DISCUSIÓN y RESOLUCIÓN de

SS.EE.LL.

*El alemán Ferdinand Georg **Frobenius** (1849-1917), quien completó el enunciado y demostración del teorema formulado en 1875 por el francés Eugène **Rouché** (1832-1910)*

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I. INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES [1]

Concepto de SS.EE.LL.: Conviene recordar qué era un sistema de ecuaciones lineales (abreviado, SS.EE.LL.), algo ya visto en cursos anteriores. Por ejemplo, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$$

es un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (abreviadamente, 2x2). Su solución es única, como puede comprobarse: x=1, y=2. Nótese que la solución, aunque única, está formada por una pareja de números (¡No son dos soluciones!). Un sistema tal con solución única recibe el nombre de **compatible determinado**. El adjetivo lineal se aplica porque las incógnitas no aparecen elevadas a un exponente, ni multiplicadas entre sí, ni dividiendo, ni dentro de una raíz, etc, sino formando lo que en temas anteriores hemos definido como una combinación lineal[2].

Por su parte, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ -4x-6y=-16 \end{array}\right\}$$

puede comprobarse que tiene ∞ soluciones, no sólo la x=1, y=2 anterior, sino también x=4, y=0; x=7, y=-2; x=-2, y=4, etc. Un sistema con ∞ soluciones se llama **compatible indeterminado**. La razón, recuérdese, salta a la vista: la 2ª ecuación (en adelante, E_2) es proporcional a la 1ª (E_1), por lo que puede eliminarse, quedando E_1, ecuación con 2 incógnitas, que obviamente se satisfará para ∞ pares x, y.

Finalmente, puede comprobarse que

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ -4x-6y=10 \end{array}\right\}$$

carece de solución, ya que si simplificamos E_2:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 2x+3y=-5 \end{array}\right\}$$

vemos que es imposible que una misma expresión sea a la vez igual a dos números diferentes. Un sistema que carece de solución se llama **incompatible**.

Cuadro resumen[3]:

TIPOS DE SISTEMAS (desde el p. de v. del nº de soluciones)
- COMPATIBLE: Tiene solución
  - DETERMINADO: solución única
  - INDETERMINADO: ∞ soluciones
- INCOMPATIBLE: No tiene solución

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 30 y 31 del libro de ed. Anaya.

[2] Por ejemplo, el siguiente sistema sería no lineal:

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+3xy=8 \\ \frac{1}{x}-\sqrt{y}=-1 \end{array}\right\}$$

[3] Ver pág. 32 del libro de ed. Anaya.

Recordamos de cursos pasados que en principio había tres métodos para resolver este tipo de sistemas: sustitución, igualación y reducción. Nosotros este curso vamos a utilizar el método de reducción; en concreto un caso particular, llamado **método de Gauss** (lo veremos en este apartado). Además, también veremos un método mejor, la **regla de Cramer** (apdo III), que utiliza determinantes. Por otra parte, los sistemas que abordaremos habitualmente serán 3x3.

Notación matricial de un SS.EE.LL.[4]: Sea un SS.EE.LL. 3x3 genérico:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{array}\right\}$$

Es obvio comprobar que dicho sistema puede expresarse en notación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

M=matriz de coeficientes, o del sistema

X=matriz de incógnitas

B=matriz de términos independientes

Es decir, **MX=B**. Si la matriz de coeficientes o **matriz del sistema, M**, la orlamos con la columna de términos independientes se obtiene la llamada **matriz ampliada, M***, que va a jugar un papel fundamental a lo largo del tema:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M^*=\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

M=matriz de coeficientes, o del sistema

M*=matriz ampliada

Expresar un sistema en forma matricial tiene gran utilidad, pues permite resolverlo, en ciertos casos, utilizando la matriz inversa:

Ejemplo 1: Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=4 \\ 5x+2y+3z=6 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

Lo expresamos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, $MX=B \Rightarrow M^{-1}MX=M^{-1}B \Rightarrow \mathbb{1}\,X=M^{-1}B \Rightarrow \boxed{X=M^{-1}B}$

---

[4] Ver pág. 113 del libro de ed. Anaya.

