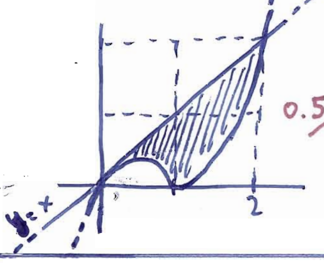
$=\frac{4}{3}-\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}+\frac{1}{2}-1=\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}u^2;\quad A_T=A_1+A_2=\cancel{\frac{\sqrt{2}}{3}}-\frac{7}{24}+\frac{5}{6}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\boxed{\frac{13}{24}u^2}$ 0.75

Ⓑ $\left.\begin{matrix} y=x^3-2x^2+x\rightarrow y'=3x^2-4x+1 \\ x=0\rightarrow y=0\ ;\quad m=y'(0)=1 \end{matrix}\right\}$ $y-0=1(x-0)\ ;\ y=x$ Ec. RECTA TGTE en $(0,0)$ 0.5

(ver libro ejercicio 18 pág. 373)

$\left.\begin{matrix} y=x^3-2x^2+x \\ y=x \end{matrix}\right\}$ $x^3-2x^2+\cancel{x}=\cancel{x}\ ;\ x^2(x-2)=0 \begin{cases} \nearrow x=0 \\ \searrow x=2 \end{cases}$ 0.5

x	-1	0	1	2	3
$y=x^3-2x^2+x$	-4	0	0	2	12



0.5

$A=\int_{0}^{2}\left[x-(x^3-2x^2+x)\right]dx=$

$=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)\,dx=-\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{2}$

$=-4+\frac{16}{3}=\boxed{\frac{4}{3}u^2}$ 1

2º bloque

Ⓐ

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}$ 0.5 ; $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-\mathbb{I}$ 0.5 $\Rightarrow$

b) $\Rightarrow \boxed{A^{31}}=A^{30}\cdot A=(A^3)^{10}\cdot A=(-\mathbb{I})^{10}\cdot A=\mathbb{I}\cdot A=\boxed{A}$ 1.5

Ⓑ

$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$; (← matriz NILPOTENTE)

1

$A^3=A^2\cdot A=0\cdot A=0$

$\vdots$

$\boxed{A^{53}=0}$ 1.5

3er bloque:

Ⓐ a)
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x/2&y/2&z/2\\a+7&b+7&c+7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\x/2&y/2&z/2\\a&b&c\end{vmatrix} + \overset{0\text{ pq. }f_3 \propto F_1}{\cancel{\begin{vmatrix}1&1&1\\x/2&y/2&z/2\\7&7&7\end{vmatrix}}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -\frac{1}{2}\cdot\overset{5}{\cancel{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}}} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

1,25

b)
$$\begin{vmatrix}1-x&1-y&1-z\\a+2x&b+2y&c+2z\\2x&2y&2z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\a+2x&b+2y&c+2z\\2x&2y&2z\end{vmatrix} - \underset{0\text{ pq. }f_3 \propto F_1}{\cancel{\begin{vmatrix}x&y&z\\a+2x&b+2y&c+2z\\2x&2y&2z\end{vmatrix}}} = \begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\2x&2y&2z\end{vmatrix} + \underset{0\text{ pq. }F_2=F_3}{\cancel{\begin{vmatrix}1&1&1\\2x&2y&2z\\2x&2y&2z\end{vmatrix}}} =$$

$$= 2\cdot\overset{5}{\cancel{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}}} = \boxed{10}$$

1,25

Ⓑ
$$\begin{vmatrix}\boxed{1}&0&-1&2\\2&3&2&-2\\2&4&2&1\\3&1&5&-3\end{vmatrix} \underset{\substack{C_3+C_1\\C_4-2C_1}}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&3&4&-6\\2&4&4&-3\\3&1&8&-9\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollo}\\\text{por } F_1 \text{ por Laplace}}}{=} \begin{vmatrix}3&4&-6\\4&4&-3\\1&8&-9\end{vmatrix} = -4\cdot3\cdot\begin{vmatrix}3&1&2\\4&1&1\\1&2&3\end{vmatrix} = -12\,(9+1+16-2-6-12) = \boxed{-72}$$

2,5

(Ver libro ejercicio 8 a)

4º bloque:

Ⓐ $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$

a) $AX+X=B$; $(A+\mathbb{I})X=B$; llamamos $A+\mathbb{I}=C \Rightarrow CX=B$; $C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot B$; $\boxed{X=C^{-1}\cdot B}$ (*) 0.25

$C=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$; $|C| = 5-4 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$; 0.25 $\left.\begin{matrix}C_{11}=\textcircled{5} & C_{12}=\textcircled{-2}\\ C_{21}=\textcircled{-2} & C_{22}=\textcircled{1}\end{matrix}\right\}$ 0.25 $\text{Adj}\,C=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix} \rightarrow {}^t\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\cdot{}^t\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$; 0.25

Sustituimos en (*): $X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&-7\\0&3\end{pmatrix}}$ 0.25

b)
$$\left.\begin{matrix}2X+2Y=A \xrightarrow{\otimes 2} 4X+4Y=2A\\ 4X+3Y=B \xrightarrow{\otimes -1} \underline{-4X-3Y=-B}\end{matrix}\right\}$$

$Y=2A-B = 2\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\4&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&5\\2&7\end{pmatrix}=Y}$ 0.5

Sustituimos en F_1: $2X+2\cdot\begin{pmatrix}-1&5\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}$; $2X=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&10\\4&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-8\\-2&-10\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}1&-4\\-1&-5\end{pmatrix}}$ 0.75

Ⓑ $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$

0.5

$AX-BCX=A$; $(A-BC)X=A$; llamamos $A-BC=D \Rightarrow DX=A$; $D^{-1}\cdot D\cdot X=D^{-1}\cdot A$; $\boxed{X=D^{-1}\cdot A}$ (*)

