I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	**EXAMEN FINAL MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota de una o varias evaluaciones hay que hacer todas las preguntas de cada evaluación en cuestión.
- Copia en el primer folio el siguiente cuadro y sombrea las casillas a las que NO te presentas. Por ejemplo, si un alumno/a tiene que recuperar las dos últimas evaluaciones:

	1ª EVAL.	2ª EVAL.	3ª EVAL.
RECUPERAR:			
SUBIR NOTA:			

(en los espacios en blanco el profesor pondrá la calificación)

1ª EVALUACIÓN:

1. Calcular: **a)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen}x}{(\pi-2x)\cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Dada $f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se pide: **a)** Hallar **a** para que sea continua.
b) Para el valor o valores obtenidos anteriormente, estudiar su derivabilidad. (Los alumnos/as que quieran subir nota deberán, además, representarla)

3. Dada $f(x)=\dfrac{x^2+11}{x+5}$ hallar: **a)** Dom(f) y posibles cortes con los ejes.
b) Posibles máximos y mínimos. Intervalos de monotonía.
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
d) Representación gráfica.
e) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x=-1

4. Aplicar, si es posible, el teorema del valor medio de Lagrange a la función

$$f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$$

en el intervalo [-2,0]

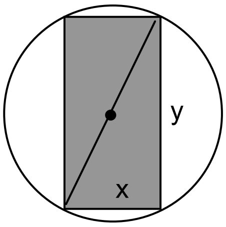
2ª EVALUACIÓN:

1. Calcular: **a)** $\displaystyle\int \frac{3x-15}{x^3-3x-2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int sen^2x\cos^3x\,dx$

2. Calcular: **a)** $\displaystyle\int (x^2+1)\,e^x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13}\,dx$

3. Dada $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ se pide: **a)** Dom(f) y corte con los ejes.
b) M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).
c) P.I. e intervalos de curvatura (sin decimales)
d) Asíntotas.
e) Representación gráfica.
f) Área del recinto limitado por la gráfica anterior, el eje x y la recta vertical que pasa por el máximo (sin usar decimales).

4.



Calcular la base **x** y la altura **y** del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 2 cm. Interpretar el resultado.

3ª EVALUACIÓN:

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial **AX-BCX=A**

2. Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x-ay+z=-1\\ -x+y-z=a\\ x-y-z=0\end{array}\right\}$ se pide: **a)** Discutirlo en función del parámetro **a**
b) Resolverlo para el caso en que no tenga solución única.

3. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

determinar, si es posible, un valor de $\lambda\in IR$ para el que la matriz $(A-\lambda I)^2$ sea la matriz nula.

4. Dibujar las gráficas de $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=|x|$, y hallar el área del recinto que definen.

1ª EVAL

① a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen}x}{(\pi-2x)\cos x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{-\cos x}{-2\cos x-(\pi-2x)\operatorname{sen}x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x-[-2\operatorname{sen}x+(\pi-2x)\cos x]} = \dfrac{1}{2-(-2)} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ 0.25/ 0.25/ 0,75

b) $\lim\limits_{x\to1} x^{1/1-x} = 1^{\infty} = \text{INDTDO} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}\operatorname{Ln}x}$ 0.25/ (*)

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\operatorname{Ln}x}{1-x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1/x}{-1} = -1 \xrightarrow[\text{en }(*)]{\text{sustituimos}}$ soluc: $e^{-1} = \boxed{1/e}$ 0.25/ 0.75/

② $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x\le1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1} (3-ax^2) = 3-a \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2}{ax} = \dfrac{2}{a} \end{array}\right\}$ 0.25/ $\xRightarrow[\text{en } x=1]{\text{continua}} 3-a = \dfrac{2}{a};\ 3a-a^2=2;\ a^2-3a+2=0 \to \boxed{a=1},\ \boxed{a=2}$ 0.25/

soluc: $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall\mathbb{R} \iff a=1,\ a=2}$ 0.75/

b) Estudiamos la derivabilidad para los dos valores anteriores de a, puesto que, para que sea derivable ha de ser previamente continua:

$a=1 \to f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x\le1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x>1 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -2x\Big]_{x=1} = -2 \\ f'(1^+) = -2/x^2\Big]_{x=1} = -2 \end{array}\right\}$ 0.25/ $\Rightarrow \boxed{\text{para } a=1\ f(x) \text{ es derivable } \forall\mathbb{R}}$ 0.375/

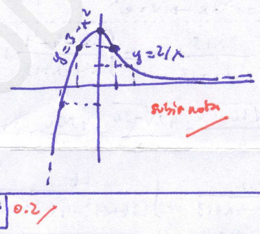
$a=2 \to F(x) = \begin{cases} 3-2x^2 & \text{si } x\le1 \\ 1/x & \text{si } x>1 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -4x\Big]_{x=1} = -4 \\ f'(1^+) = -1/x^2\Big]_{x=1} = -1 \end{array}\right\}$ 0.25/ $\Rightarrow \nexists\, f'(1)$ si $a=2$ 0.375/

- -

x	−∞ . . . . −5	−4	−3	−2	−1	0	1
$y=3-x^2$	−∞ . . . . . −22	−13	−6	−1	2	3	2

⇧ V(0,3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8 . . . . ∞
$y=2/x$	2	1	$0,\hat{6}$	0,5	0,4	$0,\hat{3}$	0,29	0,25 . . . 0^+



subir nota /

③ $f(x) = \dfrac{x^2+11}{x+5}$ a) $\boxed{\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}-\{-5\}}$ 0.2/

corte eje x: $y=0 \to \dfrac{x^2+11}{x+5}=0;\ x^2+11=0;\ \nexists$ soluc. ⇓ no corta al eje x

corte eje y: $x=0 \to y=11/5 \to \boxed{(0,11/5)}$ 0.2/

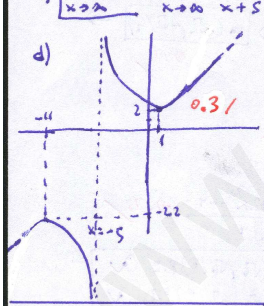
b) $f'(x) = \dfrac{2x(x+5)-(x^2+11)}{(x+5)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}} = 0 \Rightarrow x^2+10x-11=0 \begin{array}{l}\nearrow x=1 \\ \searrow x=-11\end{array}\Big\}$ posibles Max Min 0.4/

$f''(x) = \dfrac{(2x+10)(x+5)^{\cancel{2}}-(x^2+10x-11)\cdot2\cancel{(x+5)}}{(x+5)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{\cancel{2x^2}+\cancel{20x}+50-\cancel{2x^2}-\cancel{20x}+22}{(x+5)^3} = \dfrac{72}{(x+5)^3}$ 0.3/

$f''(1) = \dfrac{72}{+}>0 \Rightarrow \boxed{m(1,2)}$ 0.2/ ; $f''(-11) = \dfrac{72}{-}<0 \Rightarrow \boxed{M(-11,-22)}$ 0.2/ $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x\in(-\infty,-11)\cup(1,\infty) \\ f(x) \searrow \forall x\in(-11,1)-\{-5\} \end{array}}$ 0.2/

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+11}{x+5} \sim \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty}$ 0.1/ ; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+11}{x+5} \sim \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}$ 0.1/

d)



0.3/

e) $\left.\begin{array}{l} x=-1 \to f(-1) = \dfrac{12}{4} = 3 \to P(-1,3) \\ f'(-1) = \dfrac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}\Big]_{x=-1} = \dfrac{-20}{16} = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \boxed{y-3 = -\dfrac{5}{4}(x+1)}$ 0.3/

④ $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2\le x\le-1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\le0 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-3}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ continua en $x=-1 \Rightarrow f(x)$ continua en $[-2,0]$ 0.25/

$f'(x) = \begin{cases} -1/x^2 & \text{si } -2\le x\le-1 \\ x & \text{si } -1<x\le0 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -\dfrac{1}{x^2}\Big]_{x=-1} = -1 \\ f'(-1^+) = x\Big]_{x=-1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, f'(-1) \Rightarrow f(x)$ derivable en $(-2,0)$ 0.5/

se verifican las hipótesis del th. de Lagrange $\Rightarrow \exists\, c\in(-2,0) \,/\, \dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = f'(c)$; $\dfrac{-\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -1/2$ 0.25/

