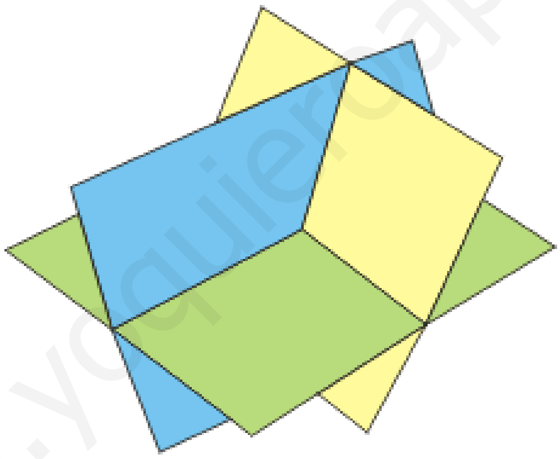
ÁNGULOS y DISTANCIAS entre RECTAS y PLANOS



MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González

IES Fernando de Mena

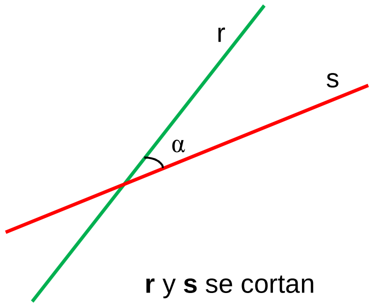
Dpto. de Matemáticas

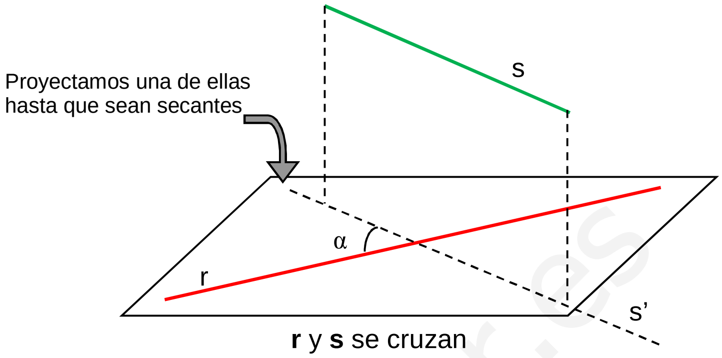
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

1. PROBLEMAS DE ÁNGULOS[1]

1.1 ÁNGULO DE DOS RECTAS:

Si las dos rectas son paralelas o coincidentes (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, sus vectores directores serán iguales o proporcionales) obviamente el ángulo que forman será cero. Por tanto, nos interesan dos casos:





Nótese que en las dos situaciones el ángulo α que vamos a considerar es el menor posible que forman las dos rectas, y no su suplementario (180º–α). En ambos casos, el ángulo que forman las dos rectas se obtiene análogamente, ya que coincidirá con el ángulo que forman sus vectores directores:

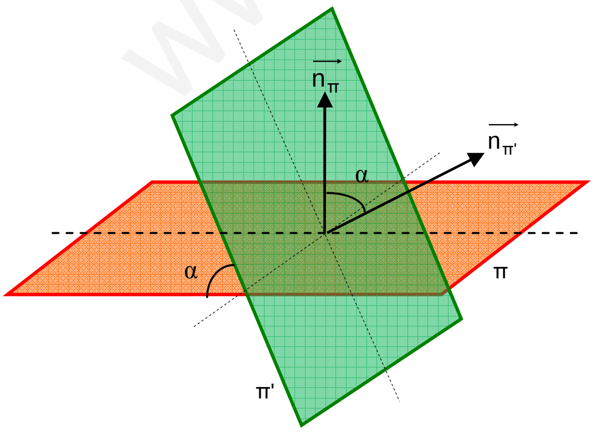
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{u_s}\right\|}}$$

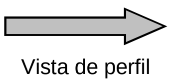
El valor absoluto del numerador es necesario para que el producto escalar al que afecta sea siempre positivo y por tanto el ángulo obtenido sea agudo, ya que pudiera ocurrir que los dos vectores formaran un ángulo obtuso, en cuyo caso su producto escalar sería negativo.