$D=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\underset{3\times2}{\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 0.5 ; $|D|=-1\neq0 \Rightarrow \exists\, D^{-1}$

$$\left.\begin{matrix}D_{11}=\begin{vmatrix}-3&1\\1&2\end{vmatrix}=\textcircled{-7} & D_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=\textcircled{-5} & D_{13}=\begin{vmatrix}3&-3\\1&1\end{vmatrix}=\textcircled{6}\\ D_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=\textcircled{1} & D_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=\textcircled{1} & D_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=\textcircled{-1}\\ D_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&1\end{vmatrix}=\textcircled{3} & D_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=\textcircled{2} & D_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\3&-3\end{vmatrix}=\textcircled{-3}\end{matrix}\right\}$$

0.5

$\text{Adj}(D)=\begin{pmatrix}-7&-5&6\\1&1&-1\\3&2&-3\end{pmatrix} \rightarrow D^{-1}=\frac{1}{|D|}\cdot{}^t\text{Adj}(D)=-\begin{pmatrix}-7&1&3\\-5&1&2\\6&-1&-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}$; 0.5

0.5

$X=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}11&-13&21\\8&-9&16\\-10&12&-18\end{pmatrix}}$

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Se debe contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual (2,5 puntos). Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y=|x-1|$ e $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+1$, y hallar su área. (No vale usar decimales).

B. Dibujar la región limitada por la curva $y=|x^2-4|$, el eje x y las rectas $x=-1$ y $x=4$. Calcular su área (sin usar decimales).

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **a)** Estudiar su rango en función del parámetro m.
b) Para m=0, hallar razonadamente A^{45}

B. Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ **a)** Calcular el valor de $a \in$ IR para que $A^2 - A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$
b) Calcular, en función de a, los determinantes de 2A y A^t

TERCER BLOQUE

A. **a)** *(UCLM, jun 2006)* Despejar la matriz X en función de A en la ecuación $(X+A)^2=X^2+XA+\mathbb{I}$, siendo A matriz cuadrada inversible.
b) Resolver la ecuación $BX+B^2=\mathbb{I}$, donde $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

B. *(UCLM, sept 2004)* Resolver la ecuación matricial XA-2B=X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A. **a)** Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**: $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$
b) Resolverlo para el caso en que tenga infinitas soluciones.

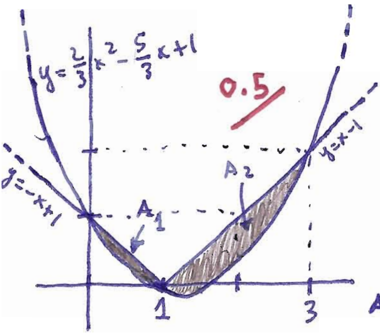
B. **a)** Discutir, en función de **a**, el sistema $\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-2 \\ (a-1)x+(a-1)y-2z=-2 \\ ax+(a+1)y=1 \end{array}\right\}$
b) Resolverlo cuando sea compatible.

NOTA: Se ruega cuidar la ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático.

1A $y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq 1 \\ x-1 & si\ x > 1 \end{cases}$

corte de ambas funciones: $\boxed{\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = -x+1}$; $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x = 0$; $\frac{2}{3}x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,1) \\ x=1 \rightarrow (1,0) \end{cases}$ 0.25/

$\boxed{\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = x-1}$; $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 = 0$; $2x^2 - 8x + 6 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x=1 \rightarrow (1,0) \\ x=3 \rightarrow (3,2) \end{cases}$



0.5/

$$A_1 = \int_0^1 \left[(-x+1) - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1\right)\right] dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx = -\frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} =$$

$$= -\frac{2}{9}x^3 + \frac{x^2}{3}\Big]_0^1 = -\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}u^2$$ 0.75/

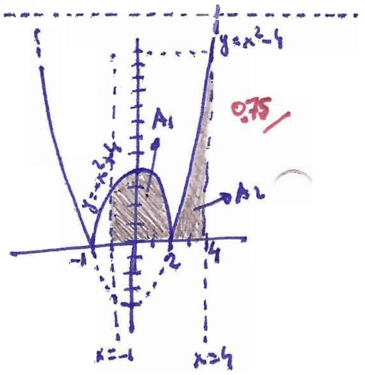
$$A_2 = \int_1^3 \left[(x-1) - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1\right)\right] dx = \int_1^3 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 2\right) dx = -\frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{2} - 2x =$$

$$= -\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x\Big]_1^3 = (-6 + 12 - 6) - \left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{3} - 2\right) = \frac{8}{9}u^2$$ 0.75

0.25/ $\boxed{A_T = 1u^2}$

1B $y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2-4 & si\ x \in (-\infty, -2] \\ -x^2+4 & si\ x \in (-2, 2] \\ x^2-4 & si\ x \in (2, \infty) \end{cases}$ páginas 52

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2-4$	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
$y = \|x^2-4\|$	5	0	3	4	3	0	5	12



0.75/

$$A_1 = \int_{-1}^{2} (-x^2+4)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 4x\Big]_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 4\right) = 9u^2$$ 0.75

$$A_2 = \int_2^4 (x^2-4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x\Big]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}u^2$$ 0.75/

$\boxed{A_T = \frac{32}{3} + 9 = \frac{59}{3}u^2}$ 0.25/

2A $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) $|A| = -1 + m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$ 0.25/

$m=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rgA = 2$ $m=-1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rgA = 2$

conclusión: I) $m \neq \pm 1 \Rightarrow rg\,A = 3$ ← 0.25

II) $m = \pm 1 \Rightarrow rg\,A = 2$ ← 0.75

b) $m=0$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}$$

0.125/ 0.125/

$45 \,\underline{|3}$
$0 \quad 15$

$\Rightarrow \boxed{A^{45}} = (A^3)^{15} = (-\mathbb{I})^{15} = \boxed{-\mathbb{I}}$ 1/

2B $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases}$

(se tienen que verificar ambas a la vez) 0.5/

$a^2 - a - 12 = 0 \begin{cases} a = -3 \\ \boxed{a = 4} \end{cases}$ 0.5/

$a^2 + a - 20 = 0 \begin{cases} a = -5 \\ \boxed{a = 4} \end{cases}$

1/ solu: $\boxed{a=4}$ verifica ambas condiciones a la vez

b) $det(2A) = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$ 0.25/; $det(A^t) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$ 0.25/

