1. Integral definida

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$.(Para simplificar la demostración se considera positiva, $f(x) > 0$, en todo punto del intervalo) Se divide el intervalo $[a, b]$ en "n" subintervalos (no necesariamente de la misma amplitud) por los puntos

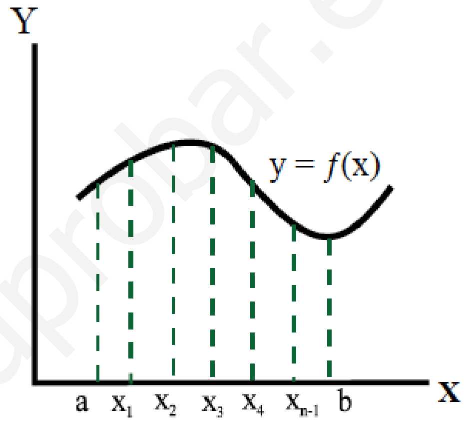
$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

así se dispone de los intervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

de amplitudes respectivas

$h_1 = x_1 - x_0, h2 = x_2 - x_1, \dots, h_n = x_n - x_{n-1}$



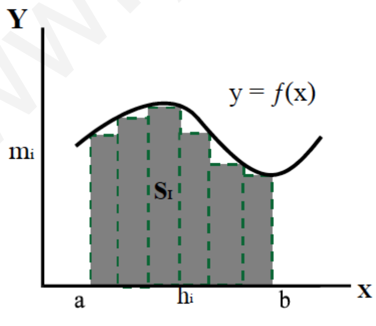
Ahora bien, como la función es contínua en todo el intervalo $[a, b]$, lo es también en cada uno de los subintervalos, por lo que en cada uno de ellos alcanza un mínimo absoluto, $m_1, m_2, \dots, m_n$ y un máximo absoluto, $M_1, M_2, \dots, M_n$.
Trazando paralelas al eje OY por cada punto y paralelas al eje OX por los mínimos absolutos, m_i, se obtienen "n" rectángulos, denominados rectángulos interiores. La suma de sus áreas es:

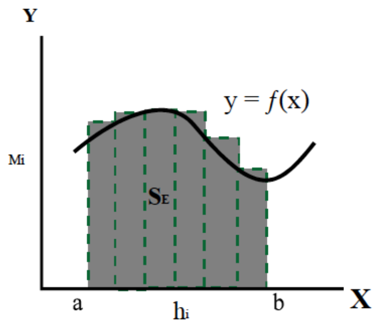
$$S_I = h_1\, m_1 + h_2\, m_2 + \cdots + h_n\, m_n = \sum_{k=1}^{n} h_k\, m_k$$

De forma similar, trazando paralelas al eje OX por los máximos absolutos, M_i, se obtienen "n" rectángulos, llamados rectángulos exteriores. La suma de las áreas es

$$S_E = h_1\, M_1 + h_2\, M_2 + \cdots + h_n\, M_n = \sum_{k=1}^{n} h_k\, M_k$$

consecuencia inmediata de las figuras, es $S_I \leq S_E$.





Ahora bien, si se considerasen otros nuevos puntos en el intervalo $[a, b]$ se tendrían otros subintervalos y otros valores de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y exteriores, S'_I y S'_E. Se repite el proceso eligiendo los puntos cada vez más próximos entre sí. Así se formarían dos sucesiones de números reales las de:

- La suma de las áreas de los rectángulos inferiores:

$$S_I, S'_I, S''_I, \ldots, \text{ y la}$$

- La suma de las áreas de los rectángulos exteriores:

$$S_E, S'_E, S''_E, \ldots,$$

Simbolizando por m y M al mínimo y máximo absoluto de $f(x)$ en $[a, b]$, respectivamente, se tiene, en cada tipo de subdivisión

$$m \leq m_1 \leq M_1 \leq M; m \leq m_2 \leq M_2 \leq M; \ldots; m \leq m_n \leq M_n \leq M$$

de donde

$$\begin{gathered} mh_1 + mh_2 + \ldots + mh_n \leq m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n \leq \\ \leq M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_m \leq Mh_1 + Mh_2 + \ldots + Mh_n \end{gathered}$$