Calculemos, por tanto, M^{-1}, la inversa de la matriz del sistema:

$$M=\begin{pmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow |M|= \qquad\qquad \Rightarrow \exists M^{-1}\Rightarrow \text{ El sistema tiene solución única (comp. dtdo.)}$$

$$M=\begin{pmatrix}\overset{+}{3}&\overset{-}{1}&\overset{+}{1}\\ \overset{-}{5}&\overset{+}{2}&\overset{-}{3}\\ \overset{+}{1}&\overset{-}{0}&\overset{+}{1}\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{lll} M_{11}= & M_{12}=- & M_{13}= \\ M_{21}=- & M_{22}= & M_{23}=- \\ M_{31}= & M_{32}=- & M_{33}= \end{array}\right\}Adj(M)=$$

$$\longrightarrow {}^{t}Adj(M)= \qquad \longrightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot{}^{t}Adj(M)= \qquad \longrightarrow X=M^{-1}\cdot B=$$

Ejercicios final tema: 1

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 113: 1 y 2; pág. 120 y ss.: 13, 14 y 20 (Expresar y resolver en forma matricial)

Reseña histórica: Como vimos en el tema anterior, el italiano Gerolamo **Cardano** (1501-1576) utilizó determinantes en 1545 para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. El alemán Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716) hizo lo propio en 1693 en relación con los sistemas de ecuaciones lineales de mayor orden. En 1748, en un tratado póstumo de álgebra del escocés Colin MacLaurin (1698-1746) aparece la regla para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuando n es 2, 3 o 4 mediante el uso de determinantes. En 1750, el suizo Gabriel **Cramer** (1704-1752) da la regla para el caso general, aunque no ofrece demostración alguna.

En 1875 el francés Eugène **Rouché** (1832-1910) enunció el famoso teorema sobre la existencia de soluciones de un SS.EE.LL. Posteriormente, varios matemáticos se disputaron su demostración, aunque fue el alemán Ferdinand Georg **Frobenius** (1849-1917) quien completó su enunciado y demostración, zanjando el tema.

Método de Gauss[5] de resolución de SS.EE.LL.: Es similar al procedimiento visto en el tema anterior para resolver determinantes o hallar el rango de una matriz, mediante la aplicación de las 6 operaciones reseñadas en su día. Ahora bien, conviene matizar dichas operaciones, pues en el tema anterior aludían a filas o columnas, mientras que aquí sólo pueden referirse a ecuaciones (es decir, filas); evidentemente, y por ejemplo, no tiene sentido permutar columnas, pues se alteraría el sistema. Por tanto, el método de Gauss es un método de reducción. Las operaciones permitidas para lograr **sistemas equivalentes, es decir, que tengan la misma solución**, son:

3 transformaciones permitidas entre sistemas (i.e. para obtener un sistema equivalente):

1ª) **Podemos permutar 2 ecuaciones del sistema** para obtener un sistema equivalente.

En efecto, el hecho de que permutemos dos ecuaciones no va a hacer que cambien las soluciones del sistema.

2ª) **Podemos multiplicar** (o dividir) **cualquier ecuación del sistema por un número** (≠0) para lograr un sistema equivalente.

---

[5] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), físico y matemático alemán, apodado “El Príncipe de las Matemáticas”. Se puede profundizar sobre este método en las págs.. 36-38 y 39 del libro de ed. Anaya.

En efecto, el hecho de que multipliquemos una ecuación por un número (≠0) tampoco va a hacer que cambie su solución; en todo caso, cambiará el aspecto del sistema.

3ª) **A una ecuación podemos sumarle** (o restarle) **una combinación lineal de las restantes** y el sistema seguirá siendo equivalente.

Ídem.

3 supresiones permitidas en un sistema (el sistema resultante será equivalente):

1ª) **Podemos suprimir ecuaciones nulas** y el sistema resultante será equivalente al anterior.

En efecto, si al aplicar las transformaciones permitidas obtenemos en un momento dado una expresión 0=0, dicha expresión no aporta nada, será espuria.