3A a) $(X+A)^2 = X^2 + XA + \mathbb{I}$; $(X+A)(X+A) = X^2 + XA + \mathbb{I}$; $\cancel{X^2} + \cancel{XA} + AX + A^2 = \cancel{X^2} + \cancel{XA} + \mathbb{I}$;

$AX + A^2 = \mathbb{I}$; $A(X+A) = \mathbb{I}$; $A^{-1} \cdot A(X+A) = A^{-1} \cdot \mathbb{I}$; $X + A = A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} - A}$ 1.25/

b) $BX + B^2 = \mathbb{I}$; $B(X+B) = \mathbb{I}$; $B^{-1}B(X+B) = B^{-1} \cdot \mathbb{I}$; $X + B = B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B^{-1} - B}$ (*) 0.25/

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $|B| = -1$; $\left.\begin{matrix} B_{11} = 0 & B_{12} = -1 \\ B_{21} = -1 & B_{22} = 1 \end{matrix}\right\}$ ${}^t Adj(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot {}^t Adj(B) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

0.25/ 0.25/

sustituimos en (*): $\boxed{X = \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}}} = -\mathbb{I}$ 0.5/

$\boxed{3B}$ $XA-2B=X$; $XA-X=2B$; $X(A-\mathbb{I})=2B$; llamamos $C=A-\mathbb{I} \Rightarrow XC=2B$; $XCC^{-1}=2BC^{-1}$

$\boxed{X=2B\cdot C^{-1}}$ (*)

0,25/

$C=A-\mathbb{I}=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 0.25/ ; $|C|=3-2=1 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$

$c_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=\boxed{-1}$ $c_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=\boxed{0}$ $c_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\boxed{1}$

0.5

$c_{21}=-\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=\boxed{3}$ $c_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}=\boxed{0}$ $c_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=\boxed{-2}$

$c_{31}=\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}=\boxed{0}$ $c_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=\boxed{1}$ $c_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}=\boxed{0}$

${}^{t}\mathrm{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=C^{-1}$ 0.5

sustituimos en (*):

1/

$\boxed{X=2\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1&4&1\\-1&3&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8&2\\-2&6&0\\0&2&-2\end{pmatrix}}$

$\boxed{4A}$ a) $\left.\begin{matrix}2x+y-z=0\\ax-y-z=a-1\\3x\quad-2az=a-1\end{matrix}\right\}\left(\underbrace{\begin{matrix}2&1&-1\\a&-1&-1\\3&0&-2a\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}0\\a-1\\a-1\end{matrix}\right.\right)$

$\begin{vmatrix}2&1&-1\\a&-1&-1\\3&0&-2a\end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=\boxed{2a^2+4a-6}=0$; $a^2+2a-3=0 \begin{matrix}\nearrow a=1\\ \searrow a=-3\end{matrix}$

0.25/

$a=1 \rightarrow \left(\begin{matrix}2&1&-1\\1&-1&-1\\3&0&-2\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right)$; $\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rgM=2$; $rgM=rgM^*$ pq. C_4, al ser todo ceros, se puede suprimir a efectos del rango 0.125/

$a=-3 \rightarrow \left(\begin{matrix}2&1&-1\\-3&-1&-1\\3&0&6\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\-4\\-4\end{matrix}\right.\right)$; $\begin{vmatrix}2&1\\-3&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rgM=2$; ¿rgM^*?: $|C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}2&1&0\\-3&-1&-4\\3&0&-4\end{vmatrix}=8-12-12\neq 0 \Rightarrow rgM^*=3$ 0.125/

conclusión:

I) $a\neq 1$ y $a\neq -3 \Rightarrow rgM=rgM^*=3=$ nº incógnitas $\xrightarrow[\text{TM. ROUCHÉ-FROBENIUS}]{}$ sist. comp. dtdo. 0.25/

II) $a=1 \Longrightarrow rgM=rgM^*=2<3=$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ sist. comp. indtdo. (uniparamétrico) 0.25/

III) $a=-3 \Longrightarrow rgM\neq rgM^* \Longrightarrow$ sist. incompatible 0.25/

b) ∞ soluc. ⇒ sist. comp. indtdo ⇒ $a=1$ → sobra una ecuación, y pasamos una incógnita como parámetro:

$\left.\begin{matrix}2x+y=\lambda\\x-y=\lambda\end{matrix}\right\}$ $\boxed{x=\dfrac{\begin{vmatrix}\lambda&1\\\lambda&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}}=\dfrac{-2\lambda}{-3}=\dfrac{2}{3}\lambda}$ 0.5/ ; $\boxed{y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&\lambda\\1&\lambda\end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{\lambda}{-3}=-\dfrac{\lambda}{3}}$ 0.5/ ; $\boxed{z=\lambda}$ 0.25/

$\boxed{4B}$ $\left.\begin{matrix}-x-y-z=-2\\(a-1)x+(a-1)y-2z=-2\\ax+(a+1)y\quad=1\end{matrix}\right\}\left(\begin{matrix}-1&-1&-1\\a-1&a-1&-2\\a&a+1&0\end{matrix}\left|\begin{matrix}-2\\-2\\1\end{matrix}\right.\right)$; $\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\a-1&a-1&-2\\a&a+1&0\end{vmatrix}=2a-(a+1)(a-1)+a(a-1)-2(a+1)=$

$=\cancel{2a}-\cancel{a^2}+1+\cancel{a^2}-a-\cancel{2a}-2=\boxed{-a-1}=0 \Rightarrow a=-1$

0.25/

$a=-1 \rightarrow \left(\begin{matrix}-1&-1&-1\\-2&-2&-2\\-1&0&0\end{matrix}\left|\begin{matrix}-2\\-2\\1\end{matrix}\right.\right)$; $\begin{vmatrix}-2&-2\\-1&0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rgM=2$; ¿rgM^*?: $|C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}-1&-1&-2\\-2&-2&-2\\-1&0&1\end{vmatrix}=2-2+4-2\neq 0 \Rightarrow rgM^*=3$

0.25/

conclusión:

I) $a\neq -1 \Rightarrow rgM=rgM^*=3=$ nº incógnitas $\xrightarrow{\text{TM. ROUCHÉ-FROBENIUS}}$ sist. comp. dtdo.