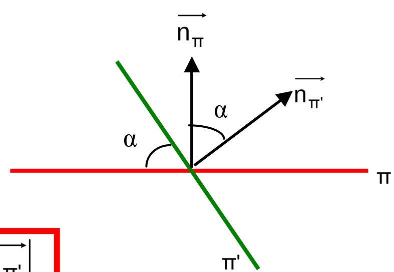
Ejercicios final tema: 1 y 2
Ejercicios PAEG: 4A sept 2011 (+ posición relativa)
Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 187: 1; págs. 204 y ss.: 1, 2 y **61**

1.2 ÁNGULO DE DOS PLANOS:

Si los dos planos son paralelos o coincidentes (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, sus vectores normales $\overrightarrow{n_\pi}$ serán iguales o proporcionales), evidentemente el ángulo que forman será cero. Por tanto, lo realmente interesante es considerar que los dos planos se cortan, en cuyo caso el ángulo que forman los dos planos coincidirá con el que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n_\pi}$, como puede verse en la figura siguiente. También aquí entenderemos por ángulo entre ambos el menor de ellos, i.e. el agudo[2], y por lo tanto en la correspondiente fórmula hay que tener en cuenta el producto escalar en valor absoluto:







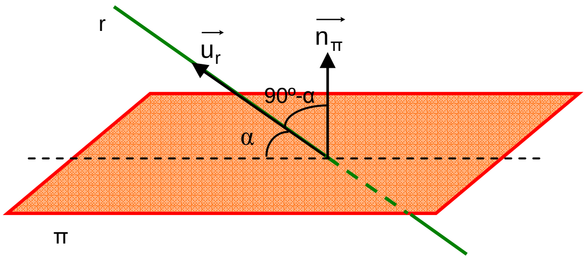
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\|}}$$

[1] Ver págs. 186 y 187 del libro de ed. Anaya.
[2] A este ángulo lo llamamos "diedro".

Ejercicios final tema: 3 y 4
Ejercicios PAEG: 4 B **s**ept 2003, 4 A sept 2007
Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 204: 4 y **6**

1.3 ÁNGULO RECTA-PLANO:

Si la recta, o bien es paralela, o bien está contenida en el plano, (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, el $\overrightarrow{u_r}$ de la recta y el $\overrightarrow{n_\pi}$ del plano serán perpendiculares, i.e. su producto escalar será cero), el ángulo que forman será evidentemente cero. Por tanto, lo realmente interesante es considerar que la recta incide sobre el plano. En tal caso, el ángulo buscado α será el complementario del que forman $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$, como puede apreciarse en la figura siguiente. Por consiguiente, utilizaremos una fórmula similar a las anteriores, pero en la que interviene el seno, ya que hay que recordar que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario[3]:



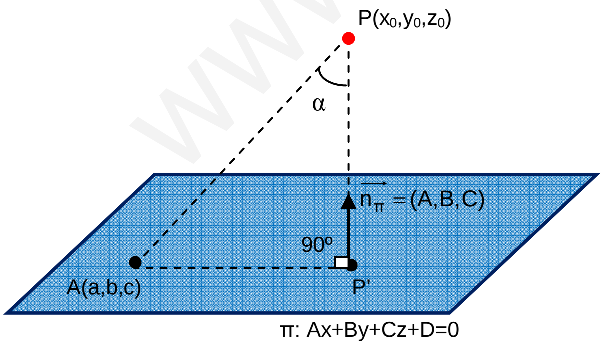
$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}}$$

Ejercicios: 5, 6 y 7
Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 187: 2; págs. 204 y ss: 3 y **43**

2. PROBLEMAS DE DISTANCIAS

2.1 d(P,π):[4]

Supongamos que nos dan un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y queremos obtener su distancia al plano π de ecuación Ax+By+Cz+D=0. Ésta será igual a la distancia entre P y P', proyección ortogonal de P sobre π (ver figura), y vendrá dada por la siguiente fórmula:



$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

[3] sen α=cos(90º-α)

[4] Ver pág. 190 del libro de ed. Anaya.