2ª) **Podemos suprimir una ecuación proporcional a otra**, resultando así un sistema equivalente.

En efecto, el hecho de que exista una ecuación proporcional a otra no aporta nada al sistema, es decir, si suprimimos una de las dos (¡No las dos!) evidentemente no variará su solución.

3ª) **Podemos suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las restantes**.

La razón es análoga a la del caso anterior:

Método de Gauss: «Mediante las 6 operaciones anteriores hacemos 0 debajo de la diagonal, hasta transformar el sistema en triangular inferior; en ese momento podemos empezar a resolverlo fácilmente, normalmente de abajo a arriba»

Ejemplo 2: Resolvamos el sistema del ejemplo anterior, esta vez por Gauss. Tenemos que empezar permutando E1 y E3 para conseguir un pivote (x o –x) en la posición inicial:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=4\\ 5x+2y+3z=6\\ x\qquad +z=0\end{array}\right\} \xrightarrow[E_1\leftrightarrows E_3]{} \left.\begin{array}{r} x\qquad +z=0\\ 5x+2y+3z=6\\ 3x+y+z=4\end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{E_2=E_2-5E_1\\ E_3=E_3-3E_1}]{} \left.\begin{array}{r} x\qquad +z=0\\ 2y-2z=6\\ y-2z=4\end{array}\right\} \xrightarrow[E_2\leftrightarrows E_3]{} \left.\begin{array}{r} x\qquad +z=0\\ y-2z=4\\ 2y-2z=6\end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-2E_2]{} \left.\begin{array}{r} x\qquad +z=0\\ y-2z=4\\ 2z=-2\end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{z=-1} \xrightarrow[\text{en } E_2]{\text{sustituimos}} y+2=4;\ \boxed{y=2} \xrightarrow[\text{en } E_1]{\text{sustituimos}} x-1=0;\ \boxed{x=1}$$

En la práctica este procedimiento se realiza de forma más cómoda y rápida en forma matricial, prescindiendo de las incógnitas, es decir, con la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 3 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[E_1\leftrightarrows E_3]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 3 & 6\\ 3 & 1 & 1 & 4\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2=E_2-5E_1\\ E_3=E_3-3E_1}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -2 & 4\end{array}\right) \xrightarrow[E_2\leftrightarrows E_3]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -2 & 6\end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-2E_2]{} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right)\\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z\end{array}\end{array} \longrightarrow 2z=-2;\ \boxed{z=-1} \xrightarrow[\text{en } E_2]{\text{sustituimos}} y+2=4;\ \boxed{y=2} \xrightarrow[\text{en } E_1]{\text{sustituimos}} x-1=0;\ \boxed{x=1}$$

Observaciones: 1ª) Si tras aplicar las 6 transformaciones/supresiones permitidas llegamos a algo del siguiente estilo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow 0x+0y+0z=2;\ 0=2\ !! \Rightarrow \textbf{INCOMPATIBLE}$$

2ª) Recordar que, como ya se ha indicado, si obtenemos dos ecuaciones iguales o proporcionales podemos suprimir una de ellas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto tendremos más incógnitas que ecuaciones, de forma que al despejar cada incógnita tendremos que expresar la solución en función de una de ellas, es decir, de un parámetro ⇒ ∞ soluciones ⇒ **COMPATIBLE INDETERMINADO**

II. DISCUSIÓN de un SS.EE.LL.: TEOREMA de ROUCHÉ-FROBENIUS [6]

Teorema de Rouché-Frobenius[7]: Vamos a enunciarlo, por comodidad, para un sistema 3x3 –su formulación para un sistema más general, mxn, sería análoga–; supongamos un SS.EE.LL. 3x3 genérico:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{array}\right\}$$

Recordar del apartado anterior que si expresamos dicho sistema en forma matricial, tenemos:

$$\mathbf{M^*}\text{=matriz ampliada} \longrightarrow M^* = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{\mathbf{M}\text{=matriz de coeficientes, o del sistema}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{array}\right)$$

El teorema de Rouché-Frobenius indica la posible existencia y nº de soluciones del sistema:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \boxed{\begin{array}{l} \text{rg}\,M=\text{rg}\,M^* \\ \text{rg}\,M=\text{rg}\,M^* \end{array}}\begin{array}{l} =\text{nº incógnitas} \\ <\text{nº incógnitas} \end{array} & \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{array}{l} \textbf{COMP. DTDO.} \\ \textbf{COMP. INDTDO.} \end{array} \\ \text{rg}\,M\neq\text{rg}\,M^* & \Rightarrow & \textbf{INCOMPAT.} \end{array}}$$

---

[6] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 102-103 y 109-110 del libro de ed. Anaya.