1ª rama: $-\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2};\ x^2=2 \begin{array}{l}\nearrow \boxed{x=-\sqrt{2}} \\ \searrow x=\sqrt{2} \text{ descartado pq } \notin \text{ 1ª rama}\end{array}$ 1/

2ª rama: $\boxed{x=-1/2}$ 0.5/

2ª eval:

① a) $I = \int \frac{3x-15}{x^3-3x-2}\,dx$; $\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{} \end{array}$ $\qquad \frac{3x-15}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

raíces -1 doble, 2

$\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad 3x-15 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)$

$x=2 \rightarrow -9 = 9A$; $\boxed{A=-1}$; $x=-1 \rightarrow -18 = -3C$; $\boxed{C=6}$; $x=0 \rightarrow -15 = A-2B-2C$; $-15 = -1-2B-12$
$2B = 2$; $\boxed{B=1}$ 0,25

$I = \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{6}{(x+1)^2}\,dx = \underbrace{-\ln|x-2|}_{0,25} + \underbrace{\ln|x+1|}_{0,25} + 6\int (x+1)^{-2}\,dx = \ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + \underbrace{6\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1}}_{0,5} =$

$= \boxed{\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - \frac{6}{x+1} + C_1}$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x\,dx = \int t^2 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^2 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{\cancel{3}\,2} dt = \int t^2(1-t^2)\,dt = \int (t^2 - t^4)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} =$

integrando impar en $\cos x \Rightarrow$ cambio de var. $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$
$\Downarrow \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

$= \boxed{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C_1}$

② a) $\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2\underbrace{\int x e^x\,dx}_{0.25} = (x^2+1)e^x - 2\left[x e^x - \underbrace{\int e^x\,dx}_{0.25}\right] = (x^2+1)e^x - 2(xe^x - e^x) =$

$u = x^2+1 \rightarrow du = 2x\,dx$ $\qquad u = x \longrightarrow du = dx$
$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$ $\qquad dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x =$
$= \boxed{(x^2-2x+3)e^x}$ 0.75

b) $I = \int \frac{2x+5}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{2x-4+9}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx + 9\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \underbrace{\ln(x^2-4x+13)}_{0,25} + 9\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ (*)

$\frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \xrightarrow[\text{var.}]{\text{cambio de}} x-2 = 3t \Rightarrow x = 3t+2$
$\Downarrow$
$dx = 3\,dt$

$\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{3\,dt}{(3t+2)^2 - 4(3t+2) + 13} = \int \frac{3\,dt}{9t^2 + \cancel{12t} + 4 - \cancel{12t} - 8 + 13} = 3\int \frac{dt}{9t^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}$ 0.75

$\xrightarrow[\text{en (*)}]{\text{sustituimos}} I = \boxed{\ln(x^2-4x+13) + 3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C_1}$ 0.25

③ $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ $\quad$ a) $\boxed{\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}}$ pq. $\underbrace{x^2+2 \neq 0}_{0.1}\ \forall \mathbb{R}$; corte eje x: $y=0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+2} = 0$; $x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$ 0.1

b) $f'(x) = \frac{x^2+2-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$ posibles Max. 0.3

$f''(x) = \frac{-2x\,(x^2+2)^{\cancel{2}} - (-x^2+2)\cdot 2(\cancel{x^2+2})\cdot 2x}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3-4x-(-4x^3+8x)}{(x^2+2)^3} = \frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3}$ 0.2

$f''(\sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2})^3 - 12\sqrt{2}}{+} = \frac{4\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{+} = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{M(\sqrt{2}, \sqrt{2}/4)}}_{0.1}$; $f''(-\sqrt{2}) = \frac{-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{+} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{m(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/4)}}_{0.1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \searrow \forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \\ f(x) \nearrow \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{array}}$ 0.1

c) $f''(x) = \frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 12x = 0$; $2x(x^2-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$ posibles P.I. 0.2

$f'''(x) = \frac{(6x^2-12)(x^2+2)^{\cancel{3}} - (2x^3-12x)\cdot 3(\cancel{x^2+2})^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{6x^4-24-(12x^4-72x^2)}{(x^2+2)^4} = \frac{-6x^4+72x^2-24}{(x^2+2)^4}$ 0.2