Demostración[5]:

Supongamos un punto cualquiera A(a,b,c) del plano π; entonces, en el triángulo de la figura, se cumplirá que:

$$\cos\alpha = \frac{d(P,\pi)}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|} \qquad (1)$$

Por otra parte, α es el ángulo que forman $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$; por lo tanto, se cumplirá que:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|} \qquad (2)$$

Despejando d(P,π) de (1) y sustituyendo cos α de (2) se obtiene:

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|} = \frac{\left|(x_0-a, y_0-b, z_0-c)\cdot(A,B,C)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-aA-bB-cC\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3)$$

Ahora bien, como el punto A(a,b,c)∈π, quiere decir que al sustituir las componentes de A en la ecuación del plano verificará la ecuación de éste, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} A(a,b,c)\in\pi \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow aA+bB+cC+D=0 \Rightarrow -aA-bB-cC=D$$

y sustituyendo esto último en (3) obtenemos la fórmula deseada. (C.Q.D)

Observaciones:

1) Con esta fórmula también se puede hallar la **distancia entre dos planos paralelos**: basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, al otro plano (ver pág. 191 del libro de ed. Anaya).

2) Análogamente, la fórmula obtenida también da cuenta de la **distancia recta-plano**[6]: en este caso habría que escoger un punto arbitrario de r y averiguar su distancia al plano (¡no al revés!).

Ejercicios final tema: 8 a 16

Ejercicios PAEG UCL-M: 4B sept 2007, 4A jun 2006, 1B jun 2000, 4B jun 2003, 4A jun 2005, 4B sept 2008 [d(P,π)]

4B jun 2007, 4A sept 2004 [d(π,π')]

4A jun 2013, 4B sept 2011 (con parámetro), 2B sept 97, 4A jun 2004 [d(r,π)]

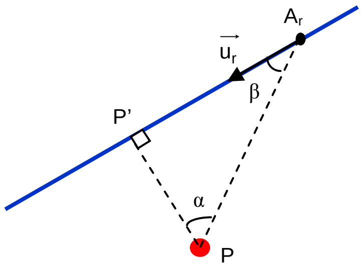
Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 190: 2 y 3; pág. 191: 4 y 5; págs. 204 y ss: 10, **11, 12, 13**, 14, 42, **45, 48, 53 y 64**

[5] Puede verse una demostración alternativa en el libro de ed. Anaya, pág. 190

[6] Obviamente, se sobreentiende que la recta es paralela al plano (ya que, si la recta está sobre el plano, o lo corta, la distancia evidentemente sería cero). Ver pág. 191 del libro de ed. Anaya.

2.2 d(P,r):[7]

Supongamos que nos dan un punto P y queremos obtener su distancia a una recta dada. Ésta será igual a la distancia entre P y P', proyección ortogonal de P sobre r (ver figura), y vendrá dada por la siguiente fórmula:



$$\boxed{d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}}$$

Demostración[8]:

En el triángulo de la figura se cumple:

$$\cos\alpha=\frac{d(P,r)}{\left\|\overrightarrow{PA_r}\right\|}\qquad(1)$$

Por otra parte, por definición del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}$, tendremos que:

$$\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta=\frac{\left\|\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PA_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}\qquad(2)$$

Despejando d(P,r) de (1) y sustituyendo cos α de (2) se obtiene la fórmula que buscamos. (C.Q.D.)

