RANGO DE UNA MATRIZ

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \\ -12 & 18 & -30 \\ 4 & -6 & 10 \\ -7 & 28 & -15 \end{pmatrix}$, se tiene

Una combinación lineal de F_1, F_2 y F_3 es
$F_1 - F_2 + F_3 = \begin{pmatrix} -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}$
Una combinación lineal de F_1 y F_2 es
$2F_1 + 3F_2 = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 39 \end{pmatrix}$

Las filas F_1 y F_2 son linealmente independientes por no ser proporcionales (F_1 no depende linealmente de F_2):

$$\frac{6}{1} \neq \frac{-9}{2} \neq \frac{15}{3} \Rightarrow F_1 \neq k \cdot F_2,\ \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow F_1 \text{ y } F_2 \text{ son } l.i.$$

Las filas F_1 y F_3 son linealmente dependientes por ser proporcionales (F_3 depende linealmente de F_1):

$$\frac{-12}{6} = \frac{18}{-9} = \frac{-30}{15} = -2 \Rightarrow F_3 = -2 \cdot F_1 \Rightarrow F_1 \text{ y } F_3 \text{ son } l.d.$$

Las filas F_1 y F_4 son linealmente dependientes por ser proporcionales (F_4 depende linealmente de F_1):

$$\frac{4}{6} = \frac{-6}{-9} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow F_4 = \frac{2}{3} \cdot F_1 \Rightarrow F_1 \text{ y } F_4 \text{ son } l.d.$$

Las filas F_1, F_2 y F_5 son linealmente dependientes por ser F_5 combinación lineal de F_1 y F_2:

$$F_5 = -2 \cdot F_1 + 5 \cdot F_2 \Rightarrow F_5 \text{ depende linealmente de } F_1 \text{ y } F_2$$

Una **combinación lineal** de las filas $F_1, F_2, \dots, F_r$ de una matriz es una expresión de la forma $\alpha_1 \cdot F_1 + \alpha_2 \cdot F_2 + \dots + \alpha_r \cdot F_r$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Una fila F de una matriz **depende linealmente** de las filas $F_1, F_2, \dots, F_r$ de dicha matriz si F es combinación lineal de dichas filas, es decir, $F = \alpha_1 \cdot F_1 + \alpha_2 \cdot F_2 + \dots + \alpha_r \cdot F_r$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Las filas $F_1, F_2, \dots, F_r$ de una matriz son **linealmente independientes** si ninguna de ellas se puede expresar como combinación lineal de las restantes, es decir , ninguna de ellas depende linealmente de las demás.

Estos mismos conceptos se pueden aplicar a las columnas.

El número de filas linealmente independientes de una matriz se llama **rango** de la matriz

$$R(A) = \text{nº filas linealmente independientes de A}$$

Teorema
En una matriz, el número de filas linealmente independiente coincide con el número de columnas linealmente independientes.
Según esto, el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Rango de matrices triangulares y escalonadas

La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular de orden 3.

Las filas F_2 y F_3 son linealmente independientes, puesto que todos los múltiplos de F_3 tienen el segundo elemento 0, lo que no sucede en F_2. Además, cualquier combinación lineal de F_2 y F_3 tendría el primer elemento 0. Como el primer elemento de F_1 es distinto de cero, F_1 no puede ser combinación lineal de F_2 y F_3. Así pues, las tres filas de A son linealmente independientes y $R(A)=3$.

Igualmente se demostraría la siguiente proposición:
Si T es una matriz triangular de orden n sin ceros en la diagonal, $R(T)=n$

Esta demostración se puede generalizar para el rango de una matriz escalonada:

$$\boxed{E \text{ matriz escalonada} \Rightarrow R(E) = \text{número de filas no nulas de } E}$$

Ejemplos:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $R(A)=3$	$C=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $R(C)=3$	$E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R(E)=3$
$B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R(B)=2$	$D=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R(D)=1$	$F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $R(F)=4$

Transformaciones que conservan el rango de una matriz

Cualquier operación con las filas o las columnas de una matriz que no cambie el número de ellas que son linealmente independientes conserva el rango de la matriz.

Por tanto:

1)	$F_i \leftrightarrow F_j$ Si se cambia el orden de las filas o columnas el rango no cambia
2)	$k \cdot F_i \quad (k \neq 0)$ Si se multiplica una fila o columna por una constante distinta de cero el rango no cambia
3)	$F_i + k \cdot F_j \quad (k \neq 0)$ Si se suma a una fila o columna un múltiplo de otra, el rango no cambia
4)	$p \cdot F_i + q \cdot F_j \quad (p \neq 0 \text{ y } q \neq 0)$ Si se multiplica una fila o columna por una constante distinta de cero y se le suma un múltiplo de otra fila o columna, respectivamente, el rango no cambia
5)	El rango no cambia si se suprime: • Una fila o columna nula • Una fila o columna igual o proporcional a otra • Una fila o columna que sea combinación lineal de otras
6)	Si se traspone una matriz el rango no cambia

Cálculo del rango por el método de Gauss

Para calcular el rango de una matriz se puede convertir, mediante transformaciones que conserven el rango, en una matriz escalonada. El rango de la matriz dada será el número de filas no nulas de la matriz escalonada obtenida.

Ejemplos

Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Apliquemos el método de Gauss para transformar la matriz *A* en una matriz escalonada.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como la matriz escalonada obtenida tiene dos filas no nulas, $R(A) = 2$.

Determina el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & -13 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada tiene tres filas no nulas y nos permite afirmar que $R(B) = 3$.

Ejercicios

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Estudia el rango de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Determina el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Soluciones

1.	a) 1	b) 2	c) 4	d) 2		
2.	a) 2	b) 1	c) 1	d) 2	e) 2	f) 3
3.	a) 3	b) 2	c) 4	d) 2		