MATRICES

1. Averiguar Si son iguales las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 5^2-4^2 & 4+9+12 \\ -\frac{6}{3} & (2-1)(2+1) \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} (5+4)(5-4) & 5^2 \\ -2 & 2^2-1 \end{pmatrix}$$

2. Sea A la matriz de una sola fila $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y B la de una sola columna $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^t$. Escribir los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$.

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $A+B$ y $A-B$.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A\cdot A$ y $B\cdot B$.

5. Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A\cdot A$ y $B\cdot B$.

6. Calcular $A\cdot B$ y $B\cdot A$, si es posible, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Calcular A^2-3B-I, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Demostrar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación de recurrencia: $A^n=2^{n-1}A$.

9. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

10. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Hallar la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

    Comprobar el resultado multiplicando por la matriz dada.

12. Aplicando la definición de matriz inversa, calcular la inversa de la siguiente matriz diagonal:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Hallar, por el método de reducción o de Gauss, la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado multiplicándolo por la matriz dada.

14. Hallar la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

    a) Calcular $(A-I)^2\cdot(A-5I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

    b) Obtener A^t (matriz traspuesta de A) y razonar si existe la inversa de A.

    c) En caso afirmativo, hallar A^{-1}.

16. a) Calcula una matriz X tal que $A\cdot X=B$ con $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

    b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X\cdot A=B$?

17. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcular: $\frac{1}{2}(A+B)$, $(A-B)^2$, A^{-1} y B^{-1}.

18. Encontrar una matriz X tal que $AX+B=C$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

19. Obtener los valores de x, y, z que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

20. Encontrar una matriz X que verifique la ecuación $X-B^2=AB$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

21. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, hallar su inversa y calcular A^2-2A.

22. Hallar c, real, si las matrices $A-I$ y $\frac{1}{c}(A-cI)$ son inversas, siendo I la matriz unidad 4×4, y $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Sea $A=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Se pide:

    a) Calcular A^2, A^3 y A^4.

    b) Encontrar la ley general para A^n.

24. Siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, estudiar si son ciertas las siguientes igualdades:

    a) $(A+B)^t=A^t+B^t$

    b) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

25. Resolver la ecuación $A\cdot X = I$ con $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

26. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz unidad.

b) Usando la fórmula anterior, calcular A^4.

27. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz B tal que $A\cdot B = A + I$.

28. Hallar A^{-1} y A^n siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. Hallar A^{100} siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30. Hallar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que $A\cdot X = 0$, siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

31. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2, simétrica, tal que $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos elementos son números naturales y tal que su inversa coincida con su traspuesta.

32. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Hallar todas las matrices B que cumplen la condición $A\cdot B = B\cdot A$.

b) Calcular la inversa de A a partir de la B.

33. Calcular el valor de A^{35} siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

34. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ determinar otra matriz B tal que $A + B = A\cdot B$.

35. Determinar los valores de a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

36. a) Encontrar números a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$.

b) Para estos valores de a y b, y tomando $B=\frac{1}{2}A$, calcular B^{50} y A^{50}.

37. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obtener $C + A\cdot B$.

b) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A\cdot B)^{-1}$ y $(C + A\cdot B)^{-1}$?

38. Determinar dos matrices X e Y tales que
$\left.\begin{array}{l} 3X - 5Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{array}\right\}$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
¿Es invertible la matriz $X + Y$?
Calcular una matriz C tal que $(X - Y)\cdot C = I_2$.

39. Resolver la ecuación matricial

$$A\cdot X + B = 2C$$

siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

40. Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S (sencillas), N (normales) y L (lujo). Cada vivienda de tipo S tiene una ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.
Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras, y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de las ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el número de cristales y el número de bisagras en cada ventana.

b) Calcular una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesario en cada tipo de vivienda.

41. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representar la información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

42. Se dan las transformaciones geométricas planas

$$T(x, y) = (x - y, x + y)$$

$$S(x, y) = (2x - y, x + y)$$

Escribir las matrices asociadas a S y a T. Escribir la matriz asociada a la transformación geométrica $S \circ T$.

43. Un comerciante de televisores en color tiene 5 aparatos de 26 pulgadas, 8 de 20, 4 de 18 y 10 de 12. Los precios de cada uno de ellos son: 650, 550, 500 y 300 euros, respectivamente. Expresar el precio total de venta de sus existencias como producto de dos matrices. Calcular ese precio.

44. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:
   a) Construir la matriz de influencias: *M*.
   b) Hallar la matriz de influencias de dos etapas: M^2.
   c) Hallar el poder de cada persona.
   d) Interpretar la suma de las filas de *M* y la de sus columnas.