[7] Como ya hemos indicado en la introducción, en 1875 el francés Eugène **Rouché** (1832-1910) enunció este teorema. Posteriormente, varios matemáticos se disputaron su demostración, aunque fue el alemán Ferdinand Georg **Frobenius** (1849-1917) quien completó su enunciado y demostración, zanjando el tema.

Observaciones: 1ª) Ver la demostración en la pág. 102 del libro de ed. Anaya

2ª) Nótese que la **condición de compatibilidad** de un sistema, es decir, la condición para que tenga solución, es la recuadrada en trazo fino:

$$\mathrm{rg}\,M=\mathrm{rg}\,M^{*}\quad \textbf{CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD}$$

3ª) $\mathrm{rg}\,M\leq\mathrm{rg}\,M^{*}\leq$ nº incógnitas $\Rightarrow$ "si $\mathrm{rg}\,M$ alcanza su valor máximo, entonces coincide con $\mathrm{rg}\,M^{*}$"

4ª) En el caso de un sistema compatible indeterminado, el nº de parámetros que aparecen viene dado por:

$$\text{nº parámetros}=\text{nº incógnitas}-\mathrm{rg}\,M$$

5ª) Utilidad del teorema de Rouché-Frobenius: Permite saber cómo son las soluciones de un sistema sin necesidad de resolverlo. Esto, como veremos más adelante, será particularmente útil en Geometría. Por cierto, a la hora de discutir un sistema –es decir, estudiar cómo van a ser sus soluciones–, se recomienda estudiar el rango por determinantes, no por Gauss.

Ejemplo 3:

a) Aunque ya sabemos que, por tener solución única, va a resultar compatible determinado, vamos a discutir el sistema del ejemplo anterior, para ilustrar sobre el procedimiento:

$$M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\\\begin{matrix}1&0\end{matrix}&1\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}4\\6\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}M\geq 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{vmatrix}=6+3-2-5\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}M=3=\mathrm{rg}M^{*}=\text{nº incógnitas}\Rightarrow \textbf{sist. comp. dtdo.}$$

b) Discutamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}3x+y+z&=4\\5x+2y+3z&=6\\2x+y+2z&=2\end{aligned}\right\}\longrightarrow M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\\\begin{matrix}2&1\end{matrix}&2\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}4\\6\\2\end{matrix}\end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}M\geq 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\2&1&2\end{vmatrix}=12+6+5-4-9-10=0\Rightarrow \mathrm{rg}M=2$$

¿rg M*****?

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_4:

$$|c_1\,c_2\,c_4|=\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\2&1&2\end{vmatrix}=12+12+20-16-10-18=0\Rightarrow \mathrm{rg}M^{*}=2$$

Por lo tanto, $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*=2<\text{n}^{\text{o}}\text{ incógnitas}=3 \Rightarrow$ **sist. comp. indtdo.** (uniparamétrico)

(En el próximo apdo. veremos cómo resolverlo por Cramer; baste adelantar que si $\text{rg}\,M^*=2$, significa que sobra una de las ecuaciones, por ser combinación lineal de las otras; por lo tanto, podríamos eliminar, p. ej., E_3, y obtendríamos más incógnitas que ecuaciones, es decir, habría que expresar las soluciones en función de una de las incógnitas, que se llamaría parámetro).

c) Finalmente, discutamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=4\\ 5x+2y+3z=6\\ x\qquad -z=1\end{array}\right\}\longrightarrow M^*=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{array}{ccc}3&1&1\\5&2&3\\1&0&-1\end{array}}_{M}&\begin{array}{c}4\\6\\1\end{array}\end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}M\geq 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&-1\end{vmatrix}=-6+3-2+5=0\Rightarrow \text{rg}M=2$$

¿rg M*****?