II) $a=-1 \Rightarrow rgM\neq rgM^* \Longrightarrow$ sist. incompatible

0.5/

b)

$\boxed{x=\dfrac{\begin{vmatrix}-2&-1&-1\\-2&a-1&-2\\1&a+1&0\end{vmatrix}}{-a-1}=\dfrac{2+2(a+1)+a-1-4(a+1)}{-a-1}=\dfrac{\cancel{2}+2a+\cancel{2}+a-1-4a-\cancel{4}}{-a-1}=\dfrac{-a-1}{-a-1}=1}$ 0.5/

$\boxed{y=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&-2&-1\\a-1&-2&-2\\a&1&0\end{vmatrix}}{-a-1}=\dfrac{4a-(a-1)-2a-2}{-a-1}=\dfrac{4a-a+1-2a-2}{-a-1}=\dfrac{a-1}{-a-1}=\dfrac{1-a}{a+1}}$ 0.5/

0.5/

$\boxed{z=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&-1&-2\\a-1&a-1&-2\\a&a+1&1\end{vmatrix}}{-a-1}=\dfrac{-(a-1)+2a-2(a+1)(a-1)+2a(a-1)-2(a+1)+a-1}{-a-1}=\dfrac{\cancel{-a}+1+\cancel{2a}-\cancel{2a^2}+\cancel{2}+\cancel{2a^2}-\cancel{2a}-2a-\cancel{2}+\cancel{a}-1}{-a-1}=\dfrac{-2a}{-a-1}=\dfrac{2a}{a+1}}$

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de A-**I**, siendo **I** la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial XA-2B=X

2. a) Discutir el sistema $\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=0 \\ ax-y-z&=a-1 \\ 3x-2az&=a-1 \end{aligned}\right\}$ en función del parámetro a .

b) Resolverlo para a=1

3. Dados los puntos A(1,-2,0), B(-2,4,4) y C(3,-1,-1)

a) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

b) Hallar el volumen del tetraedro que tiene por vértices los tres puntos anteriores y el origen.

c) Hallar un vector $\perp$ a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

d) Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta $\perp$ al plano determinado por A, B y C, y que pasa por B

4. Dadas las rectas $\left.\begin{aligned} x&=1+3\lambda \\ y&=-2-\lambda \\ z&=\quad\ \lambda \end{aligned}\right\}$ y $\frac{x+1}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-2}$

a) Razonar que son paralelas, pero no coincidentes.

b) Hallar la ecuación general del plano que definen.

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

①

a) $A-\mathbb{I}=\begin{pmatrix}5&4&-1\\-2&3&3\\1&6&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&-1\\-2&2&3\\1&6&3\end{pmatrix}=C$; $\det C=24+12+12+2-72+24=2\Rightarrow\exists\, C^{-1}$

$C_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\6&3\end{vmatrix}=\boxed{-12}$ $C_{12}=-\begin{vmatrix}-2&3\\1&3\end{vmatrix}=\boxed{9}$ $C_{13}=\begin{vmatrix}-2&2\\1&6\end{vmatrix}=\boxed{-14}$

$C_{21}=-\begin{vmatrix}4&-1\\6&3\end{vmatrix}=\boxed{-18}$ $C_{22}=\begin{vmatrix}4&-1\\1&3\end{vmatrix}=\boxed{13}$ $C_{23}=-\begin{vmatrix}4&4\\1&6\end{vmatrix}=\boxed{-20}$

$C_{31}=\begin{vmatrix}4&-1\\2&3\end{vmatrix}=\boxed{14}$ $C_{32}=-\begin{vmatrix}4&-1\\-2&3\end{vmatrix}=\boxed{-10}$ $C_{33}=\begin{vmatrix}4&4\\-2&2\end{vmatrix}=\boxed{16}$

$\mathrm{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-12&9&-14\\-18&13&-20\\14&-10&16\end{pmatrix}\Rightarrow{}^t\mathrm{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-12&-18&14\\9&13&-10\\-14&-20&16\end{pmatrix}$

$\Rightarrow C^{-1}=\dfrac{1}{\det(C)}\cdot{}^t\mathrm{Adj}(C)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-12&-18&14\\9&13&-10\\-14&-20&16\end{pmatrix}$ 1.5

b) $XA-2B=X$

$XA-X=2B$

$X(A-\mathbb{I})=2B$

$X\cdot C=2B\Rightarrow\boxed{X=2B\cdot C^{-1}}$ 0.5

$\Uparrow$

$X=\cancel{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\begin{pmatrix}-12&-18&14\\9&13&-10\\-14&-20&16\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-21&-31&24\\-1&-3&2\\-50&-74&58\end{pmatrix}}$ 0.5

---

②

$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&0\\a&-1&-1&a-1\\3&0&-2a&a-1\end{array}\right)}_{M}=M^*$

a) ¿$\mathrm{rg}\,M$?

$\begin{vmatrix}2&1&-1\\a&-1&-1\\3&0&-2a\end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6=0;\ a^2+2a-3=0$ $\nearrow a=1$ $\searrow a=-3$

I) $a\neq1$ y $a\neq-3\Rightarrow \mathrm{rg}\,M=3=\mathrm{rg}\,M^*=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

II) $a=1\rightarrow M=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-1&-1\\3&0&-2\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\mathrm{rg}\,M=2$

III) $a=-3\rightarrow M=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&-1&-1\\3&0&6\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&1\\-3&-1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\mathrm{rg}\,M=2$

¿$\mathrm{rg}\,M^*$ para $a=1$? $\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&-1&-1&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow\mathrm{rg}\,M^*=\mathrm{rg}\,M$ (pues ampliamos con una columna de ceros)

¿$\mathrm{rg}\,M^*$ para $a=-3$? $\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\-3&-1&-1&-4\\3&0&6&-4\end{pmatrix}$; $|C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}2&1&0\\-3&-1&-4\\3&0&-4\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\mathrm{rg}\,M^*=3$

en resumen: I) $a\neq1$ y $a\neq-3\Rightarrow\mathrm{rg}\,M=3=\mathrm{rg}\,M^*=$ nº incógnitas $\xrightarrow[\text{-FRÖBENIUS}]{\text{TH. ROUCHÉ-}}$ S.C.D. 0.5