Como

$$\begin{gathered} h_1 + h_2 + \ldots + h_n = b - a \\ mh_1 + mh_2 + \ldots + mh_n = m(h_1 + h2_+ \ldots + h_n) = m(b - a) \\ m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n = S_I \\ M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n = S_E \\ Mh_1 + Mh_2 + \ldots + Mh_n = M(b - a) \end{gathered}$$

Por consiguiente:

$$\boxed{m(b - a) \leq S_I + S_E \leq M(b - a)}$$

que expresan cualquiera que sea la subdivision:

- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos interiores, $S_I, S'_I, S''_I, \ldots,$ está acotada inferiormente.
- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos exteriores, $S_E, S'_E, S''_E, \ldots,$ está acotada superiormente.
- Dado que $S_I \leq S_E$, ambas sumas están acotadas.

Ahora bien, restando $m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n = S_I$ y $M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n = S_E$, tenemos

$$S_E - S_I = M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n - m_1h_1 - m_2h_2 - \ldots - m_nh_n$$
$$S_E - S_I = (M_1 - m_1)h_1 + (M_2 - m_2)h_2 + \ldots + (M_n - m_n)h_n$$

Dado que se ha supuesto que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, si se consideran los subintervalos los suficientemente pequeños, las diferencias $M_i - m_i$ pueden ser tan pequeñas como se desean. Así se toman

$$M_1 - m_1 < \epsilon, M_2 - m_2 < \epsilon, \ldots, M_n - m_n < \epsilon \Rightarrow$$
$$RightarrowS_E - S_I = h_1\epsilon + h_2\epsilon + \ldots + h_n\epsilon = (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)\epsilon = (b - a)\epsilon$$

Luego para un ϵ lo suficientemente pequeño, $S_E - S_I < (b - a)\epsilon$ se puede hacer tan pequeño como se quiera.
Simbolizando por $\overline{S_I}$ al extremo superior de la sucesión $S_I, S'_I, S''_I, \ldots$ y por $\overline{S_E}$ al extremo inferior de la sucesión $S_E, S'_E, S''_E, \ldots$ como

$$\text{lím}(S_E - S_I) = 0$$

se cumple

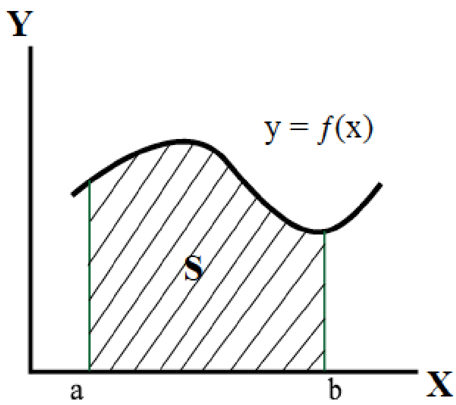
$$\overline{S_E} = \overline{S_I}$$

De lo que se saca la conclusión que el extremo superior de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y el extremo inferior de las sumas de las áreas de los rectángulos exteriores coinciden.
Representando por S el área del trapecio de la figura, delimitado por $f(x)$, el intervalo $[a, b]$ y las paralelas al eje OX, $x = a$ y por $x = b$, como para toda subdivisión se cumple:

$$S_I \leq S \leq S_E$$

Por la consecuencia anterior, se verifica:

$$\boxed{S_I = S = S_E}$$



De esta forma se puede definir el área del trapecio por

$$\boxed{S = \overline{S_I} = \lim_{h_i \to 0} S_I = \lim_{h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} h_n m_k} \boxed{S = \overline{S_E} = \lim_{h_i \to 0} S_R = \lim_{h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} h_n M_k}$$