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_4:

$$|c_1\,c_2\,c_4|=\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\1&0&1\end{vmatrix}=6+6-8-5\neq 0\Rightarrow \text{rg}M^*=3$$

Por lo tanto, $\text{rg}\,M=2\neq\text{rg}\,M^*=3 \Rightarrow$ **sist. incompatible** ($\nexists$ soluc)

III. RESOLUCIÓN de SS.EE.LL: REGLA de CRAMER [8]

Para poder aplicar el método que vamos a explicar a continuación el sistema ha de ser «tipo Cramer»:

Sistema «tipo Cramer»: «Es aquel SS.EE.LL. que verifica las siguientes dos condiciones:

1ª) nº ecuaciones = nº incógnitas (i.e. sistema cuadrado)

2ª) $\det M\neq 0$».

NOTA: Si $\det M=0 \Rightarrow$ Alguna ecuación es combinación lineal de las otras (i.e. esa ecuación "sobra"); por lo tanto, basta con detectar dicha ecuación, eliminarla y, normalmente, pasar una de las incógnitas como parámetro al otro miembro, con lo que el sistema pasará a ser tipo Cramer.

La regla de Cramer permite obtener la solución de un SS.EE.LL. de forma sencilla, mediante el cálculo de una serie de determinantes; su enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{array}\right\}\Longrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}{|M|};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{|M|};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{|M|}$$

---

[8] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 104 a 107 del libro de ed. Anaya.

Observaciones: **1ª)** Ver la demostración en la pág. 105 del libro de ed. Anaya

2ª) Para sistemas de orden 2, o ≥ 4, las fórmulas serían análogas.

3ª) Obviamente, si el sistema lo hemos discutido por menores, es decir, por determinantes, lo resolveremos por Cramer; ahora bien, si lo hemos discutido por matrices, esto es, por Gauss, lo resolveremos también por Gauss.

4ª) A la hora de pasar al otro miembro una de las incógnitas como parámetro con el fin, como ya hemos indicado en la última nota, de convertir el sistema en tipo Cramer, tenemos que cerciorarnos de que el nuevo sistema es efectivamente tipo Cramer, es decir, $|M|\neq 0$.

Ejemplo 4: Vamos a resolver por Cramer el sistema del ejemplo anterior; para ello, lo más cómodo es verlo en forma matricial:

$$M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\\\begin{matrix}1&0\end{matrix}&1\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}4\\6\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Vemos que tiene igual nº de ecuaciones e incógnitas, y falta ver si $|M|\neq 0$ para ver si es tipo Cramer:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{vmatrix}=6+3-2-5=2\neq 0\Rightarrow \text{tipo Cramer}$$

Por tanto, podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&1&1\\6&2&3\\0&0&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{8-6}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3&4&1\\5&6&3\\1&0&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{18+12-6-20}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\1&0&0\end{vmatrix}}{2}=\frac{6-8}{2}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}$$

Ejercicios final tema: 2 a 26 (discutir y resolver, sin parámetro)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 34: 1 y2; pág. 35: 3; pág. 38: 1 y 2; pág. 39: 1 y 2; pág. 44 y ss.: 1 a 22 (método de Gauss)
pág. 103: 1 y 2; pág. 104: 1 y 2; pág. 107: 1; pág. 119: 1 a 3 (Gauss o Cramer)
pág. 45: 23 a 32 (problemas de planteamiento)

IV. SISTEMAS HOMOGÉNEOS [9]

Es aquel que tiene todos sus términos independientes 0:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\quad M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Características: **1ª)** Es inmediato comprobar que siempre va a tener la solución (0,0,0), llamada **solución trivial**. Este es el caso compat. dtdo. $\Rightarrow$ $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^{*}=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ $|M|\neq 0$

---

[9] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 108 del libro de ed. Anaya.