II) $a=1\Rightarrow\mathrm{rg}\,M=\mathrm{rg}\,M^*=2<3\Rightarrow$ S.C.I uniparamétrico 0.5

III) $a=-3\Rightarrow\mathrm{rg}\,M\neq\mathrm{rg}\,M^*\Rightarrow$ S.I. 0.5

b) Para $a=1$ es S.C.I. $\Rightarrow$ para resolverlo por Cramer, sobra una ecuación (p.ej. la 3.ª), y pasamos una incógnita al otro miembro como parámetro (p.ej. la z):

$\left.\begin{array}{l}2x+y=\lambda\\x-y=\lambda\end{array}\right\}$ $|M|=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3$;

$\boxed{x=\dfrac{\begin{vmatrix}\lambda&1\\\lambda&-1\end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{-2\lambda}{-3}=\dfrac{2}{3}\lambda}$

$\boxed{y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&\lambda\\1&\lambda\end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{\lambda}{-3}=-\dfrac{1}{3}\lambda}$ 1

$\boxed{z=\lambda}$

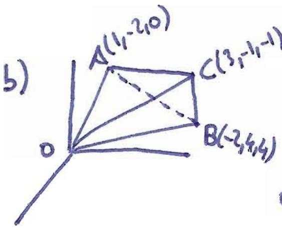
(nótese que se trata de un sist. homogéneo; además, es mejor no eliminar la 3ª ecuación, pues así despejamos x directamente!)

③

③ a) $\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = B-A = (-3,6,4) \\ \vec{AC} = C-A = (2,1,-1)\end{array}\right\}$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \dfrac{-\cancel{6}+\cancel{6}-4}{\sqrt{9+36+16}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{-4}{\sqrt{61}\sqrt{6}} \simeq -0{,}2091$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos(-0{,}2091) \simeq 102^\circ 4' 7''}$ 0.5

b)



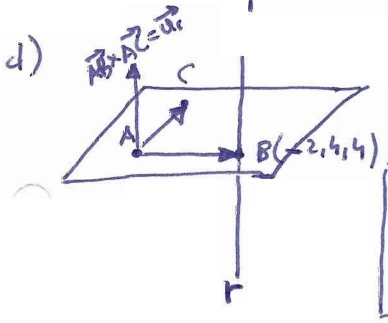
$\left.\begin{array}{l}\vec{OA} = (1,-2,0) \\ \vec{OB} = (-2,4,4) \\ \vec{OC} = (3,-1,-1)\end{array}\right\}$ $\boxed{Vol_{OABC} = \frac{1}{6}\left|[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 4\\ 3 & -1 & -1\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-20| = \frac{10}{3}u^3}$

0.75

c)

$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 6 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = -10\vec{i}+5\vec{j}-15\vec{k} = (-10,5,-15) \longrightarrow \boxed{(2,-1,3)}$ 0.25

d)



la recta queda determinada por: $\left.\begin{array}{l}B(-2,4,4) \\ \vec{u_r} = (2,-1,3)\end{array}\right\}$

$\boxed{\left.\begin{array}{l}x = -2+2\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = 4+3\lambda\end{array}\right\}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{3}}$ 1

PARAMÉTRICAS

CONTINUA

---

④ a) $\left.\begin{array}{l}x = 1+3\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = \lambda\end{array}\right\}$ $\dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$

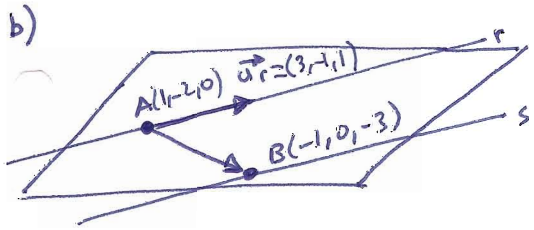
son paralelas pues sus vectores directores son proporcionales:

$\vec{u_r} = (3,-1,1)$ 0.25

$\vec{u_s} = (-6,2,-2)$

pero no son coincidentes pq. si escogemos un punto de r, p.ej. (1,-2,0) y lo sustituimos en s, vemos que no pertenece a ella: $\dfrac{2}{-6} \neq \dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{3}{-2}$ 0.75

b)



Vemos en el dibujo que el plano queda determinado por:

$\left.\begin{array}{l}A(1,-2,0) \\ \vec{u_r} = (3,-1,1) \\ \vec{AB} = B-A = (-2,2,-3)\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow -(x-1)-7(y+2)-4z = 0;$

$-x-7y-4z-13=0;$

$\boxed{x+7y+4z+13=0}$ 1.5

1. Resolver la ecuación matricial AX-BCX=A siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

2. a) Discutir el sistema $\left.\begin{array}{r}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\ mx-y+z=2\\ x+my-z=1\end{array}\right\}$ en función del parámetro m .

b) Resolverlo para m=1

3. Dados los puntos A(-1,-1,0), B(-1,1,4), C(0,-1,1) y D(1,2,-1)

a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos anteriores.

b) Hallar la ecuación general del plano determinado por los puntos A, B y C

c) Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta perpendicular al plano anterior y que pasa por D.

4. Dadas las rectas $\left.\begin{array}{l}x=-4+6\lambda\\ y=-5+8\lambda\\ z=\ 8-4\lambda\end{array}\right\}$ y $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{-1}$

a) Razonar que se cortan en el punto P(2,3,4)

b) Hallar la ecuación general del plano que definen.