A dicho número real se le llama integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y se escribe:

$$\boxed{\overline{S_I} = \overline{S_E} = \int_a^b f(x)\, dx}$$

2. Signo de la integral definida.

En la expresión anterior se ha considerado a la función positiva en todo punto del intervalo $[a, b]$. En esta situación, al ser m_k, M_k, h_k positivos, también lo son los productos $h_k M_k$ y $h_k m_k$ y sus sumas S_I y S_E, y en consecuencia la integral definida (límite de sumas), luego

$$\text{Si } f(x) > 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\, dx > 0}$$

Si la función $f(x)$ es negativa en todo punto de $[a, b]$, h_k son positivos, pero m_k y M_k son negativos, por lo que son negativos los productos $h_k m_k$ y $h_k M_k$ y también lo son sus sumas. Por tanto, si $f(x) < 0$ su integral definida es negativa.

$$\text{Si } f(x) < 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\, dx < 0}$$

Como el área es una medida, se debe expresar como número positivo; por lo que en el presenta caso el área (no la integral definida) es

$$S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

Se insiste en que la integral definida puede ser positiva o negativa, mientras que el área del trapecio hay que considerarla como número positivo.

3. Propiedades de la integral definida.

Nos limitaremos únicamente a enunciar las propiedades de la integral definida.

1. La integral definida de uan constante por una función es igual a la constante por la integral definida de la función. Para $K =$ constante

$$\boxed{\int_a^b K \cdot f(x)\, dx = K \cdot \int_a^b f(x)\, dx}$$

2. La integral definida de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones sumando.

   Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones contínuas en $[a, b]$,

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)] = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx}$$

3. Si $a < b$ y $f(x) < g(x)$, se tiene:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

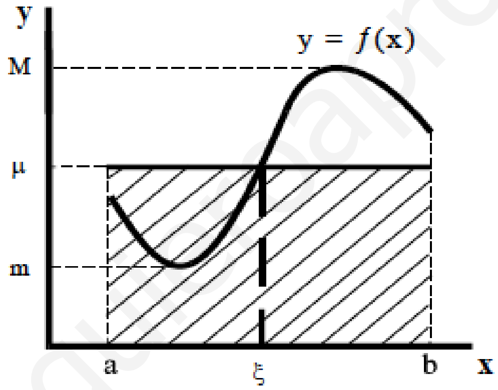
4.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

4. Teorema del valor medio del cálculo integral.f

Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe en dicho intervalo al menos un punto $x = \xi$ tal que verifique:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (a - b) \cdot f(\xi)}$$



5. Teorema Fundamental del cálculo integral. Función área. Derivada de la función área.

Sea una función $f(x)$ continua en un intervalo I. Si se consideran los puntos $x = a$ y x, punto genérico del mismo. Se define la función área $A(x)$ por el recinto del plano delimitado por la rama de la función $f(x)$ entre $x = a$ y x, el eje OX y las rectas ordenadas $x = a$ y x.
Se considera un punto suficientemente próximo a x, $x + dx$, dentro del intervalo I; la función área adaptada el valor $A \cdot (x + dx)$. Sea la diferencia $A(x + dx) - A(x)$. Por el teorema anterior:

$$\int_x^{x+dx} f(x)\,dx = (x + dx - x)f(\xi)$$

es decir

$$A(x + dx) - A(x) = f(\xi)dx$$

de donde

$$\frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = f(\xi)$$

Haciendo tender $dx \to 0$, P' tiende a P, y por tanto, $f(\xi)$ tiende a $f(x)$. Como, por otra parte, se tiene:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = A'(x) \Rightarrow \boxed{A'(x) = f(x)}$$

que señalan que la función área es una primitiva de la función $f(x)$.
La consecuencia anterior nos abre un importante camino para la determinación del área de figuras planas, apoyándonos en la obtención de funciones primitivas.

