

MATRICES

1. Averiguar Si son iguales las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 - 4^2 & 4 + 9 + 12 \\ -\frac{6}{3} & (2-1)(2+1) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (5+4)(5-4) & 5^2 \\ -2 & 2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea A la matriz de una sola fila $(2 \ 1 \ 5)$ y B la de una sola columna $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Escribir los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular $A+B$ y $A-B$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$ y $B \cdot B$.

5. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular

$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$ y $B \cdot B$.

6. Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$, si es posible, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Calcular $A^2 - 3B - I$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la

relación de recurrencia: $A^n = 2^{n-1} A$.

9. Calcular, por inducción, las potencias n -ésimas de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

10. Calcular, por inducción, las potencias n -ésimas

de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comprobar el resultado multiplicando por la matriz dada.

12. Aplicando la definición de matriz inversa, calcular la inversa de la siguiente matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Hallar, por el método de reducción o de Gauss, la

matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar el

resultado multiplicándolo por la matriz dada.

14. Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $(A-I)^2 \cdot (A-5I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

b) Obtener A' (matriz traspuesta de A) y razonar si existe la inversa de A .

c) En caso afirmativo, hallar A^{-1} .

16. a) Calcular una matriz X tal que $A \cdot X = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

17. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

calcular: $\frac{1}{2}(A+B)$, $(A-B)^2$, A^{-1} y B^{-1} .

18. Encontrar una matriz X tal que $AX + B = C$,

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

19. Obtener los valores de x, y, z que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

20. Encontrar una matriz X que verifique la ecuación $X - B^2 = AB$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, hallar su inversa y calcular $A^2 - 2A$.

22. Hallar c , real, si las matrices $A-I$ y $\frac{1}{c}(A-cI)$ son inversas, siendo I la matriz unidad 4×4 , y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Sea $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2 , A^3 y A^4 .

b) Encontrar la ley general para A^n .

24. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, estudiar si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

25. Resolver la ecuación $A \cdot X = I$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$,
- Comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz unidad.
 - Usando la fórmula anterior, calcular A^4 .
27. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz B tal que $A \cdot B = A + I$.
28. Hallar A^{-1} y A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
29. Hallar A^{100} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
30. Hallar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que $A \cdot X = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
31. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2, simétrica, tal que $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos elementos son números naturales y tal que su inversa coincida con su traspuesta.
32. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:
- Hallar todas las matrices B que cumplen la condición $A \cdot B = B \cdot A$.
 - Calcular la inversa de A a partir de la B .
33. Calcular el valor de A^{35} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
34. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ determinar otra matriz B tal que $A + B = A \cdot B$.
35. Determinar los valores de a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.
36. a) Encontrar números a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$.
- b) Para estos valores de a y b , y tomando $B = \frac{1}{2}A$, calcular B^{50} y A^{50} .
37. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Obtener $C + A \cdot B$.
 - ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$?
38. Determinar dos matrices X e Y tales que $\begin{cases} 3X - 5Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{cases}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
¿Es invertible la matriz $X + Y$?
Calcular una matriz C tal que $(X - Y) \cdot C = I_2$.
39. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2C$ siendo:
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
40. Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S (sencillas), N (normales) y L (lujo). Cada vivienda de tipo S tiene una ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas. Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras, y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.
- Escribir una matriz que describa el número y tamaño de las ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el número de cristales y el número de bisagras en cada ventana.
 - Calcular una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesario en cada tipo de vivienda.
41. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.
- Representar la información en dos matrices.
 - Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.
42. Se dan las transformaciones geométricas planas $T(x, y) = (x - y, x + y)$ $S(x, y) = (2x - y, x + y)$
Escribir las matrices asociadas a S y a T. Escribir la matriz asociada a la transformación geométrica $S \circ T$.
43. Un comerciante de televisores en color tiene 5 aparatos de 26 pulgadas, 8 de 20, 4 de 18 y 10 de 12. Los precios de cada uno de ellos son: 650, 550, 500 y 300 euros, respectivamente. Expresar el precio total de venta de sus existencias como producto de dos matrices. Calcular ese precio.

44. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:
- Construir la matriz de influencias: M .
 - Hallar la matriz de influencias de dos etapas: M^2 .
 - Hallar el poder de cada persona.
 - Interpretar la suma de las filas de M y la de sus columnas.
45. Un contratista puede adquirir las cantidades requeridas de madera, ladrillo, hierro, vidrio y pintura de tres proveedores. Los precios de cada proveedor para los materiales vienen dados por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

donde cada fila se refiere a un proveedor y la columna a los materiales, en el orden dado anteriormente. El contratista quiere adquirir todos los materiales al mismo proveedor. Actualmente tiene tres obras en construcción: la obra I requiere 20 unidades de madera, 4 de ladrillos, 5 de hierro, 3 de vidrio y 3 de pintura; la obra II necesita 15, 0, 8, 8 y 2, y la obra III necesita 30, 10, 20, 10 y 12 unidades, respectivamente. Resumir esta información en una matriz B y formar la matriz de precios $A \cdot B$. Interpretar los elementos del producto y decir qué proveedor debe abastecer cada obra.

46. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos por cursos según la matriz M . Una empresa de transportes elabora dos rutas a y b. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz N . Si el precio por persona y kilómetro es 12 céntimos de euro, expresar en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario:

$$M = \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 98 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

47. Una fábrica de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.
- Representar esta información en dos matrices.
 - Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los modelos de estantería.
 - Obtener la misma información para cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

MATRICES (Soluciones)

1. $A = B = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot B = (28)$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

3. $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$ $B \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ -24 & 0 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

7. $A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 15 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

8. Demostrarlo aplicando el método de inducción completa.

9. $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

10. $A^n = 3^{n-1} \cdot A$

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. a) $(A - I)^2 \cdot (A - 5I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

Existe A^{-1} por ser $R(A) = 3$;

c) $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

16. a) $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) La matriz obtenida no cumple la relación $X \cdot A = B$. Se hace la comprobación.

17. $\frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $(A - B)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

A y B son inversas: $A^{-1} = B$ y $B^{-1} = A$

18. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19. $x = 2$; $y = -3$; $z = 2$

20. $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$

21. $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

22. $c = 3$

23. a) $A^2 = 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = 2^2 a^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^4 = 2^3 \cdot a^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = 2^{n-1} \cdot a^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

24. Ambas igualdades son ciertas:

$(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
(Hacer la comprobación)

25. $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

26. a) $A^2 = 2A - I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A^4 = 4A - 3I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

27. $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

28. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $X = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (Infinitas soluciones)

31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

32. a) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

b) La matriz B cumple $A \cdot B = B \cdot A$ y la matriz inversa cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, por lo

tanto, la matriz inversa es una de la familia de matrices definida por B.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33. $A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

34. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

35. $a = 2$; $b = -1$

36. a) $a = 1$; $b = 1$

b) $A^{50} = 2^{49} \cdot A$ y $B^{50} = B$

37. a) $C + A \cdot B = I$

b) Sí son iguales, $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$
(comprobarlo)

38. $X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & 26 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ $Y = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ -23 & 4 \end{pmatrix}$

$X + Y$ es inversible.

Comprobar que $R(X + Y) = 2$.

$$C = \frac{11}{89} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$$

39. $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

40. a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$G \ M \ P$

$$S \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$C \ B$

$$G \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C \ B$

$$S \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

$$N \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

41. a) Producción (unidades) Tiempo (horas)

$$U = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

$N \ L \ S$

$$A \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

$T \ A$

$$N \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

$T \ A$

b) $U \cdot H = \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$ $A \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$
 $B \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$

42. Tomamos los puntos en columnas

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \quad S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Expresión matricial

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrices asociadas

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformación compuesta $S \circ T$

$$(S \circ T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriz asociada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Pulgadas: 26, 20, 18 y 12.