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

① $AX-BCX=A;\ (A-BC)\cdot X=A;\ D=A-BC \Rightarrow D\cdot X=A;\ D^{-1}\cdot D\cdot X=D^{-1}\cdot A;\ \boxed{X=D^{-1}\cdot A}$

1

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix};\ |D|=-1$$

0.25

0.75

$$Adj(D)=\begin{pmatrix}-7&-5&6\\1&1&-1\\3&2&-3\end{pmatrix};\ D^{-1}=\frac{1}{|D|}\cdot{}^{t}Adj(D)=-\begin{pmatrix}-7&1&3\\-5&1&2\\6&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}$$

0.25

$$X=D^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}11&-13&21\\8&-9&16\\-10&12&-18\end{pmatrix}}$$

0.25

---

② a) $\left(\begin{array}{ccc|c}m+2&m-1&-1&3\\m&-1&1&2\\1&m&-1&1\end{array}\right)$ ¿rg M?

$$\begin{vmatrix}m+2&m-1&-1\\m&-1&1\\1&m&-1\end{vmatrix}=m+\cancel{2}+m-\cancel{1}-m^2-\cancel{1}-m(m+2)+m(m-1)=$$

$$=\cancel{2m}-m^2-\cancel{m^2}-\cancel{2m}+\cancel{m^2}-m=-m^2-m=0;$$

$m^2+m=0;\ m(m+1)=0 \nearrow m= \ \searrow m=-1$

$m\neq0$ y $m\neq-1 \Rightarrow rg M=3=rg M^*$

$m=0 \rightarrow M=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}2&-1\\0&-1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow rg M=2$

$m=-1 \rightarrow M=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}1&-2\\-1&-1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow rg M=2$

$rg M^*$ para $m=0 \rightarrow M^*=\begin{pmatrix}2&-1&-1&3\\0&-1&1&2\\1&0&-1&1\end{pmatrix};\ |C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&-1&2\\1&0&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow rg M^*=3$

$rg M^*$ para $m=-1 \rightarrow M^*=\begin{pmatrix}1&-2&-1&3\\-1&-1&1&2\\1&-1&-1&1\end{pmatrix};\ |C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}1&-2&3\\-1&-1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow rg M^*=3$

conclusión:

I) $m\neq0$ y $m\neq-1 \Rightarrow rg M=rg M^*=3=$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D.

II) $m=0$ o $m=-1 \Rightarrow rg M\neq rg M^*=2 \xRightarrow{\text{TH. ROUCHÉ-FRÖBENIUS}}$ S.I

0.5

1

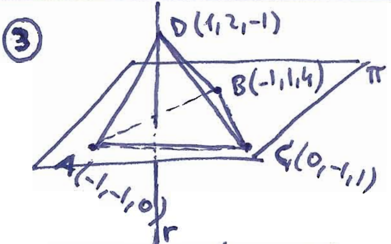
b) para $m=1$ es S.C.D. (soluc. única): $|M|=-m^2-m \xrightarrow{m=1} |M|=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&-1&3\\1&-1&1&2\\1&1&-1&1\end{array}\right);\ x=\frac{\begin{vmatrix}3&0&-1\\2&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2};\ y=\frac{\begin{vmatrix}3&3&-1\\1&2&1\\1&1&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1;\ z=\frac{\begin{vmatrix}3&0&3\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

0.33 0.33 0.33

---

③



$\vec{AB}=B-A=(0,2,4)$

$\vec{AC}=C-A=(1,0,1)$

$\vec{AD}=D-A=(2,3,-1)$

a) $Vol_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0&2&4\\1&0&1\\2&3&-1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot18=\boxed{3u^3}$

0.5

b) El plano π queda determinado por $\{A, \vec{AB}$ y $\vec{AC}\}$:

$$\begin{vmatrix}x+1&y+1&z\\0&2&4\\1&0&1\end{vmatrix}=0;\ 2(x+1)+4(y+1)-2z=0$$

$$2x+4y-2z+6=0$$

$$\boxed{x+2y-z+3=0}$$

1

c) A la vista del dibujo, el vector director de la recta pedida es el $\vec{n_\pi}$ del plano anterior; por lo tanto, la recta queda determinada por:

$$\left.\begin{array}{l} D(1,2,-1) \\ \vec{u_r}=\vec{u_\pi}=(1,2,-1) \end{array}\right\} \boxed{\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right\}} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}}$$

PARAMÉTRICAS

CONTINUA

1

---

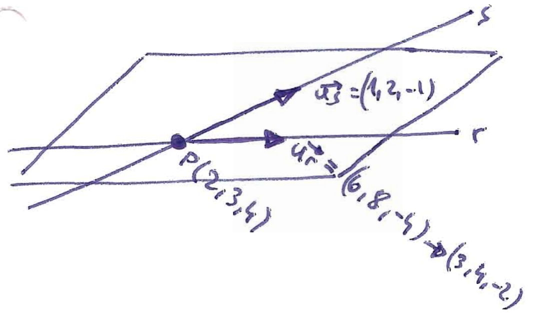
④ $$\left.\begin{array}{l} x=-4+6\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=8-4\lambda \end{array}\right\}:r \; ; \; s: \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

a) sustituimos P en r:
$$\left.\begin{array}{l} 2=-4+6\lambda \to \lambda=1 \\ 3=-5+8\lambda \to \lambda=1 \\ 4=8-4\lambda \to \lambda=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\in r$$

sustituimos P en s:
$$\frac{-1}{1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1} \Rightarrow s\in r$$

0.75

además, como sus vectores directores no son proporcionales, concluimos que las rectas se cortan:



b) A la vista del dibujo, el plano queda determinado por

$$\left.\begin{array}{l} P(2,3,4) \\ \vec{u_r}=(3,4,-2) \\ \vec{u_s}=(1,2,-1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \, ;$$

0.75

$$0\cdot(x-2)+y-3+2(z-4)=0 \, ; \boxed{y+2z-11=0}$$

1

1. **a)** Resolver: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar el valor de $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$

2. Resolver la ecuación matricial CX+AB=C siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **a)** Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ ax+y-z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo para a=1

4. Dados $\vec{u}=(-1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,1,0)$

a) Hallar **a** y **b** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\perp$ a $\vec{w}=(a,1,b)$

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{x}=(-1,1,0)$ y unitario.

