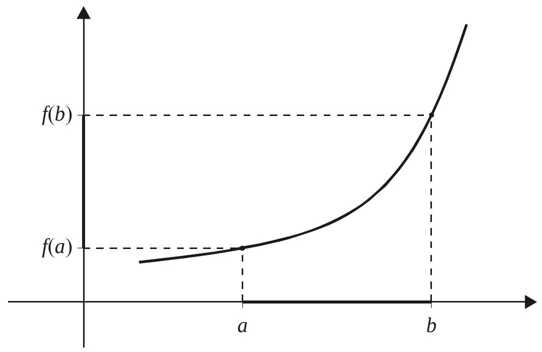
DERIVADAS

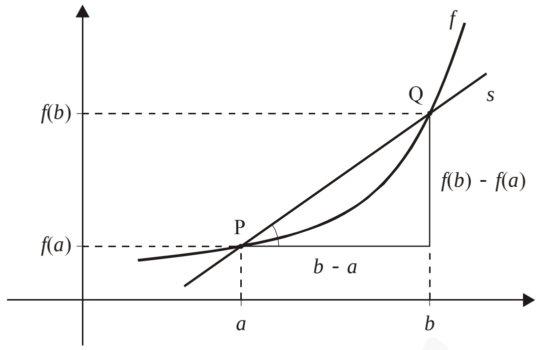
TASA DE VARIACIÓN MEDIA



Llamamos **tasa de variación media** de la función *f* entre *a* y *b* con $a < b$, y lo representamos por $TVM[a, b]$, al cociente entre la variación de $f(x)$ y la de x en el intervalo $[a, b]$.

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

RECTA SECANTE



Dados dos puntos P(a, $f(a)$) y Q(b, $f(b)$) de la gráfica de *f*, la recta ***s*** que los une es una **secante** a dicha gráfica.
La **pendiente de la recta secante** a la gráfica de la función por los puntos P(a, $f(a)$) y Q(b, $f(b)$) es

$$m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación media de la función *f* en el intervalo $[a, b]$ coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos P(a, $f(a)$) y Q(b, $f(b)$).

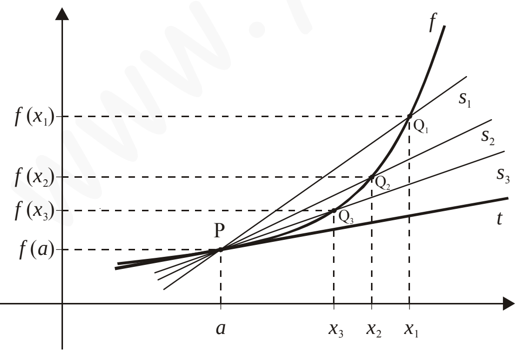
TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Llamamos tasa de variación instantánea de la función *f* en *a* al límite, si existe, de la tasa de variación media de la función *f* entre *a* y *x* cuando *x* tiende hacia *a*.

$$TVI(a) = \lim_{x \to a} TVM[a, x]$$

o sea,

$$TVI(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



RECTA TANGENTE

La recta **tangente *t*** a la gráfica de la función *f* en el puntoP será la posición límite de la secante PQ cuando el punto Q tiende hacia el punto P.

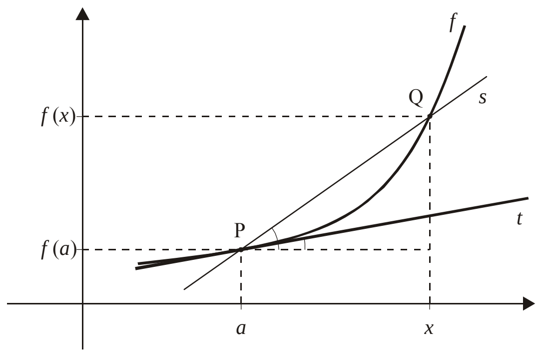
$$t = \lim_{Q \to P} s(PQ)$$

Consideremos P(a, $f(a)$) y Q(x, $f(x)$).

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = a$ es el límite de la pendiente de la secante cuando *x* tiende hacia *a*.

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Decimos que ***f* es derivable en *a*** si existe y es finito el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y, en tal caso, a dicho límite se le llama **derivada de *f* en *a*** y se le representa por ***f´*(*a*)**.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Otra expresión de la derivada de una función en un punto

$$h = x - a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a + h \\ x \to a \quad \Leftrightarrow \quad h \to 0 \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

Punto: P(a, $f(a)$)

Pendiente: $f'(a)$

Recta tangente a f en el punto de abscisa $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

El valor $f\,'(a)$ de la derivada de f en un punto a coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)).

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Si f es derivable en a, entonces es continua en a.

El recíproco no es cierto, es decir, si una función es continua en un punto, no se puede afirmar que sea derivable en dicho punto. Hay funciones que son continuas en un punto y no son derivables en dicho punto.