45. Un contratista puede adquirir las cantidades requeridas de madera, ladrillo, hierro, vidrio y pintura de tres proveedores. Los precios de cada proveedor para los materiales vienen dados por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

donde cada fila se refiere a un proveedor y la columna a los materiales, en el orden dado anteriormente. El contratista quiere adquirir todos los materiales al mismo proveedor. Actualmente tiene tres obras en construcción: la obra I requiere 20 unidades de madera, 4 de ladrillos, 5 de hierro, 3 de vidrio y 3 de pintura; la obra II necesita 15, 0, 8, 8 y 2, y la obra III necesita 30, 10, 20, 10 y 12 unidades, respectivamente. Resumir esta información en una matriz *B* y formar la matriz de precios $A \cdot B$. Interpretar los elementos del producto y decir qué proveedor debe abastecer cada obra.

46. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos por cursos según la matriz *M*. Una empresa de transportes elabora dos rutas a y b. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz *N*. Si el precio por persona y kilómetro es 12 céntimos de euro, expresar en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{P} & \text{S} & \text{T} & \text{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 98 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{a} \\ \text{b} \end{array}$$

47. Una fábrica de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.
   a) Representar esta información en dos matrices.
   b) Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los modelos de estantería.
   c) Obtener la misma información para cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

MATRICES (Soluciones)

1. $A = B = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot B = (28)$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

3. $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

   $A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ -24 & 0 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

7. $A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 15 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

8. Demostrarlo aplicando el método de inducción completa.

9. $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

10. $A^n = 3^{n-1} \cdot A$

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. a) $(A - I)^2 \cdot (A - 5I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

    Existe A^{-1} por ser $R(A) = 3$;

    c) $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

16. a) $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

    b) La matriz obtenida no cumple la relación $X \cdot A = B$. Se hace la comprobación.

17. $\frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A - B)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

    $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

    A y *B* son inversas: $A^{-1} = B$ y $B^{-1} = A$

18. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19. $x = 2$; $y = -3$; $z = 2$

20. $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$

21. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

22. $c = 3$

23. a) $A^2 = 2a^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = 2^2 a^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

    $A^4 = 2^3 \cdot a^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $A^n = 2^{n-1} \cdot a^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

24. Ambas igualdades son ciertas:

    $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

    (Hacer la comprobación)

25. $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

26. a) $A^2 = 2A - I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

    b) $A^4 = 4A - 3I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

27. $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

28. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $X = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (Infinitas soluciones)

31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

32. a) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

    b) La matriz *B* cumple $A \cdot B = B \cdot A$ y la matriz inversa cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, por lo tanto, la matriz inversa es una de la familia de matrices definida por *B*.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

33. $A^{35}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

34. $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$

35. $a=2$; $b=-1$

36. a) $a=1$; $b=1$

b) $A^{50}=2^{49}\cdot A$ y $B^{50}=B$

37. a) $C+A\cdot B=I$

b) Sí son iguales, $C^{-1}+\left(A\cdot B\right)^{-1}=\left(C+A\cdot B\right)^{-1}$ (comprobarlo)

38. $X=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}7&26\\-9&3\end{pmatrix}$ $\quad Y=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}2&20\\-23&4\end{pmatrix}$

$X+Y$ es inversible.

Comprobar que $R\left(X+Y\right)=2$.

$C=\dfrac{11}{89}\begin{pmatrix}1&6\\14&-5\end{pmatrix}$

39. $X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&4\\3&1&2\end{pmatrix}$

40. a) $C=\begin{pmatrix}1&7&1\\2&9&2\\4&10&3\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}4&8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & G\quad M\quad P\\ \begin{matrix}S\\N\\L\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&7&1\\2&9&2\\4&10&3\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{c|c} & C\quad B\\ \begin{matrix}G\\M\\P\end{matrix} & \begin{pmatrix}4&8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}\end{array}$$

b) $C\cdot D=\begin{pmatrix}19&38\\28&56\\39&78\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{c|c} & C\quad B\\ \begin{matrix}S\\N\\L\end{matrix} & \begin{pmatrix}19&38\\28&56\\39&78\end{pmatrix}\end{array}$

41. a) Producción (unidades) Tiempo (horas)

$U=\begin{pmatrix}400&200&50\\300&100&30\end{pmatrix}$ $\quad H=\begin{pmatrix}25&1\\30&1.2\\33&1.3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & N\quad L\quad S\\ \begin{matrix}A\\B\end{matrix} & \begin{pmatrix}400&200&50\\300&100&30\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{c|c} & T\quad A\\ \begin{matrix}N\\L\\S\end{matrix} & \begin{pmatrix}25&1\\30&1.2\\33&1.3\end{pmatrix}\end{array}$$

b) $U\cdot H=\begin{pmatrix}17650&705\\11490&459\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{c|c} & T\quad A\\ \begin{matrix}A\\B\end{matrix} & \begin{pmatrix}17650&705\\11490&459\end{pmatrix}\end{array}$

