Tabla de Derivadas

Función	Derivada	Función	Derivada
$y = k$	$y' = 0$	–	–
$y = x$	$y' = 1$	–	–
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = f(x)^2$	$y' = 2f(x)f'(x)$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
$y = \frac{1}{x^n}$	$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$y = \frac{1}{f(x)^n}$	$y' = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \ln a f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = (1 + \operatorname{tg}^2 f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$y = \operatorname{cotg} f(x)$	$y' = (-1 - \operatorname{cotg}^2 f(x))f'(x) = \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arc\,sen} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arc\,tg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Propiedades de la derivadas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables y sea k un número real. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La derivada de un número real por una función es el número por la derivada de la función:

$$y = kf(x) \Longrightarrow y' = kf'(x)$$

2. La derivada de una suma o de una diferencia es la suma o la diferencia de las derivadas:

$$y = f(x) + g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

$$y = f(x) - g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

3. La derivada de un producto es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda:

$$y = f(x)g(x) \Longrightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. La derivada de un cociente es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, menos la primera función sin derivar por la derivada de la segunda; todo ello dividido por la segunda función al cuadrado:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Algunos ejemplos de cálculo de derivadas

- $y = \sqrt{3}x \Longrightarrow y' = \sqrt{3}$
- $y = \sqrt[5]{3x+1} \Longrightarrow y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{(3x+1)^4}}$
- $y = \dfrac{2}{x^6}$. Obsérvese que la función se puede escribir así: $y = 2\dfrac{1}{x^6}$. Entonces: $y' = 2\dfrac{-6}{x^7} = \dfrac{-12}{x^7}$
- $y = \dfrac{5x-1}{5x+1} \Longrightarrow y' = \dfrac{5(5x+1)-(5x-1)5}{(5x+1)^2} = \dfrac{25x+5-25x+5}{(5x+1)^2} = \dfrac{10}{(5x+1)^2}$
- $y = \dfrac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow y' = \dfrac{0(x-1)^3 - 2\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{-6(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{-6}{(x-1)^4}$
- $y = x^3\sqrt{x^5} \Longrightarrow y' = 3x^2\sqrt{x^5} + \dfrac{5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \dfrac{6x^2\cdot x^5}{2\sqrt{x^5}} + \dfrac{5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \dfrac{6x^7+5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \dfrac{11x^7}{2\sqrt{x^5}} = \dfrac{11x^7\sqrt{x^5}}{2x^5} = \dfrac{11x^2\sqrt{x^5}}{2} = \dfrac{11x^2\cdot x^2\sqrt{x}}{2} = \dfrac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

  Esta derivada se podría haber hecho de otras dos formas distintas:

  ✓ Obsérvese que la función se puede escribir así: $y = x^3\sqrt{x^5} = x^3\cdot x^{5/2} = x^{11/2}$. Entonces $y' = \dfrac{11}{2}x^{9/2} = \dfrac{11}{2}\sqrt{x^9} = \dfrac{11}{2}x^4\sqrt{x} = \dfrac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

  ✓ La otra forma consiste en escribir la función introduciendo x^3 dentro del radical: $y = x^3\sqrt{x^5} = \sqrt{x^{11}}$. Entonces $y' = \dfrac{11x^{10}}{2\sqrt{x^{11}}} = \dfrac{11x^{10}\sqrt{x^{11}}}{2x^{11}} = \dfrac{11x^{15}\sqrt{x}}{2x^{11}} = \dfrac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

- $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Utilizando que la derivada de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es $y' = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$, se tiene que $y' = -\dfrac{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^4}} = -\dfrac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[3]{x}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$

  Pero quizás sea más fácil hacerlo así: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3} \Longrightarrow y' = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$

- $y = \dfrac{5x}{\sqrt{x}-5} \Longrightarrow y' = \dfrac{5\left(\sqrt{x}-5\right) - 5x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{\dfrac{10\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-5\right)-5x}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{10\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-5\right)-5x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{10x\left(\sqrt{x}-5\right)-5x\sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{10x\sqrt{x}-50x-5x\sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{5x\sqrt{x}-50x}{2x\left(\sqrt{x}-5\right)^2} = \dfrac{5\left(\sqrt{x}-10\right)}{2\left(\sqrt{x}-5\right)^2}$

- $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\Longrightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x}{x^4}-\dfrac{3x^2}{x^6}=y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}=\dfrac{-x^2-2x-3}{x^4}$