① a)

$$\begin{vmatrix}3&2&2&1\\1&1&1&2\\4&3&\boxed{1}&3\\4&3&0&2\end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\F_2-F_3\\F_1-2F_3}}{=} \begin{vmatrix}-5&-4&0&-5\\-3&-2&0&-1\\\cancel{4}&\cancel{3}&\cancel{1}&\cancel{3}\\4&3&0&2\end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\\text{desarrollo}\\\text{por } C_3}}{=} \begin{vmatrix}-5&-4&-5\\-3&-2&-1\\4&3&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5&4&5\\3&2&1\\4&3&2\end{vmatrix} = 20+16+45-40-15-24=\boxed{2}$$

1/

b)

$$\begin{vmatrix}2g&2h&2i\\a&b&c\\d+2a&e+2b&f+2c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2g&2h&2i\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix} + \overset{0 \text{ pq. } F_3=2F_2}{\cancel{\begin{vmatrix}2g&2h&2i\\a&b&c\\2a&2b&2c\end{vmatrix}}} = 2\begin{vmatrix}g&h&i\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2\begin{vmatrix}g&h&i\\d&e&f\\a&b&c\end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2\overset{4}{\cancel{\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}}} = \boxed{8}$$

1/

---

② $CX+AB=C$; $CX=C-AB$; $\underbrace{C^{-1}\cdot C}_{I}\cdot X = C^{-1}\cdot(C-AB) \Rightarrow X = C^{-1}\cdot(C-AB)$ (*) 0.25

$$C-AB=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-4&7\\0&4&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&7&-8\\1&-4&11\end{pmatrix}$$

0.5/

¿C^{-1}? $\det C = 1 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$;

$$c_{11}=\begin{vmatrix}3&-1\\0&1\end{vmatrix}=3 \qquad c_{12}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2 \qquad c_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix}=-3$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}-2&3\\0&1\end{vmatrix}=2 \qquad c_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1 \qquad c_{23}=-\begin{vmatrix}2&-2\\1&0\end{vmatrix}=-2$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}-2&3\\3&-1\end{vmatrix}=-7 \qquad c_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=5 \qquad c_{33}=\begin{vmatrix}2&-2\\1&3\end{vmatrix}=8$$

$$\operatorname{Adj} C=\begin{pmatrix}3&-2&-3\\2&-1&-2\\-7&5&8\end{pmatrix}\rightarrow {}^t\operatorname{Adj} C=\begin{pmatrix}3&2&-7\\-2&-1&5\\-3&-2&8\end{pmatrix}=C^{-1}$$

1.5

Sustituimos en (*):

$$X=\begin{pmatrix}3&2&-7\\-2&-1&5\\-3&-2&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&7&-8\\1&-4&11\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-8&36&-81\\5&-23&55\\9&-40&92\end{pmatrix}}$$

0.75/

---

③ $\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&a&1\\5&3&3&2\\a&1&-1&0\end{array}\right)$

a) $\begin{vmatrix}3&2&a\\5&3&3\\a&1&-1\end{vmatrix}=-9+6a+5a-3a^2-9+10=-3a^2+11a-8=0 \begin{array}{l}\nearrow a=1\\\searrow a=8/3\end{array}$

I) $\boxed{a\neq1 \text{ y } a\neq 8/3 \Rightarrow rg\,M=3=rg\,M^*=n \Rightarrow SCD}$ 0.5/

II) $a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&1\\5&3&3&2\\1&1&-1&0\end{array}\right)$; $rg\,M=2$ pq. $\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}\neq0$

$|C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}3&2&1\\5&3&2\\1&1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow rg\,M^*=2$

$\boxed{a=1\Rightarrow rg\,M=rg\,M^*=2<3\Rightarrow SCI \text{ uniparamétrico}}$ 0.5/

III) $a=8/3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&8/3&1\\5&3&3&2\\8/3&1&-1&0\end{array}\right)$; $rg\,M=2$ pq. $\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}\neq0$

$|C_1,C_2,C_4|=\begin{vmatrix}3&2&1\\5&3&2\\8/3&1&0\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow rg\,M^*=3$

$\boxed{a=8/3\Rightarrow rg\,M\neq rg\,M^*\Rightarrow SI}$ 0.5/

b) $a=1\Rightarrow rg\,M=rg\,M^*=2\Rightarrow$ sobra una ecuación, p.ej. E_2) y pasamos la z como parámetro λ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&1\\1&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y=1-\lambda\\x+y=\lambda\end{array}\right\}\quad |M|=\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=1;$$

$\boxed{x}=\dfrac{\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\\lambda&1\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{1-\lambda-2\lambda}{1}=\boxed{1-3\lambda}$ 0.5/ ; $\boxed{y}=\dfrac{\begin{vmatrix}3&1-\lambda\\1&\lambda\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{3\lambda-1+\lambda}{1}=\boxed{-1+4\lambda}$ 0.5/ ; $\boxed{z=\lambda}$ 0.5/

---

④ $\vec{u}=(-1,2,1)$ $\vec{v}=(1,1,0)$

a) 1ª forma: (por prod. esc) $\vec{u}\perp\vec{w}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{w}=0\rightarrow(-1,2,1)\cdot(a,1,b)=0$; $-a+2+b=0$

$\vec{v}\perp\vec{w}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0\rightarrow(1,1,0)\cdot(a,1,b)=0$; $a+1=0\Rightarrow\boxed{a=-1}\Rightarrow\boxed{b=-3}$

otra forma: (por prod. vect) $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ y $\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1,1,-3)$ comparándolo con $\vec{w}=(a,1,b)\Rightarrow\boxed{a=-1}\ \boxed{b=-3}$ 0.75/

b) $$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{(-1,2,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\frac{-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{12}}\Rightarrow\boxed{\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{12}}\simeq73^\circ\,13'\,17''}$$ 0.5/

c) $\vec{u}\times\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=(-1,-1,1)\perp\vec{u}$ y $\vec{x}$; para que sea unitario lo dividimos por su módulo: $|\vec{u}\times\vec{x}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Solución:}}$ $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ 0.75/ (nota: también vale el opuesto: $(\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3,-\sqrt{3}/3)$)

1. **a)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$, utilizar las propiedades de los determinantes, indicando paso a paso las transformaciones realizadas, para hallar el valor de $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$

a) Resolver por Laplace, haciendo ceros previamente: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

2. Resolver la ecuación matricial AB=XC siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

3. **a)** Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y + az = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo para a=0

☐ *Elige una de estas dos preguntas:*

4. Dados $\vec{u} = (a,2,3)$, $\vec{v} = (3,2,a)$ y $\vec{w} = (a,-2,1)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{w}$ sea $\perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios.