6. Regla de Barrow

De lo anterior expresado se puede deducir:

$$A(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene que:

$$A(x) - F(x) = K(\text{constante}) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = F(x) + K$$

Para $x = a$ resulta

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(a) + K$$

como

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \Rightarrow F(a) + K = 0 \Rightarrow K = -F(a)$$

Fijando $x = b$, resulta la llamada fórmula de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Ejemplos:

- $\displaystyle\int_1^3 (2x - 3)\, dx = \left[x^2 - 3x\right]_1^3 = (3^2 - 3 \cdot 3) - (1^2 - 3 \cdot 1) = (9 - 9) - (1 - 3) = 2$

- $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^4}\,dx$ Calculamos primero una primitiva:

  $$\int \frac{1}{x(\ln x)^4}\,dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{-4}\,dx = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3(\ln x)^3}$$

  Entonces:

  $$\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^4}\,dx = \left[-\frac{1}{3(\ln x)^3}\right]_2^3 = -\frac{1}{3(\ln 3)^3} - \left(-\frac{1}{3(\ln 2)^3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 2)^3}\right)$$

- Calcular $G'(x)$ sabiendo que la función G es: $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ Por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

  $$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_1^x f(t)\,dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

  Por tanto, $G'(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

- Calcular la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$ Consideremos que $G(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$, es decir, G es una primitiva de f y, por tanto,

  $$G'(x) = f(x) \Rightarrow G'(x) = e^{-x^2}$$

  Aplicando la regla de Barrow, tendremos:

  $$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt = G(2x) - G(x)$$

  Calculamos la derivada de $F(x)$:

  $$F'(x) = G'(2x)\cdot 2 - G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

- Determina los máximos y los mínimos relativos de la función f definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x (t^3 - 4t)\,dt$ Teniendo en cuenta el teorema fundamental del Cálculo Integral, la derivada de la función f nos viene dada por la función $f'(x) = x^3 - 4x$ ya que la función que aparece en el integrando de f es continua. Para calcular los máximos y mínimos relativos de la función f anulamos esta derivada: $f'(x) = x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x =$

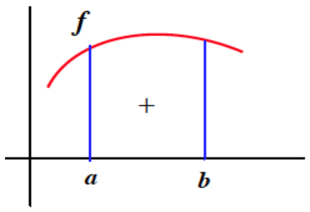
$2\,, x = -2$. Para estudiar si corresponden a máximos o mínimos estudiamos el signo de la derivada segunda: $f''(x) = 3x^2 - 4$ en cada uno de estos puntos:

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 8 > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -2 \\ f''(0) &= -4 < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } x = 0 \\ f''(2) &= 8 > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = 2 \end{aligned}$$

7. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas.

El problema que se nos plantea es calcular el área del recinto limitado por la gráfica de una función y determinadas rectas. Antes de aplicar la integral definida conviene, siempre que sea posible, representar el recinto correspondiente y después, por sumas o restas de integrales, hallaremos el área pedida.
Podemos considerar las siguientes situaciones:

1. **La función es positiva en el intervalo $[a, b]$.**



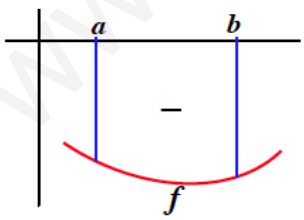
Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ en todo punto del intervalo. Las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ con la gráfica de la función determinan un recinto cuya área queremos calcular. Este recinto es un trapecio cuya área nos viene dada por:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

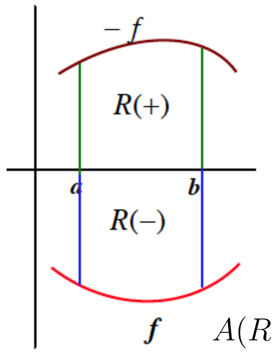
Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$, el eje OX, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. Puesto que la función es positiva en todo su dominio, el área del recinto nos vendrá dada por:

$$A(R) = \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{6}u^2$$

2. **La función es negativa en el intervalo $[a, b]$.**



Consideremos una función f continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo valor x del intervalo. El recinto delimitado por la gráfica de la función y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ queda situado por debajo del eje de abscisas.