Observaciones:

1) Nótese que no podemos simplificar el vector $\overrightarrow{PA_r}$, pues entonces su módulo, y por tanto la distancia, se verían modificados (no así $\overrightarrow{u_r}$, pues aparece en numerador y denominador)

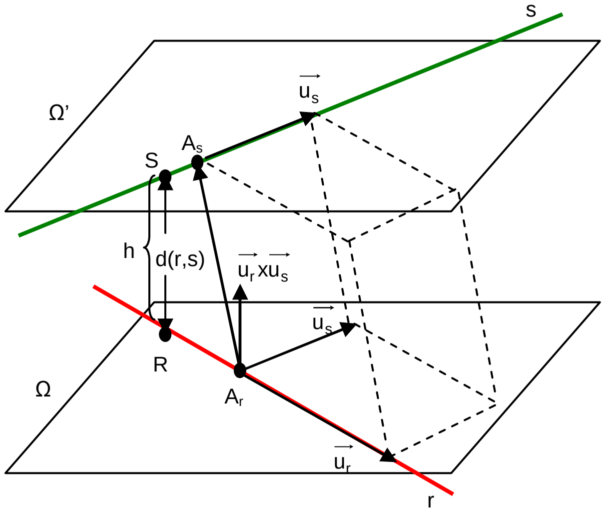
2) Con esta fórmula también se puede hallar la **distancia entre dos rectas paralelas**: basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de las dos rectas y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, a la otra recta (ver pág. 192 del libro de ed. Anaya).

Ejercicios final tema: 17 a 22
Ejercicios PAEG: 4A sept 2010, 4B sept 2012, 4B jun 2013 (r//s), 4A sept 99, 4B sept 2005
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 189: 1; págs. 205 y ss: 15 a 18, **49 y 60**

2.3 Distancia entre dos rectas que se cruzan:[9]

La distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es la mínima distancia entre ellas, i.e. la distancia entre los dos puntos R y S de máxima aproximación de ambas rectas (ver figura). Viene dada por la siguiente fórmula:

[7] Ver pág. 188 del libro de ed. Anaya.
[8] Puede verse una justificación similar de esta fórmula en el libro de ed. Anaya, pág. 188
[9] Ver págs. 192 y 193 del libro de ed. Anaya.



$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s\right]\right|}{\left\|\vec{u}_r x\vec{u}_s\right\|}}$$

Demostración[10]**:**

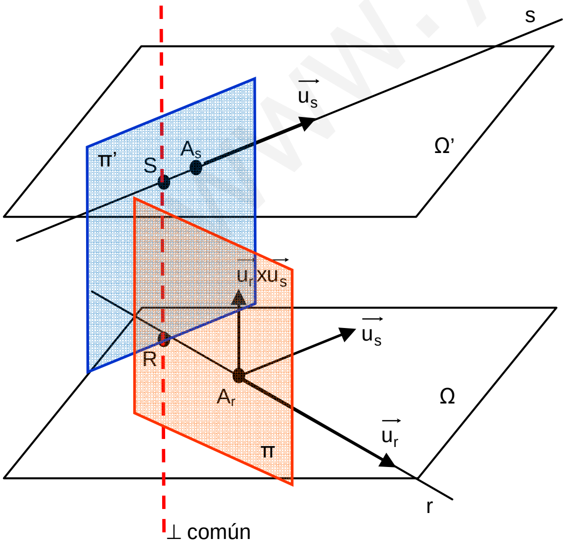
Cuando dos rectas se cruzan, siempre es posible encontrar sendos planos, Ω y Ω', que las contengan y que sean paralelos (ver figura). La distancia buscada será entonces la misma que la distancia entre dichos planos. Por otra parte, recordemos que el volumen de un paralelepípedo como el de la figura, de aristas definidas por los vectores $\overrightarrow{A_rA_s}$, $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ venía dado por el módulo del producto mixto de éstos:

$$\text{Vol}=\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s\right]\right| \qquad (1)$$

Ahora bien, el volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base por la altura; ésta última obviamente coincide con la distancia que buscamos, mientras que el área de la base era el módulo del producto vectorial de los dos vectores que la forman, i.e. $\left\|\vec{u}_r x\, \vec{u}_s\right\|$. Por lo tanto:

$$\text{Vol}=\left\|\vec{u}_r x\vec{u}_s\right\|\cdot \underbrace{h}_{=d(r,s)} \qquad (2)$$

Por último, despejando h, es decir, d(r,s), de (2) y sustituyendo el valor del volumen de (1) se obtiene la fórmula deseada. (C.Q.D.)