2ª) Por lo tanto, para que el sistema sea compatible indeterminado tendremos que imponer $|M|=0$, para que $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*<3=$ nº incógnitas (NOTA: Es obvio que en este tipo de sistemas siempre va a ser $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*$)

3ª) Como ya hemos observado, siempre va a ser $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*$ $\Rightarrow$ un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible

Ejercicios final tema: 27 a 30 (sistemas homogéneos)
31 a 43 (sistemas con parámetro)
44 a 47 (homogéneos con parámetro)
48 a 55 (problemas de planteamiento de sistemas)

Ejercicios PAEG: 1A jun 97; 1A sept 97; 1B sept 99; 3B sept 2001; 2B jun 2002; 4B sept 2002; 2B sept 2003; 3B jun 2004; 3A jun 2005; 3A sept 2005; 3B jun 2006; 3B sept 2006; 2B jun 2000; 3A jun 2010; 3B jun 2008; 3B sept 2010; 3B sept 2009; 3B sept 2012; 3A jun 2012; 3B sept 2011; 3B jun 2011; 3A sept 2007 (+ Rouché-Frobenius teórico) ← sistemas con parámetro

3B jun 2007; 3B sept 2008; 3B sept 2006; 3A sept 2011 (+ rango matriz) ← homogéneos con parámetro

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 108: 1 y 2; pág. 119: 5 (sistemas homogéneos)
pág. 110: 1 y 2; pág. 119 y ss.: 4, 6, 8, 15 a 19, 26, 27, 33, 43 a 46 (sistemas con parámetro)
pág. 119: 7 (homogéneos con parámetro)

55 EJERCICIOS de SISTEMAS de ECUACIONES 2º BACH.

Sistemas en forma matricial:

1. Expresar y resolver en forma matricial los sistemas de los ejercicios 4, 5, 6… de esta hoja.

Discusión y resolución de sistemas (sin parámetro):

2. Enunciar la regla de Cramer para un sistema 3x3. Aplicarla a la resolución –previa discusión por Rouché-Fröbenius– del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. dtdo.; $x=1$, $y=-2$, $z=3$)

3. Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicarlo a la discusión del sistema que figura a continuación. Posteriormente, resolverlo por el método deseado (Gauss o Cramer):

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ 3x-y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. indtdo.; $x=-2+\lambda$, $y=-5+\lambda$, $z=\lambda$)

- Discutir y resolver los siguientes SS.EE.LL., e indicar de qué tipo se tratan:

4. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=4$, $y=5$, $z=2$)

5. $\left.\begin{array}{l} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=4$, $y=2$, $z=5$)

6. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=-2$, $z=3$)

7. $\left.\begin{array}{rrrl} x & +\,y & +\,z & =6 \\ x & & +\,z & =4 \\ & y & +\,z & =5 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=2$, $z=3$)

8. $\left.\begin{array}{l} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=-2$, $z=3$, $t=-4$)

9. $\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=2 \\ 2x-y-z-2t=5 \\ 3x+2y+3z-t=20 \\ -x+y-z+2t=-10 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=-4$)

10. $\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x+2y-3z=-4 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$

(incompatible)

11. $\left.\begin{array}{l} 4x-3y=-5 \\ 6x-5y=-9 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=3$)

12. $$\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ y+z=8 \\ x+z=6 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; $x=5$, $y=7$, $z=1$)

13. $$\left.\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; $x=3$, $y=3$, $z=3$)

14. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ x-2y+2z=1 \end{array}\right\}$$

Ayuda: la 3ª fila es comb. lin. de las otras
(comp. indtdo.; $x=5-4\lambda$, $z=-2+3\lambda$, $y=\lambda$)

15. $$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -3x+3z=4 \\ -2x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; $x=\lambda-4/3$, $y=\lambda-2/3$, $z=\lambda$)

16. $$\left.\begin{array}{l} y+9z=2 \\ 2x+y+3z=-1 \\ -x+3z=-2 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

* **17.** $$\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; $x=\lambda$, $y=1/2+\lambda$, $z=-1/2$)

18. $$\left.\begin{array}{l} y-t+w=1 \\ 2x+y+z-t+2w=2 \\ 2x-y+z+t=0 \\ 4x-3y+2z+3t-w=-1 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; $x=(1-\lambda-v)/2$, $y=1+\mu-w$; λ,μ,v arbitrarios)