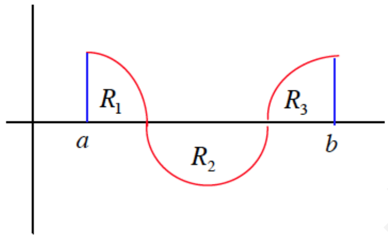
El área del recinto es la del trapecio pero ya no nos viene dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puesto que al ser f negativa, la integral definida es negativa.
Si consideramos la función opuesta $(-f)$, el nuevo recinto limitado por esta función y las rectas dadas, es igual al anterior, por ser simétricos respecto del eje de abscisas.
En consecuencia, sus áreas serán iguales y tendremos:

$$A(R(-)) = A(R(+)) = \int_a^b (-f)(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por la curva $y = -x^2$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

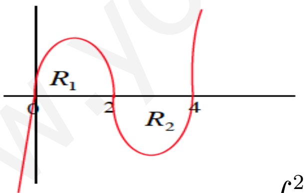
$$A(R) = -\int_{-2}^{2} (-x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}u^2$$

3. **La función toma valores positivos y negativos en el intervalo** $[a, b]$.



Cuando una función continua $f(x)$ no tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$, su gráfica determina con el eje OX varias regiones $R_1, R_2, R_3, \ldots$
En este caso el área del recinto pedido será la suma de las áreas de cada uno de los recintos. No podemos calcular la integral definida entre a y b, sino que será necesario calcular las áreas de cada uno de los recintos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ y sumarlas después.

Ejemplo: Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.



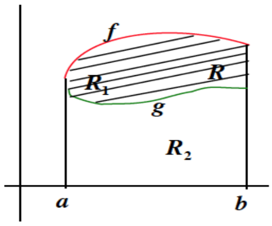
Los puntos de corte de nuestra función con el eje OX son $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$. EL recinto cuya área queremos calcular se descompone en dos recintos: uno situado por encima del eje y el otro por debajo. Por tanto:

$$\begin{aligned} A(R) = A(R_1) + A(R_2) &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x\,dx - \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_2^4 = 4 - (-4) = 8u^2 \end{aligned}$$

4. **Área del recinto donde intervienen dos funciones.** El problema que se nos plantean ahora es el de calcular el área del recinto limitado por las gráficas de dos funcinoes

continuas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si las gráficas se cortan en dos o más puntos pueden determinar un recinto cuya área es posible calcular. En este caso, hay que hallar los puntos de corte de las dos curvas.

- **Las dos funciones son positivas en** $[a, b]$ **y no se cortan.**

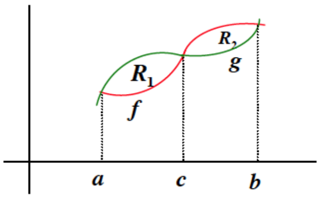


En este caso, el área del recinto limitado por las dos funciones es igual a la diferencia de las áreas de los trapecios determinados por las funciones.

$$\begin{aligned} A(R) = A(R_1) - A(R_2) &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \end{aligned}$$

- **Las funciones son positivas o negativas en** $[a, b]$ **y no se cortan.** En este caso es válida la expresión anterior ya que a partir de las funciones f y g podemos obtener las funciones $f + k$ y $g + k$, siendo $k > 0$ y suficientemente grande, que serían positivas; el recinto delimitado por las nuevas funciones tiene igual área que el recinto primitivo.

- **Las dos funciones se cortan.**

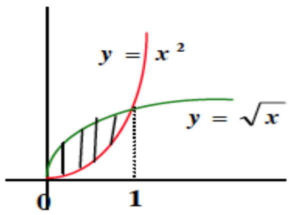


En este caso se cosideran los subintervalos donde las funciones cumplen las condiciones de casos anteriores. En este tendriamos:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_a^c [g(x) - f(x)]\,dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Ejemplo:

- Halla el recinto limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$. Dibujamos el recinto limitado por las curvas y calculamos los puntos de corte de ellas:



$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ y^2 & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2)^2 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

El área del recinto nos vendrá dada por:

$$A(R) = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx =$$
$$= \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}u^2$$