  También se puede hacer escribiendo $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3}$, y aplicando la regla de derivación de un cociente: $y'=\dfrac{(2x+1)x^3-(x^2+x+1)3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2\left((2x^2+x)-(3x^2+3x+3)\right)}{x^6}=\dfrac{-x^2-2x-3}{x^4}$

- $y=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\Longrightarrow y'=\dfrac{-2\left(x^2-1\right)^2-\left(-2x\cdot 2\left(x^2-1\right)2x\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\dfrac{-2\left(x^2-1\right)^2+8x^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\dfrac{-2\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\dfrac{-2\left(-3x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=\dfrac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$

- $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}\Longrightarrow y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^x-\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x-2x\,\mathrm{e}^x}{2\,\mathrm{e}^{2x}\sqrt{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x(1-2x)}{2\,\mathrm{e}^{2x}\sqrt{x}}=\dfrac{1-2x}{2\,\mathrm{e}^x\sqrt{x}}$

- $y=\dfrac{\ln x}{x}\Longrightarrow y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

- $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}\Longrightarrow y'=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

- $y=\dfrac{x+1}{x+2}(2x-5)\Longrightarrow y'=\left(\dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right)(2x-5)+\dfrac{x+1}{x+2}\cdot 2=\dfrac{2x-5}{(x+2)^2}+\dfrac{2x+2}{x+2}=\dfrac{2x-5+(2x+2)(x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x-5+2x^2+4x+2x+4}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+8x-1}{(x+2)^2}$

- $y=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+3\right)\Longrightarrow y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(\sqrt{x}+3\right)+\sqrt[3]{x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt[3]{x}}{3x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+3\right)+3\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}{6x}=\dfrac{\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt{x}+6+3\sqrt{x}\right)}{6x}=\dfrac{\sqrt[3]{x}\left(5\sqrt{x}+6\right)}{6x}$

- $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2}}\Longrightarrow y'=\dfrac{-\dfrac{2x}{\left(x^2-2\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2}}}=\dfrac{-\dfrac{2x}{\left(x^2-2\right)^2}}{\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2}}}=-\dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{(x^2-2)^2}=-\dfrac{x(x^2-2)}{(x^2-2)^2\sqrt{x^2-2}}=-\dfrac{x}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$

- $y=x^2(x-2)^4\Longrightarrow y'=2x(x-2)^4+x^2 4(x-2)^3=2x(x-2)^3(x-2+2x)=2x(x-2)^3(3x-2)$

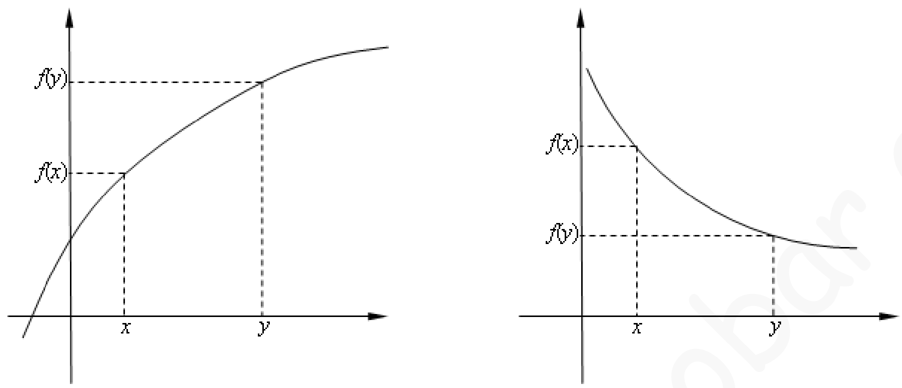
- $y=\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}\Longrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}}\cdot\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}=\sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}}\cdot\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{2x^2}$

Aplicaciones de las derivadas

1. ***Monotonía. Extremos relativos***

Definición 1. Sea f una función real de variable real definida en un intervalo (a, b):

- f es *estrictamente creciente* en (a, b) si: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \; \forall \; x \, , y \in \mathbb{R}$
- f es *estrictamente decreciente* en (a, b) si: $x < y \Rightarrow f(x) > (y) \; \forall \; x \, , y \in \mathbb{R}$