19. $$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-7z=-1 \\ 3x+4y-6z=5 \\ 5x-2y+4z=-7 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; $x=-1$, $y=5$, $z=2$)

20. $$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-y=1 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

21. $$\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+3y+z=3 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; $x=-\lambda$, $y=1$, $z=\lambda$)

22. $$\left.\begin{array}{l} 2x-2y+z=1 \\ x+y-z=-2 \\ 3x-y=-1 \\ x+2y-z=-1 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; $x=0$, $y=1$, $z=3$)

23. $$\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z=1 \\ x-y-2z=3 \\ 4x-y-8z=2 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

24. $$\left.\begin{array}{l} x+y-2z-3t=0 \\ x+y-3z+2t=-2 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x+2y-2z+2t=3 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; $x=1$, $y=3$, $z=2$, $t=0$)

25. Inventar un sistema que sea compatible determinado, otro indeterminado y otro incompatible.

26. ¿Por qué se hace la discusión de un SS.EE.LL. antes de resolverlo?

Sistemas homogéneos (sin parámetro):

27. $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: $x=0$, $y=0$, $z=0$)

28. $$\left.\begin{array}{l} -3x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x-3y=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: $x=-3\lambda/5$, $y=\lambda/5$, $z=\lambda$)

29. $\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=0, y=0, z=0)

30. $\left.\begin{array}{l} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ 12x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=–λ, y=0, z=λ)

Discusión y resolución de sistemas con un parámetro:

31. *(S)* Discutir según los valores de **m**, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo además para m=10. *(Soluc: m=10⇒comp.indtdo.; m≠10⇒incomp.)*

32. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 5x-2y-pz=3 \\ -y+z=1 \\ x-y+z=p \end{array}\right\}$$

y se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **p** *(Soluc: p=-2⇒incomp.; p≠2⇒comp.dtdo.)*

b) Resolverlo para p=2.

33. *(S)* Determinar para qué valores de **k** tiene solución el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y+kz=5 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. *(Soluc: k≠–2⇒comp. dtdo.; k=–2⇒comp. indtdo.)*

34. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y-mz=4 \\ x-y+z=1 \\ 2x-y+z=m \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores de **m**. *(Soluc: m≠2⇒comp. dtdo.; m=–2⇒incomp.)*

b) Resolver el sistema para m=1

35. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z=2 \\ x+ay-z=1 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$$

se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **a** *(Soluc: a≠0 y a≠1⇒comp. dtdo.; a=0 o a=–1⇒incomp.)*

b) Resolverlo para a=1

36. *(S)* Discutir el sistema según los valores del parámetro **a** y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-2 \\ (a-1)x+(a-1)y-2z=-2 \\ ax+(a+1)y=1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1⇒comp. dtdo.;a=−1⇒incomp.)

37. *(S)* Hallar los valores del parámetro **a** que hacen compatible el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \\ 2x+ay=3 \end{array}\right\}$$

y resolverlo para uno de ellos. *(Soluc: a=13/5 y a=−5)*

38. *(S)* Determinar los valores de **a** para los que el sistema siguiente sea incompatible:

$$\left.\begin{array}{r} (a+3)x+4y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ -4x-4y+(a-1)z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a=−1)

39. *(S)* Discutir el siguiente sistema, según los valores de **m** y resolverlo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+mz=m \\ x+2y+z=m \\ -x+y-z=m^2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: m≠0⇒incomp.; m=0⇒comp. indtdo.)

40. *(S)* Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Ayuda: se recomienda previamente estudiar el carácter de dicho sistema. *(Soluc: x=2, y=z=1)*

41. *(S)* Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1 y a≠3⇒comp. dtdo.; a=1⇒comp. indtdo.; a=−3⇒incomp.)