Observaciones:

1) $\overrightarrow{A_rA_s}$ no se debe simplificar.

2) Podemos aplicar la fórmula anterior sin conocer a priori su posición relativa: en caso de que ambas se corten el numerador se anularía…

3) Existe un método alternativo para hallar esta distancia, que consiste en hallar la ecuación de uno de los dos planos, Ω o Ω', y hallar la distancia de un punto cualquiera de la otra recta a dicho plano (ver ejemplo resuelto de esta forma en pág. 192 del libro de ed. Anaya).

4) A veces también se pide la **perpendicular común de dos rectas que se cruzan** i.e. la recta que corta a ambas perpendicularmente, y que, lógicamente (ver figura), coincide con la recta que une los dos puntos R y S más próximos de ambas rectas. Su obtención es muy sencilla en forma implícita, como intersección de dos planos π y π', definidos así:

[10] Puede verse la misma demostración en la pág. 192 del libro de ed. Anaya.

$$\boxed{\begin{aligned}\pi &: \left\{A_r, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}\right\} \\ \pi' &: \left\{A_s, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}\right\}\end{aligned}}$$

← Plano ⊥ a **Ω** y que contiene a **r**

← Plano ⊥ a **Ω'** y que contiene a **s**

5) Existe, además, un tercer método para hallar tanto la distancia entre las dos rectas que se cruzan como la perpendicular común, consistente en calcular previamente los dos puntos R y S de máxima aproximación de ambas rectas (ver figura) mediante producto escalar (ver ejemplo resuelto de esta forma en pág. 193 del libro de ed. Anaya).

Ejercicios final tema: 23 a 28

Ejercicios PAEG: 2B jun 2003 (+ ptos. máx. aprox.), 2B jun 2001↔2A sept 99 (+ ⊥ común), 2B jun 97, 4B sept 2004 (+ ángulo r,s)

Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 193: 6 y 7; págs. 205 y ss: 19 a 22, 34, **35**, **50** y 58

3. WEB RECOMENDADOS RELACIONADOS CON EL TEMA:

- En la red hay extensas colecciones de cursos y problemas de Geometría, resueltos estos últimos de forma muy clara y fácil de entender:
  http://www.ifent.org/matematicas/rectasypla/ryp013.htm
  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2bach/naturaleza/u-6.pdf

- Pero la página más interesante es la siguiente, del programa Descartes, que nos permite, entre otras cosas, representar en el espacio planos, y variarlos en función de sus parámetros:
  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/index.htm

4. CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS DE DISTANCIAS:

	PUNTO Q(x_1,y_1,z_1)	**RECTA r:{ A_r, $\overrightarrow{u_r}$ }**	**PLANO π: Ax+By+Cz+D=0**
PUNTO P(x_0,y_0,z_0)	$d(P,Q)=\left\lVert\overrightarrow{PQ}\right\rVert=$ $=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$	$d(P,r)=\dfrac{\left\lVert\overrightarrow{PA_r}\ x\ \overrightarrow{u_r}\right\rVert}{\left\lVert\overrightarrow{u_r}\right\rVert}$ (1)	$d(P,\pi)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2)
RECTA s:{ A_s, $\overrightarrow{u_s}$ }		**r // s:** Coger un punto cualquiera de una de ellas y hallar su distancia a la otra, mediante (1) **r y s se cruzan:** $d(r,s)=\dfrac{\left\lvert\left[\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right\rvert}{\left\lVert\overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}\right\rVert}$ $\perp$ común: $\begin{cases}\pi: \left\{A_r,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}\right\} \\ \pi': \left\{A_s,\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}\right\}\end{cases}$	Coger un punto cualquiera de la recta y hallar su distancia al plano, mediante (2)
PLANO			Coger un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia al otro plano, mediante (2)

5. CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS DE ÁNGULOS:

	RECTA $\overrightarrow{u_s}$	**PLANO** $\overrightarrow{n_\pi}$
RECTA $\overrightarrow{u_r}$	$\cos\alpha = \dfrac{\left\|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{u_s}\right\|}$	$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\left\|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}$
PLANO $\overrightarrow{n_{\pi'}}$		$\cos\alpha = \dfrac{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\|}$

32 EJERCICIOS de ÁNGULOS y DISTANCIAS 2º BACH.

Problemas de ángulos:

1. Hallar el ángulo que forman las rectas r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=z-3$ y s: $x=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+5}{-1}$ *(Soluc: 60^0)*

2. Determinar **m** para que las rectas r: $x-1=\frac{y+1}{2}=z$ y s: $\frac{x+2}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{m}$ sean perpendiculares.
(Soluc: m=-1)

3. Hallar el ángulo que forman los planos x+2y-z=3 y 2x-y+3z=0 *(Soluc: 71º)*

4. Dados los planos 3x-2y+5z-2=0 y kx+7y+z=0, hallar el valor de **k** para que sean perpendiculares.
(Soluc: k=3)

5. Hallar el ángulo formado por el plano π: x+2y-z-3=0 y la recta r: $\frac{x-1}{2}=y-2=z+1$ *(Soluc: 30º)*

6. *(**S**)* Hallar el ángulo formado por el plano π: 2x+3z=0 y la recta r: $\left.\begin{array}{l} x-2y+3z=0 \\ 2x+9y+8=0 \end{array}\right\}$ *(Soluc: 8º)*

7. *(**S**)* Hallar el ángulo formado por la recta r: $\left.\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ y el plano π: 2x+3y-2z+5=0 *(Soluc: 0º)*

d(P,π):

8. Hallar la distancia del punto A(1,2,5) al plano π: 2x+2y-z-5=0 *(Soluc: 4/3)*

9. Hallar la distancia del plano π: 2x+y-z-3=0 al plano π': 4x+2y-2z-7=0 *(Soluc: $\sqrt{6}/12$)*

10. *(**S**)* Demostrar que el punto A(-1,1,0) no es coplanario con los puntos B(0,0,0), C(0,1,0) y D(1,2,1) y hallar la mínima distancia del punto A al plano determinado por B, C y D. *(Soluc: $\sqrt{2}/2$)*

11. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ y s: $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s. *(Soluc: 9x-y+15z-8=0)*

b) Determinar la distancia de s al plano π. *(Soluc: $25/\sqrt{307}$)*

12. *(**S**)* Calcular el valor de **c** para que la recta r: $\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{array}\right\}$ sea paralela al plano π: 2x-y+cz-2=0

Para el valor de **c** obtenido, calcular la distancia entre r y π. *(Soluc: c=-2; 7/3)*

13. *(**S**)* Dado el plano π: 2x-2y+z-3=0, hallar un punto P de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=-2-3t \\ z=-1+t \end{array}\right\}$ de manera que la distancia de P al plano π sea 1.
(Soluc: hay dos soluciones: P(8/3,-1,-4/3) y P'(2,1,-2))

14. *(**S**)* Calcular las coordenadas de un punto de la recta r: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos π: 3x+4z-1=0 y π': 4x-3z-1=0 *(Soluc: hay dos soluciones: (0,-4,0) y (1/4,-29/8,1/4))*

15. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano paralelo al de ecuación 2x-2y+z-8=0 y que diste seis unidades del mismo. *(Soluc: hay dos soluciones: 2x-2y+z+10=0 y 2x-2y+z-26=0)*

16. *(**S**)* Encontrar la ecuación del plano paralelo al de ecuación x+y+z=1, determinado por la condición de que el punto A(3,2,1) equidiste de ambos. *(Soluc: x+y+z=11)*

d(P,r):