5. Hallar la ecuación general o implícita del plano que pasa por el punto P(1,2,3) y contiene a la recta

$$\left.\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{array}\right\}$$

NOTA: *El alumno deberá resolver cuatro preguntas. Todas las preguntas tienen el mismo valor, 2.5 puntos.*

① a) $$\begin{vmatrix}2a+3d & 4c+6f & 2b+3e\\ -d & -2f & -e\\ g & 2i & h\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2a&4c&2b\\-d&-2f&-e\\g&2i&h\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3d&6f&3e\\-d&-2f&-e\\g&2i&h\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}a&2c&b\\d&2f&e\\g&2i&h\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}a&c&b\\d&f&e\\g&i&h\end{vmatrix} \underset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} 4\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = \boxed{4}$$

0 pq. $F_1=-3F_2$

1

1.25

b) $$\begin{vmatrix}3&2&2&4\\0&-1&5&\boxed{1}\\2&1&3&2\\4&3&2&6\end{vmatrix} \underset{\substack{C_2+C_4\\C_3-5C_4}}{=} \begin{vmatrix}3&6&-18&4\\ 0&0&0&1\\2&3&-7&2\\4&9&-28&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&6&-18\\2&3&-7\\4&9&-28\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&2&6\\2&3&7\\4&9&28\end{vmatrix} = -3(84+56+108-72-63-112) = -3\cdot(+1) = \boxed{-3}$$

1.25

---

② $A\cdot B = X\cdot C \Rightarrow A\cdot B\cdot C^{-1} = X$ (*) 0.5 $\qquad \det C = 6+2-9+2 = 1 \Rightarrow \exists C^{-1}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-4&7\\0&4&-10\end{pmatrix}$$ 0.25

$$c_{11} = \begin{vmatrix}3&0\\-1&1\end{vmatrix} = 3 \quad c_{12} = -\begin{vmatrix}-2&0\\3&1\end{vmatrix} = 2 \quad c_{13} = \begin{vmatrix}-2&3\\3&-1\end{vmatrix} = -7$$
$$c_{21} = -\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix} = -2 \quad c_{22} = \begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix} = -1 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix} = 5$$
$$c_{31} = \begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix} = -3 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix}2&1\\-2&0\end{vmatrix} = -2 \quad c_{33} = \begin{vmatrix}2&1\\-2&3\end{vmatrix} = 8$$

$${}^t\text{Adj}\,C = C^{-1} = \begin{pmatrix}3&-2&-3\\2&-1&-2\\-7&5&8\end{pmatrix}$$ 1.25/

$$X = \begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-4&7\\0&4&-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-3\\2&-1&-2\\-7&5&8\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}10&-7&-11\\-48&33&55\\78&-54&-88\end{pmatrix}}$$ 0.5

---

③ $$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&a&3\\2&1&1&1\\a&1&1&1\end{array}\right)$$

a) $$|M| = \begin{vmatrix}3&1&a\\2&1&1\\a&1&1\end{vmatrix} = 3+a+2a-a^2-3-2 = -a^2+3a-2 = 0 \begin{cases}a=1\\a=2\end{cases}$$

I) $\boxed{a\neq1 \text{ y } a\neq2} \Rightarrow rg M = 3 = rg M^* \Rightarrow \boxed{\text{S.C.D.}}$ 0.25/

II) $a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$; $rg M = 2$ pq. $\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}\neq0$

$|C_1,C_2,C_3| = \begin{vmatrix}3&1&3\\2&1&1\\1&1&1\end{vmatrix} = 3+1+6-3-2-3 \neq 0 \Rightarrow rg M^* = 3$

$\boxed{a=1 \Rightarrow rg M \neq rg M^* \Rightarrow \text{S.I.}}$ 0.5/

III) $\boxed{a=2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&2&3\\2&1&1&1\\2&1&1&1\end{array}\right)$; $rg M = rg M^* = 2$ pq. $\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}\neq0 \Rightarrow \boxed{\text{SCI}}$ uniparamétrico 0.5/

b) $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&0&3\\2&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right)$; $|M| = -2$;

$$\boxed{x} = \frac{\begin{vmatrix}3&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{-2} = \boxed{0}; \quad \boxed{y} = \frac{\begin{vmatrix}3&3&0\\2&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = \boxed{3}; \quad \boxed{z} = \frac{\begin{vmatrix}3&1&3\\2&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}}{-2} = \frac{4}{-2} = \boxed{-2}$$

0.5/ 0.5/ 0.25/

---

④ a) $\vec{w}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \rightarrow (a,-2,1)\cdot(a,2,3) = a^2-4+3 = a^2-1 = 0;\ a^2 = 1;\ a = \pm1$

$\vec{w}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow (a,-2,1)\cdot(3,2,a) = 3a-4+a = 4a-4 = 0;\ a = 1$

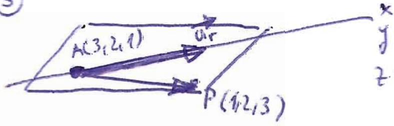
para que se verifique a la vez ha de ser $\boxed{a=1}$ 1.25

b) $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ coplanarios $\Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}a&2&3\\3&2&a\\a&-2&1\end{vmatrix} = 0$; $2a+2a^2-18-6a+2a^2-6 = 4a^2-4a-24 = 0$

$a^2-a-6 = 0 \begin{cases}\boxed{a=-2}\\\boxed{a=3}\end{cases}$ 1.25

---

⑤



$$\begin{cases}x = 3+\lambda\\ y = 2+2\lambda\\ z = 1+3\lambda\end{cases} \qquad \begin{cases}P(1,2,3)\\ \vec{u_r} = (1,2,3)\\ \vec{AP} = (-2,0,2)\end{cases}$$

0.5

$$\begin{vmatrix}x-1&y-2&z-3\\1&2&3\\-2&0&2\end{vmatrix} = 0;\quad 4(x-1)-8(y-2)+4(z-3) = 0$$

0.5

$4x-8y+4z = 0$

$\boxed{x-2y+z=0}$ 1.5