42. *(S)* Estudiar según los valores de **a** el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=-1 \\ -x+y-z=a \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando no tenga solución única. *(Soluc: $a\neq1\Rightarrow$ comp. dtdo.; $a=1\Rightarrow$ comp. indtdo.)*

43. *(S)* Discutir el siguiente sistema para los diferentes valores de **a** y resolverlo para a=0:

$$\left.\begin{array}{l} (a+1)x+y+2z=-2 \\ 2x+y+(a+1)z=3 \\ x+(a+1)y+2z=-2 \end{array}\right\}$$

(Ayuda: hacer el cambio a+1=t)

(Soluc: $a\neq4$ y $a\neq1$ y $a\neq0\Rightarrow$ comp. dtdo.; $a=1\Rightarrow$ incomp.; $a=0$ o $a=-4\Rightarrow$ comp. indtdo.)

Sistemas homogéneos con parámetro:

44. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+mz=0 \\ x+my-z=0 \end{array}\right\}$$

Se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **m**. **b)** Resolverlo para m=5.

(Soluc: $m\neq5$ y $m\neq1/7\Rightarrow$ comp. dtdo.; $m=5$ o $m=1/7\Rightarrow$ comp. indtdo.)

45. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (m+2)x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$$

a) Determinar el valor de **m** para que tenga solución distinta de la trivial. *(Soluc: m=10)*

b) Resolverlo para el valor de **m** encontrado.

46. *(S)* Resolver el siguiente sistema para los valores de λ que lo hacen compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 & 6 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -6 & 6 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Soluc: es comp. indtdo. para $\lambda=-1$ y $\lambda=2$)

47. *(S)* Determinar los valores de λ para los cuales el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y-z=0 \\ -\lambda x+(\lambda-1)y=0 \\ -x-2y+(\lambda+1)z=0 \end{array}\right\}$$

tiene solución distinta de la trivial y obténgase la solución para uno de los valores de λ. *(Soluc: $\lambda=1$, $\lambda=-1\pm\sqrt{2}$)*

Problemas de planteamiento de sistemas:

48. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto *A*, 4 de *B* y 3 de *C*, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de *A*, 7 de *B* y 4 de *C*, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de *A*, 13 de *B* y 5 de *C*, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?
(Soluc: A=1.000, B=300 y C=800 €.)

49. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel *A*, 20.000 a los de nivel *B* y 15.000 a los de nivel *C*. Teniendo en cuenta que para los de nivel *B* destina en total el doble que para los del *A*, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?
(Soluc: A=6, B=15 y C=30 empleados)

50. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.
(Soluc: 15, 18 y 40 años)

51. La edad de un padre es igual a la suma de las de sus dos hijos. Cuando pasen tantos años como tiene el hijo mayor, el padre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será de 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno? *(Soluc: 22, 24 y 46 años)*

52. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?
(Soluc: Andrés=80 kg; Benjamín=93 kg; Carlos=72 kg)

53. Un modisto ofrece cuatro tipos de tejido de gran calidad a distintos precios. Un comprador gastó 7.000 € en 2 m del primero, 3 m del segundo y 1 m del tercero. Otro gastó 6.500 € comprando 1 m del primero, 2 m del segundo y 2 m del cuarto. Un tercero compró 3 m del primero, 3 m del tercero y 2 m del cuarto, gastando 7.000 €. Al vendedor le sobraron 2 m, 1 m, 2 m y 1 m respectivamente, por un valor de 5.750 €. ¿Cuál era el precio de cada tejido? *(Soluc: 1.000, 1.500, 500 y 1.250 €, respectivamente)*

54. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos tés, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,25 €. ¿Qué cuesta cada bebida?
(Soluc: café=1 €, refresco=1,50 €, té=0,90 €)

55. Un especulador tiene colocado su dinero en tres depósitos bancarios diferentes X, Y y Z. El dinero invertido en X le produce un 4% de beneficio, en Y un 7%, y en Z un 6%. Sus beneficios totales fueron de 327.000 € anuales. Debido a la bajada de tipos motivada por la crisis, el segundo año el rendimiento es del 3.5% en X, el 6% en Y y el 5% en Z, siendo sus beneficios de 278.000 €. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada depósito si en total tiene 5.000.000 €? *(Soluc: X=200.000 €; Y=3.100.000 €; Z=1.700.000 €)*