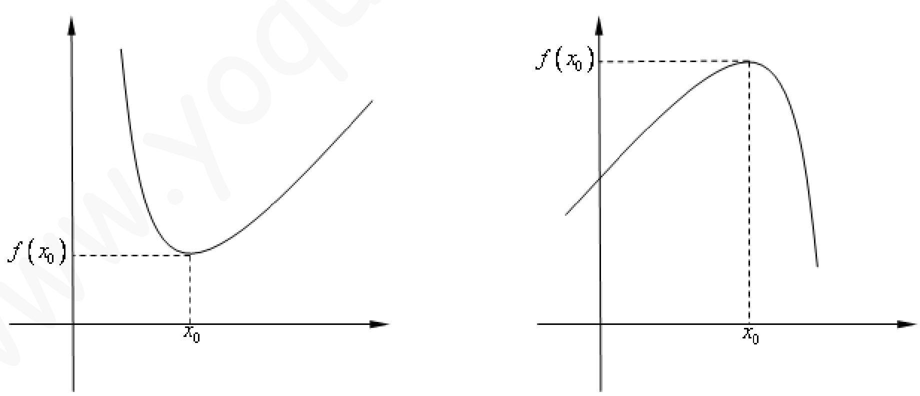


(a) Creciente (b) Decreciente

Figura 1: Monotonía

Definición 2. Sea f una función real de variable real definida en un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$. Sea también $\varepsilon > 0$ y $E = (x_0 - \varepsilon \, , \, x_0 + \varepsilon)$, un entorno centrado en x_0.

- Se dice que f alcanza en el punto x_0 un *mínimo relativo* si $f\,(x_0) \leqslant f(x), \forall \; x \in E$.
- Se dice que f alcanza en el punto x_0 un *máximo relativo* si $f\,(x_0) \geqslant f(x), \forall \; x \in E$.