42. Tomamos los puntos en columnas

$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$ $\quad S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\x+y\end{pmatrix}$

Expresión matricial

$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\quad S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Matrices asociadas

$T=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad S=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

Transformación compuesta $S\circ T$

$$\left(S\circ T\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Matriz asociada

$$C=\begin{pmatrix}1&-3\\2&0\end{pmatrix}$$

43. Pulgadas: 26, 20, 18 y 12.

Existencias Precios

$\begin{array}{c}26\;\;20\;\;18\;\;12\\ \begin{pmatrix}5&8&4&10\end{pmatrix}\end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c}\begin{matrix}26\\20\\18\\12\end{matrix} & \begin{pmatrix}650\\550\\500\\300\end{pmatrix}\end{array}$

$E=\begin{pmatrix}5&8&4&10\end{pmatrix}$ $\quad P=\begin{pmatrix}650\\550\\500\\300\end{pmatrix}$

Ingresos

$I=E\cdot P=\left(12650\right)$

Ingresos por la venta: 12650 €.

44. a) Matriz de influencias

$$\begin{array}{c|c} & A\quad B\quad C\quad D\quad E\\ \begin{matrix}A\\B\\C\\D\\E\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad M=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

b) $M^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$

Interpretación:

E influye en A a través de D: E→D→A

C influye en B a través de A: C→A→B

D influye en B a través de A: D→A→B

E influye en B a través de A: E →A→B

c) La persona más influyente es la E; influye en dos personas, A y D.

La persona más influida es la A, es influida por C, D y E.

(Ver apartado siguiente)

d) Suma de las filas de M: $\begin{pmatrix}3&1&0&1&0\end{pmatrix}$

La A es influida por 3 personas, la B por 1, la C por ninguna; la D por 1 y la E por ninguna.

Suma de las columnas de M: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

La A influye en 1 persona, la B en ninguna, la C en 1, la D en 1 y la E en 2.

La suma de las filas se obtendría multiplicando por la izquierda por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la fila de las columnas, multiplicando por la derecha por la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

45. A: Matriz de precios
B: Matriz de unidades
C: Matriz de costes
Proveedores: P_1, P_2, P_3.
Materiales: M, L, H, V, P
Obras: O_1, O_2, O_3

Matriz de precios: A

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} M & L & H & V & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz de unidades: B

$$\begin{array}{c} \\ M \\ \mathrm{L} \\ H \\ V \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O_1 & O_2 & O_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 4 & 0 & 10 \\ 5 & 8 & 20 \\ 3 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 233 & 200 & 498 \\ 242 & 201 & 490 \\ 248 & 201 & 510 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes
C

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O_1 & O_2 & O_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 233 & 200 & 498 \\ 242 & 201 & 490 \\ 248 & 201 & 510 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para la obra O1 se debe elegir el proveedor P1.
Para la obra O2 se debe elegir el proveedor P1.
Para la obra O3 se debe elegir el proveedor P2.

46. INSTITUTO
Pueblos: A, B, C
Cursos: P, S, T, E
Rutas: a, b

Distribución por cursos

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{P} & \mathrm{S} & \mathrm{T} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 98 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Longitud (km)

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{array}$$

Precio por persona y km: 0.12 €
Recaudación por curso y por ruta:
$R = 0.12 \cdot N \cdot M$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 612.48 & 541.92 & 330.24 & 172.8 \\ 655.2 & 555.6 & 355.8 & 171.12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}$$

47. ESTANTERÍAS
Modelos: A, B, C
Tamaños: G, P
Herrajes: T, S

a) Producción diaria: M Herrajes: N

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $M \cdot N = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Para el modelo A $\quad A' = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 8000 \end{pmatrix}$

$$A' \cdot N = \begin{pmatrix} 16000 & 6000 \\ 96000 & 32000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16000 & 6000 \\ 96000 & 32000 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para el modelo B $\quad B' = \begin{pmatrix} 8000 & 0 \\ 0 & 6000 \end{pmatrix}$

$$B' \cdot N = \begin{pmatrix} 128000 & 48000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 128000 & 48000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para el modelo C $\quad C' = \begin{pmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 6000 \end{pmatrix}$

$$C' \cdot N = \begin{pmatrix} 64000 & 24000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 64000 & 24000 \\ 72000 & 24000 \end{pmatrix} \end{array}$$