Ejemplo: $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

El contrarrecíproco de este teorema es de gran utilidad: " Si f no es continua en a, entonces no es derivable en a".

EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA

▪ DERIVADAS LATERALES

Si existe el límite: $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, decimos que ***f* es derivable en *a* por la izquierda**; dicho límite sería la **derivada de *f* en *a* por la izquierda** y se le representa por ***f*´₋(*a*)**.

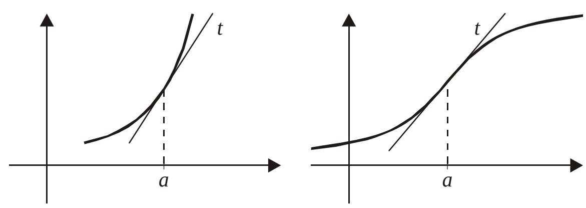
$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si existe el límite: $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, decimos que ***f* es derivable en *a* por la derecha**; dicho límite sería la **derivada de *f* en *a* por la derecha** y se le representa por ***f*´₊(*a*)**.

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

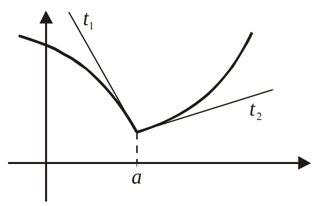
Si en un punto a existen las dos derivadas laterales, entonces la función es continua en a, pero hay que distinguir dos casos:

1) Que las dos derivadas laterales coincidan, $f'_-(a) = f'_+(a)$. Entonces f es derivable en a y $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.



2) Que las dos derivadas laterales sean distintas, $f'_-(a) \neq f'_+(a)$. En este caso se dice que la gráfica f presenta un **punto anguloso** en a.

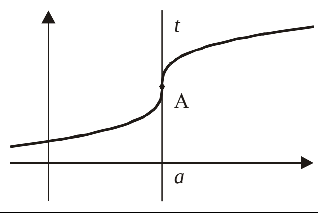
   Así pues, en un punto anguloso se pueden trazar dos semitangentes: una semitangente a la izquierda, de pendiente $f'_-(a)$, y una semitangente a la derecha, de pendiente $f'_+(a)$.



▪ DERIVADA INFINITA

Se dice que ***f*** tiene **derivada infinita** en ***a*** si es continua en a y, además, $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

Geométricamente, que la derivada en a sea infinita significa que la tangente en P(a, $f(a)$) es vertical.



FUNCIÓN DERIVADA

$$f: \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

Sea D' el conjunto formado por los elementos de D en los que la función *f* es derivable.

$$a \in \mathrm{D}' \Leftrightarrow a \in \mathrm{D} \text{ y } f \text{ es derivable en } a$$

$$\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$$

Definimos la **función derivada de *f*** como la función que a cada punto de D' le asigna la derivada de la función *f* en dicho punto.

$$f' : \mathrm{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x)$$

siendo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN $\quad u = u(x)$ y $v = v(x)$

Derivada de una suma	Derivada de una diferencia	Derivada de un producto	Derivada de un cociente
$(u+v)' = u' + v'$	$(u-v)' = u' - v'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
		Derivada de un producto de una constante por una función	Derivada de un cociente de una función entre una constante
		$(k \cdot u)' = ku'$	$\left(\frac{u}{k}\right)' = \frac{u'}{k}$

Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena. (Derivada de una función de función)	Derivada de la función recíproca (Inversa respecto de la composición de funciones)
$(v(u(x)))' = v'(u(x)) \cdot u'(x)$	$\left(u^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{u'\left(u^{-1}(x)\right)}$

Derivadas de funciones elementales		Derivadas de funciones elementales de otra función	
Constante	Identidad		
$(k)' = 0$	$(x)' = 1$		
Potencia	Raíz	Potencia	Raíz
$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
Exponencial	Logaritmo	Exponencial	Logaritmo
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(Lx)' = \frac{1}{x}$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$	$(Lu)' = \frac{u'}{u}$
$\left(a^x\right)' = a^x \cdot La$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot La \cdot u'$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
		Potencial-Exponencial	
		$\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot Lu \cdot v'$	
Seno	Arco seno	Seno	Arco seno
$(sen\, x)' = cos\, x$	$(arcsen\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(sen\, u)' = u' \cdot cos\, u$	$(arcsen\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Coseno	Arco coseno	Coseno	Arco coseno
$(cos\, x)' = -sen\, x$	$(arccos\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(cos\, u)' = -u' \cdot sen\, u$	$(arccos\, u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Tangente	Arco tangente	Tangente	Arco tangente
$(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$ $(tg\, x)' = sec^2 x$ $(tg\, x)' = 1 + tg^2 x$	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$ $(tg\, u)' = u' \cdot sec^2 u$ $(tg\, u)' = \left(1 + tg^2 u\right) \cdot u'$	$(arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$