(a) Mínimo (b) Máximo

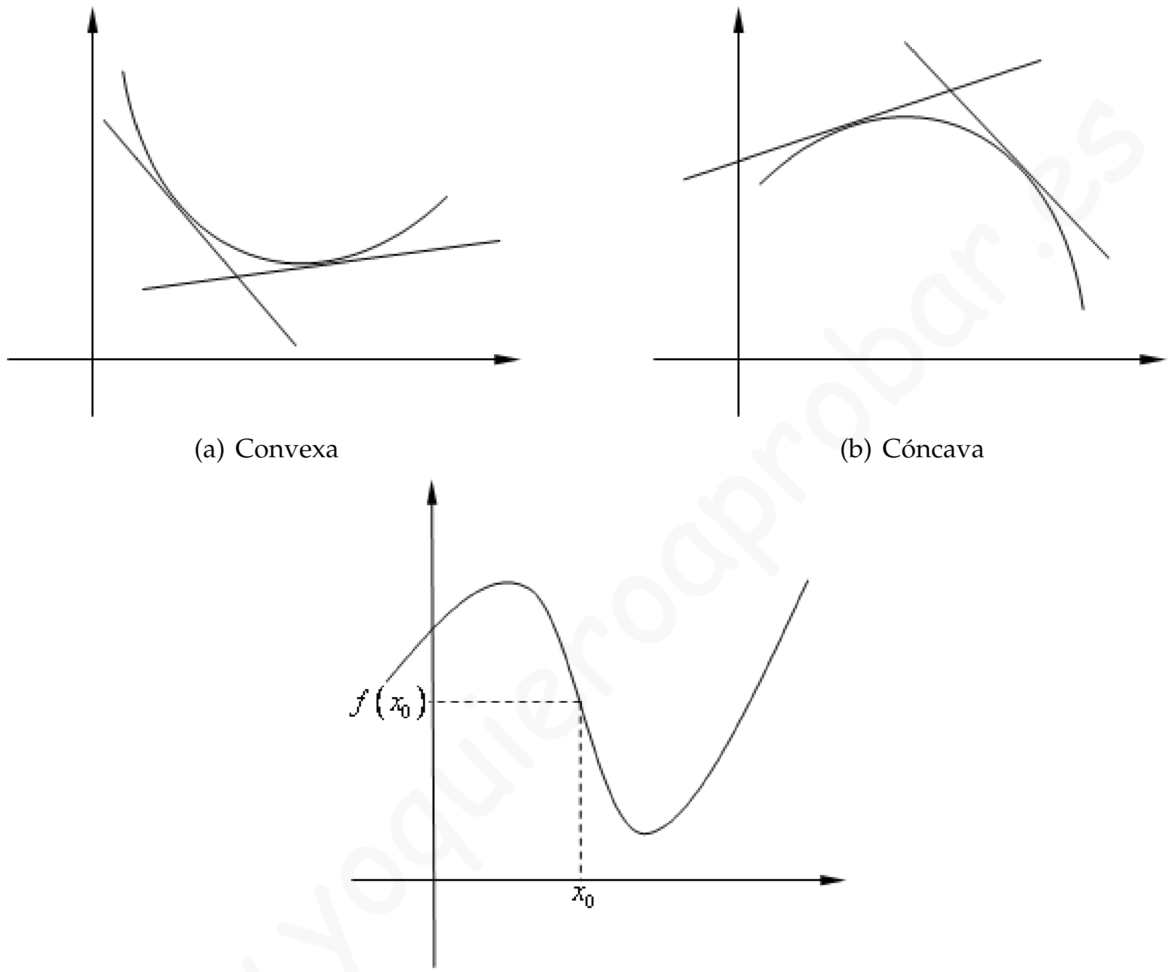
Figura 2: Extremos relativos

Teorema 1. *Sea f una función real de variable real definida en un intervalo (a, b). Entonces:*

- *Si $f'(x) > 0, \forall \; x \in (a, b) \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).*
- *Si $f'(x) < 0, \forall \; x \in (a, b) \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).*
- *Si f alcanza un máximo o un mínimo relativo en un punto $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f'\,(x_0) = 0$.*

2. ***Curvatura. Puntos de inflexión***

Definición 3. Una función se dice *convexa* en un intervalo, si en dicho intervalo las tangentes a la gráfica quedan por debajo de la misma. En caso contrario se dice *cóncava*. Si en un punto determinado cambia la curvatura, es decir, a la izquierda del mismo la función es cóncava y a la derecha convexa, o al revés, dicho punto recibe el nombre de *punto de inflexión*.



(a) Convexa (b) Cóncava

(c) Punto de inflexión

Figura 3: Curvatura y puntos de inflexión

Teorema 2. *Sea f una función real de variable real definida en un intervalo (a, b). Entonces:*

- *Si* $f''(x) > 0, \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow$ *f es convexa en el intervalo* (a, b).
- *Si* $f''(x) < 0, \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow$ *f es cóncava en el intervalo* (a, b).
- *Si f tiene punto de inflexión en* $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Ejemplos del estudio de la monotonía, los extremos, la curvatura y los puntos de inflexión de una función

1. ***Monotonía y extremos relativos***

   En la práctica, para estudiar la monotonía y los extremos relativos de una función f, se procede de la siguiente manera:

   a) Se excluyen del estudio los siguientes puntos:
   - Los puntos que no pertenecen al dominio de la función (puntos de discontinuidad de f, que también lo son de f', pues si una función no es continua en un punto tampoco es derivable en el mismo).
   - Los puntos en los que no esté definida f' (el resto de puntos de discontinuidad de f').
   - Los *puntos críticos* de f, es decir, aquellos que hacen la derivada 0: $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$.

   b) Se divide la recta real $\mathbb{R}$ en distintos intervalos, separados por los puntos anteriores. Es posible demostrar que en cada uno de estos intervalos el signo de f' no cambia. Por tanto, según el Teorema 1, f es siempre estrictamente creciente, o estrictamente decreciente, en cada uno de ellos.

   c) Teniendo en cuenta lo anterior, construimos una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f' y otra para la monotonía de f.

   d) En los puntos que separan los intervalos, si no son puntos de discontinuidad de f, observamos la monotonía de f a la izquierda y a la derecha. Si hay cambio de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, o de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, tendremos un máximo o un mínimo relativo, respectivamente, en dicho punto.

Ejemplo 1: Estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$ (-1 y 1 anulan el denominador). La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Es claro que los puntos de discontinuidad de f' son los mismos que los de f (-1 y 1 son otra vez los números que anulan el denominador de f').

Veamos los puntos que anulan la derivada:

$$\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2-3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ó } x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Así pues los puntos obtenidos para dividir la recta real son -1 y 1 (que no pertenecían al dominio) y estos últimos: 0, $\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}$. Por tanto:

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow\uparrow$	máximo	$\downarrow\downarrow$	$\nexists$	$\downarrow\downarrow$	?	$\downarrow\downarrow$	$\nexists$	$\downarrow\downarrow$	mínimo	$\uparrow\uparrow$

Los signos se han obtenido dando un valor cualquiera a f' dentro del intervalo. Por ejemplo, para $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, tomamos, por ejemplo, $x=-2$ y evaluamos la derivada en este punto:

$$f'(-2)=\frac{(-2)^4-3(-2)^2}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{16-12}{9}=\frac{4}{9}>0$$