Existencias

$$\begin{pmatrix} 26 & 20 & 18 & 12 \\ 5 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Precios

$$\begin{pmatrix} 26 & (650) \\ 20 & 550 \\ 18 & 500 \\ 12 & (300) \end{pmatrix}$$

$$E = (5 \ 8 \ 4 \ 10) \quad P = \begin{pmatrix} 650 \\ 550 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Ingresos

$$I = E \cdot P = (12650)$$

Ingresos por la venta: 12650 €

44. a) Matriz de influencias

$A \ B \ C \ D \ E$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Interpretación:

E influye en A a través de D: $E \rightarrow D \rightarrow A$

C influye en B a través de A: $C \rightarrow A \rightarrow B$

D influye en B a través de A: $D \rightarrow A \rightarrow B$

E influye en B a través de A: $E \rightarrow A \rightarrow B$

c) La persona más influyente es la E; influye en dos personas, A y D.

La persona más influida es la A, es influida por C, D y E.

(Ver apartado siguiente)

d) Suma de las filas de M: $(3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$

La A es influida por 3 personas, la B por 1, la C por ninguna; la D por 1 y la E por ninguna.

Suma de las columnas de M: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La A influye en 1 persona, la B en ninguna, la C en 1, la D en 1 y la E en 2.

La suma de las filas se obtendría multiplicando por la izquierda por la matriz $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ y la fila de las columnas, multiplicando por la derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

45. A: Matriz de precios
B: Matriz de unidades
C: Matriz de costes
Proveedores: P_1, P_2, P_3 .
Materiales: M, L, H, V, P
Obras: O_1, O_2, O_3

Matriz de precios: A Matriz de unidades: B

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & M & L & H & V & P \\ P_1 & \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ M & \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \end{pmatrix} \\ L & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ H & \begin{pmatrix} 5 & 8 & 20 \end{pmatrix} \\ V & \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 233 & 200 & 498 \\ 242 & 201 & 490 \\ 248 & 201 & 510 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes

$$\begin{array}{c} C \\ \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 233 & 200 & 498 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 242 & 201 & 490 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 248 & 201 & 510 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

Para la obra O_1 se debe elegir el proveedor P_1 .
Para la obra O_2 se debe elegir el proveedor P_1 .
Para la obra O_3 se debe elegir el proveedor P_2 .

46. INSTITUTO

Pueblos: A, B, C
Cursos: P, S, T, E
Rutas: a, b

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Distribución por cursos} & \text{Longitud (km)} \\ \begin{matrix} & P & S & T & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 98 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

Precio por persona y km: 0.12 €

Recaudación por curso y por ruta:

$$R = 0.12 \cdot N \cdot M$$

$$R = \begin{pmatrix} 612.48 & 541.92 & 330.24 & 172.8 \\ 655.2 & 555.6 & 355.8 & 171.12 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

47. ESTANTERÍAS

Modelos: A, B, C

Tamaños: G, P

Herrajes: T, S

a) Producción diaria: M Herrajes: N

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & G & P \\ A & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 8000 & 6000 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} & T & S \\ G & \begin{pmatrix} 16 & 6 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 12 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

$$b) M \cdot N = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & T & S \\ A & \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 200000 & 72000 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 136000 & 48000 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

$$c) \text{ Para el modelo A } A' = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 8000 \end{pmatrix}$$

$$A' \cdot N = \begin{pmatrix} 16000 & 6000 \\ 96000 & 32000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & T & S \\ G & \begin{pmatrix} 16000 & 6000 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 96000 & 32000 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{Para el modelo B } B' = \begin{pmatrix} 8000 & 0 \\ 0 & 6000 \end{pmatrix}$$

$$B' \cdot N = \begin{pmatrix} 128000 & 48000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & T & S \\ G & \begin{pmatrix} 128000 & 48000 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 72000 & 24000 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{Para el modelo C } C' = \begin{pmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 6000 \end{pmatrix}$$

$$C' \cdot N = \begin{pmatrix} 64000 & 24000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & T & S \\ G & \begin{pmatrix} 64000 & 24000 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 72000 & 24000 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$