17. Hallar la distancia punto-recta en los siguientes casos:

a) *(**S**)* P(3,4,5)

r: $x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+5}{-1}$

(Soluc: $\sqrt{146}$)

b) *(**S**)* P(1,3,-1)

r: $\left.\begin{matrix} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{matrix}\right\}$

(Soluc: $\sqrt{31/3}$)

18. *(**S**)* Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $\left.\begin{matrix} x+y-2z+3=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{matrix}\right\}$ *(Soluc: $\sqrt{6}/3$)*

19. *(**S**)* Se consideran la recta r: $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=4z \end{matrix}\right\}$ y el punto P(3,4,1). Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P. Calcular la distancia de P a r. *(Soluc: y-4z=0; 3)*

20. *(**S**)* Se considera la recta r: $\left.\begin{matrix} x-2=0 \\ y+3=0 \end{matrix}\right\}$ y el punto P(0,1,3). Se pide:

a) Hallar la distancia de P a r. *(Soluc: $2\sqrt{5}$)*

b) Determinar el plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r. *(Soluc: 2x+y-1=0)*

21. *(**S**)* Dados en el espacio los puntos A(1,1,2), B(2,1,1), C(1,2,1), D(0,1,1), calcular:

a) El área del triángulo ABC *(Soluc: $\sqrt{3}/2$ u^2)*

b) La distancia del punto A a la recta CD *(Soluc: $\sqrt{6}/2$ u)*

22. *(**S**)* Dado el triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,3,5) y C(4,0,2), hallar su área y las longitudes de sus tres alturas. *(Soluc: área=$\sqrt{230}/2$ u^2; h_A=$\sqrt{115/17}$ u, h_B=$\sqrt{230/11}$ u, h_C=$\sqrt{230/21}$ u)*

Distancia entre rectas que se cruzan. Perpendicular común:

23. Hallar la distancia entre las rectas r: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-2}$ y s: $\frac{x-3}{-2}=y-2=\frac{z-1}{2}$ *(Soluc: 3)*

24. *(**S**)* Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas r: x=y=z y s: x=y=3z-1

(Soluc: $\left.\begin{matrix} x+y-2z=0 \\ x+y-6z+2=0 \end{matrix}\right\}$)

25. *(**S**)* Se consideran las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} x-2z=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$ Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la mínima distancia entre ambas *(Soluc: $11\sqrt{5}/5$)*

26. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{4}=z-2y$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ hallar las ecuaciones de la recta que las corta perpendicularmente

(Soluc: $\left.\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 3x-y-2z-4=0 \end{array}\right\}$)

27. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$ y s: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio. *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la distancia entre ellas. *(Soluc: $51/\sqrt{237}$)*

28. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=y-4=z$ y s: $\left.\begin{array}{l} x=-2+3t \\ y=3 \\ z=1+t \end{array}\right\}$

a) Comprobar que las dos rectas se cruzan

b) Determinar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s de manera que el vector que une A y B sea perpendicular a las rectas r y s. *(Soluc: A(42/11,43/11,-1/11) y B(32/11,3,29/11))*

Distancia entre dos puntos:

29. *(**S**)* Encontrar los puntos situados a distancia cinco del origen y pertenecientes a la recta que pasa por A(1,2,5) y B(6,5,6). *(Soluc: (32/7,29/7,40/7) y (0,7/5,24/5))*

30. *(**S**)* La distancia del punto P(1,2,3) a otro A del eje de abscisas es 7. Hallar las coordenadas del punto A *(Soluc: hay dos soluciones: A(7,0,0) y A'(-5,0,0))*

31. *(**S**)* Hallar el punto del plano x+y+z=1 que equidista de los puntos A(1,-1,2), B(3,1,2), C(1,1,0) *(Soluc: (4,-2,-1))*

32. *(**S**)* Encontrar en la recta que pasa por los puntos A(-1,0,1) y B(1,2,3) un punto tal que su distancia al punto C(2,-1,1) sea de tres unidades. *(Soluc: hay dos soluciones: (0,1,2) y (-2/3,1/3,4/3))*