Obsérvese que el signo del denominador, al ser un cuadrado, será siempre positivo. Por tanto bastaría con estudiar, en este caso, el signo del numerador. Hay que destacar que lo importante no es resultado en sí, sino su signo.
Por tanto f es estrictamente creciente en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, y es estrictamente decreciente en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)$.
En $x_0=-\sqrt{3}$ la función cambia de ser estrictamente creciente a ser estrictamente decreciente, por lo que $x_0=-\sqrt{3}$ es un máximo relativo. Como $f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$, las coordenadas del máximo relativo son $\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.
En $x_0=\sqrt{3}$ la función cambia de ser estrictamente decreciente a ser estrictamente creciente, por lo que $x_0=-\sqrt{3}$ es un mínimo relativo. Como $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
Obsérvese que, excluyendo los puntos de discontinuidad de la función, queda un punto $x_0=0$, en el que no cambia la monotonía de la función. En estos casos lo que ocurre es que x_0 es un punto de inflexión de la función.

2. ***Curvatura y puntos de inflexión***
El estudio de la curvatura y de los puntos de inflexión de una función f es similar al de la monotonía y los extremos relativos. Dividimos la recta real $\mathbb{R}$ en intervalos. En este caso los puntos que se excluyen, y que separarán cada uno de los intervalos, son los puntos de discontinuidad de f, f' y f'', así como los puntos que anulan la segunda derivada. Es posible demostrar que en estos intervalos el signo de f'' no cambia.
A continuación, como en el caso de la monotonía, se construye una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f'' y otra para la curvatura de f.
Finalmente, en los puntos que separan los intervalos, si no son puntos de discontinuidad de f, observamos la curvatura de f a la izquierda y a la derecha. Si ha cambio de convexa a cóncava o de cóncava a convexa, tendremos un punto de inflexión en dicho punto.

Ejemplo 2: Estudiar la curvatura de la función del Ejemplo 1, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.
Usando los resultados obtenidos en el Ejemplo 1, tenemos:

$$f''(x)=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$= \frac{\left(x^2-1\right)\left[\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)-4x\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3} =$$

$$= \frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Los puntos de discontinuidad vuelven a ser -1 y 1. Veamos dónde se anula la segunda derivada:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3=0} \Leftrightarrow 2x\left(x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ x^2+3=0 \text{ , que no tiene solución} \end{cases}$$

La tabla que resulta ahora es la siguiente:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	cóncava	$\nexists$	convexa	punto de inflexión	cóncava	$\nexists$	convexa

Por tanto f es convexa en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
En $x_0=0$ la función pasa de ser convexa a cóncava, luego $x_0=0$ es un punto de inflexión. Como $f(0)=0$, las coordenadas del punto de inflexión son $(0,0)$.

Con el estudio realizado en los ejemplos anteriores y teniendo en cuenta que $x=-1$ y $x=1$ son sendas asíntotas verticales, podemos realizar las representación gráfica de la función:

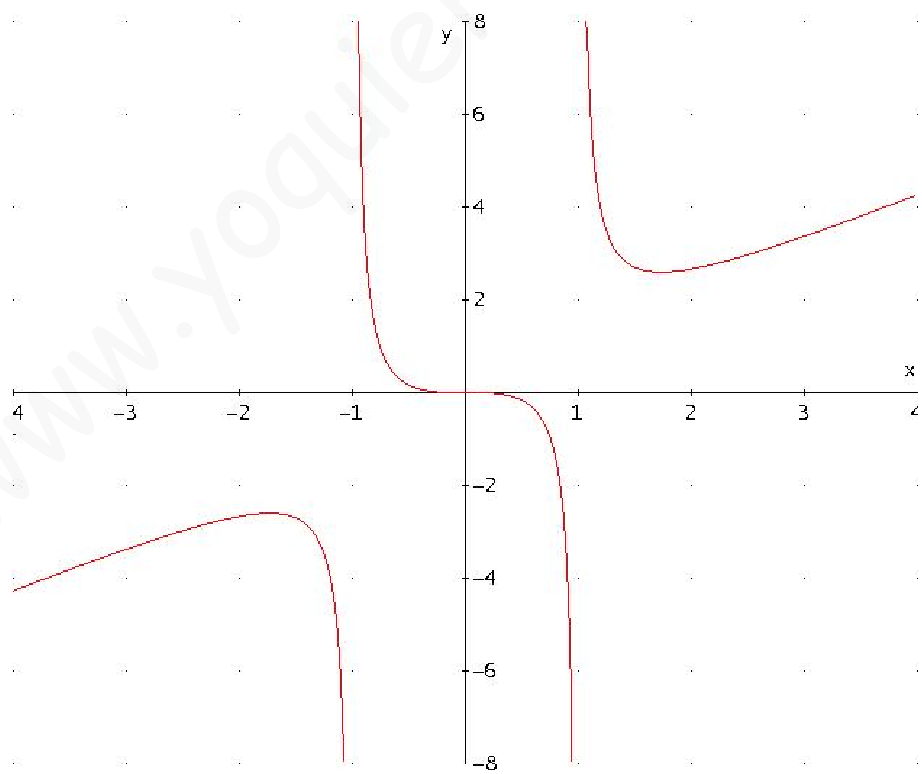


Figura 4: Gráfica de la función

Ejercicios

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado todo lo posible.

1) $y = x^3 + 2x$ *2)* $y = (x+2)^2$ *3)* $y = x^2 - 5$

4) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ *5)* $y = (x + 2\sqrt{x})^3$ *6)* $y = 3\sqrt[5]{x^3} + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x}$

7) $y = x\sqrt[3]{x^3} + 7x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ *8)* $y = \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{6}$ *9)* $y = 2x^3 + 9x^2$

10) $y = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ *11)* $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{x\sqrt{x}}$ *12)* $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$

13) $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x - x^2 - 3x^3$ *14)* $y = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ *15)* $y = x^2\sqrt{x^3}$

16) $y = 1 - \dfrac{2}{x^2}$ *17)* $y = 5\sqrt{x} + \sqrt{5x} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3}}$ *18)* $y = \dfrac{\ln x}{7} + \dfrac{2}{x}$

19) $y = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$ *20)* $y = 3x(x^2 - 2)$ *21)* $y = (2 - 6x)^2$

22) $y = \dfrac{x + x^3}{x^2}$ *23)* $y = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$ *24)* $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{3}$

25) $y = \dfrac{x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$ *26)* $y = (x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^x$ *27)* $y = \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$

28) $y = (x^2 + 3x - 1)(2x^3 - 1)$ *29)* $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ *30)* $y = \dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$

31) $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ *32)* $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ *33)* $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x - 2}$

34) $y = 3x \operatorname{sen} x + 4$ *35)* $y = \dfrac{senx}{3}$ *36)* $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

37) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x}$ *38)* $y = x \operatorname{sen} x$ *39)* $y = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

40) $y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x}$ *41)* $y = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2$ *42)* $y = \ln x \operatorname{sen} x$

43) $y = \dfrac{1}{\ln x}$ *44)* $y = (x^5 - 3x)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *45)* $y = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

46) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ *47)* $y = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)(2x - 5)$ *48)* $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$

49) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *50)* $y = x^2 \operatorname{sen} x$ *51)* $y = \dfrac{\cos x}{x}$

52) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ *53)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ *54)* $y = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2$

55) $y = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$ *56)* $y = 2\sqrt[4]{4 - x^2}$ *57)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$

58) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ *59)* $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ *60)* $y = \dfrac{\cos x}{x}$

2. Realiza un estudio completo de las funciones que se dan a continuación: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, continuidad, monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión y representación gráfica:

   a) $f(x) = x^3 - 3x$
   b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 2}$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$
   e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2}$
   f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
   g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$
   h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$
   i) $f(x) = \dfrac{x(x + 1)}{x^2 - 4}$
   j) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
   k) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$
   l) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + 9}$
   m) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 3}$
   n) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
   ñ) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$
   o) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

3. Suponiendo que el rendimiento (R) en % de un estudiante en una hora de examen viene dado por $R(t) = 300t(1 - t)$ siendo $0 \leqslant t \leqslant 1$ (tiempo en horas), se pide:

   a) Representar gráficamente la función $R(t)$.
   b) Indicar cuándo aumenta y disminuye el rendimiento. ¿Cuándo se hace cero?
   c) ¿Cuándo es máximo el rendimiento y cuál es?

4. El coeficiente de elasticidad de un producto, en función de la temperatura (t) en grados centígrados, viene definido por la función: $E(t) = \dfrac{t^2}{9} - 2t + 10$.

   a) ¿A qué temperatura o temperaturas se obtiene una elasticidad de 2?
   b) Calcular el valor de la temperatura para la que la elasticidad es mínima.
   c) Calcular ese mínimo.

5. La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$, siendo x el número de días.

   a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?
   b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.
   c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.