MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Otra matriz cuadrada B de orden n se dice que es la matriz inversa de A si se cumple que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Se escribe entonces $B = A^{-1}$.

Si A y B son dos matrices cuadradas tales que $A \cdot B = I$, automáticamente se cumple $B \cdot A = I$.

$$\boxed{A^{-1} \text{ inversa de } A \iff A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman matrices **regulares** o invertibles.
Las matrices cuadradas que no tienen matriz inversa se llaman matrices **singulares**.

$$\boxed{\text{Una matriz cuadrada } A \text{ de orden } n \text{ tiene inversa} \iff R(A) = n}$$

Propiedades

Si A y B son matrices regulares, se cumple:

1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) $(k \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{k} \cdot A^{-1}$

3) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

4) $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

5) $I^{-1} = I$

Ejemplos

1. Calcula, si existe, la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+7c & 2b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos 4 ecuaciones que, agrupadas de dos en dos, serían dos sistemas de ecuaciones que se diferencian en los términos independientes.

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 3c &=& 1 \\ 2a + 7c &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{rcl} b + 3d &=& 0 \\ 2b + 7d &=& 1 \end{array}\right\}$$

Los resolvemos simultáneamente.

$$\begin{array}{rcl} -2a - 6c &=& -2 \\ 2a + 7c &=& 0 \\ \hline c &=& -2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} -2b - 6d &=& 0 \\ 2b + 7d &=& 1 \\ \hline d &=& 1 \end{array}$$

$$a - 6 = 1 \quad \text{y} \quad b + 3 = 0$$

$$a = 7 \quad \text{y} \quad b = -3$$

Soluciones de los dos sistemas:

$$a = 7 \quad c = -2 \quad \text{y} \quad b = -3 \quad d = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Nota: Siempre que calcules la matriz inversa haz la comprobación

2. Determina la matriz inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, si existe.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos las 4 ecuaciones y separando los dos sistemas de.

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 3c &=& 1 \\ 2a + 6c &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{rcl} b + 3d &=& 0 \\ 2b + 6d &=& 1 \end{array}\right\}$$

Los resolvemos simultáneamente.

$$\begin{array}{rcl} -2a - 6c &=& -2 \\ 2a + 6c &=& 0 \\ \hline 0c &=& -2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} -2b - 6d &=& 0 \\ 2b + 6d &=& 1 \\ \hline 0d &=& 1 \end{array}$$

S. Incompatible y S. Incompatible

Ninguno de los dos sistemas tiene solución y, por lo tanto:

B no tiene inversa

B es singular

Cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss-Jordan

Para hallar por este método la matriz inversa de A, colocaremos a la derecha de A la matriz identidad del mismo orden $(A \mid I)$. A la matriz obtenida le aplicaremos transformaciones elementales por filas hasta obtener una matriz de la forma $(I \mid B)$, donde B será la matriz inversa de A, o sea, $A^{-1} = B$.

Si al realizar el proceso de transformación alguna de las fila de A se anula, entonces A no tiene inversa.

Con este método estamos resolviendo simultáneamente n sistemas de ecuaciones para obtener los elementos de A^{-1}.

Ejemplos

1) Calcula la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right)\ F_2-2F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)\ F_1-3F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

2) Halla la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&6\\2&5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&6&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right)\ 3F_2-2F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&6&1&0\\0&3&-2&3\end{array}\right)\ F_1-2F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&0&5&-6\\0&3&-2&3\end{array}\right)\ \begin{array}{l}\frac{1}{3}F_1\\ \frac{1}{3}F_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{5}{3}&-2\\0&1&\frac{-2}{3}&1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-2\\\frac{-2}{3}&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-6\\-2&3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-6\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&6\\2&5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

c.q.c.

3) Halla la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&6&0&1\end{array}\right)\ F_2-2F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&0&-2&1\end{array}\right)$$

Se ha anulado una de las filas de A, por lo tanto,

A no tiene inversa

4) Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\ F_1\leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\2&-1&1&0&1&0\\1&3&-1&1&0&0\end{array}\right)\ \begin{array}{l}F_2-2F_1\\F_3-F_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&-2\\0&4&-1&1&0&-1\end{array}\right)\ F_3-4F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&-2\\0&0&-5&1&-4&7\end{array}\right)\ 5F_2+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&5&0&1&1&-3\\0&0&-5&1&-4&7\end{array}\right)\ 5F_1+F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&0&0&1&1&2\\0&5&0&1&1&-3\\0&0&-5&1&-4&7\end{array}\right)\ \begin{array}{l}\frac{1}{5}F_1\\\frac{1}{5}F_2\\-\frac{1}{5}F_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{-3}{5}\\0&0&1&\frac{-1}{5}&\frac{4}{5}&\frac{-7}{5}\end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{-3}{5}\\\frac{-1}{5}&\frac{4}{5}&\frac{-7}{5}\end{pmatrix}$$

o bien,

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-3\\-1&4&-7\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-3\\-1&4&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

c.q.c.

Ejercicios

1. Calcula, si existe, la matriz inversa de:

a) $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}6&8\\-3&-4\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}-4&-2\\3&2\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}5&2\\10&4\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

2. Halla las inversas de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}-3&1\\-5&2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}4&1&6\\0&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&1\\-2&4&1\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}0&1&-2\\6&-1&5\\2&-1&3\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

Soluciones

1. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ b) No existe B^{-1} c) $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   d) No existe D^{-1} e) $E^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ c) $C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   d) No existe D^{-1} e) $E^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$