$f'''(0) = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{(0,0)\ \text{P.I.}\ \int}}_{0.1}$ (convexo-cóncavo) ; $f'''(\pm\sqrt{6}) = \frac{-216+432-24}{+} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\begin{array}{l} (\sqrt{6}, \sqrt{6}/8)\ \text{P.I.} \\ (-\sqrt{6}, -\sqrt{6}/8)\ \text{P.I.} \end{array}}}_{0.2}$

d) ¿A.H.? $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+2} \sim \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0^+ \Rightarrow \underbrace{\boxed{y=0\ \text{A.H.}}}_{0.1} \Rightarrow \nexists$ A.O.

¿A.V.? $\nexists$ p.q. $x^2+2 \neq 0\ \forall \mathbb{R}$ 0.1

3ª EVALUACIÓN:

① $AX - BCX = A$; $(A-BC)X = A$; llamamos $A - BC = D \Rightarrow DX = A$; $D^{-1}DX = D^{-1}A$; $\boxed{X = D^{-1}\cdot A}$ (*) 0.25

$$D = A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \ |D| = -1 \Rightarrow \exists D^{-1}$$ 0.25

$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-7}$ $D_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-5}$ $D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{6}$

$D_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{1}$ $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{1}$ 0.5 $D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-1}$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{3}$ $D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2}$ $D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{-3}$

$Adj(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; ${}^t Adj(D) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot {}^t Adj(D) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 0.5

Sustituimos en (*): $X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}}$ 1

---

② $\left.\begin{aligned} x - ay + z &= -1 \\ -x + y - z &= a \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ a) ¿rg M? $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{-1} + a + \cancel{1} - 1 - 1 + a = 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$ 0.25

$a = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ ← podemos suprimir f_1 a efectos del rango, pues es proporcional a f_2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,M = 2 = rg\,M^*$

Discusión:

I) $a \neq 1 \Rightarrow rg\,M = rg\,M^* = 3 = n^{\circ}$ incógnitas $\Rightarrow$ sist. comp. DTDO (soluc. única) 0.5

II) $a = 1 \Rightarrow rg\,M = rg\,M^* = 2 < n^{\circ}$ incógnitas $\Rightarrow$ sist. comp. INDTDO (uniparamétrico) 0.5

b) Suprimimos f_1 y pasamos la x como parámetro:

$\left.\begin{aligned} y - z &= 1 + \lambda \\ -y - z &= -\lambda \end{aligned}\right\}$ $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-\lambda-\lambda}{-2} = \frac{-1-2\lambda}{-2} = \frac{1}{2} + \lambda}$ 0.5

$\boxed{z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-\cancel{\lambda}+1+\cancel{\lambda}}{-2} = -\frac{1}{2}}$ 0.5 $\boxed{x = \lambda}$ 0.25

[Nota: otra forma puede ser imponiendo que $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$]

③ $A - \lambda\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; $(A - \lambda\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 2\lambda-2 & 4\lambda-4 \\ 2\lambda-2 & \lambda^2-1 & 4\lambda-4 \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & -4+(3-\lambda)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0.5

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$ $2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ $2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$ $2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$ 0.5

$4\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ $4\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ $-4 + (3-\lambda)^2 = -4 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = 1, \lambda = 5$

la única solución que verifica todas las condiciones es $\boxed{\lambda = 1}$ 1.5

---

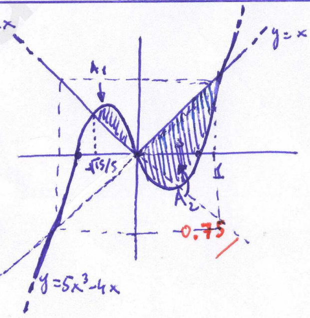
④ $f(x) = 5x^3 - 4x$

$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty \ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots \ldots \infty$
$f(x) = 5x^3 - 4x$	$-\infty \ldots$	-32	-1	0	1	32	$\ldots \ldots \infty$

corte eje x: $y = 0 \Rightarrow 5x^3 - 4x = 0$;

$x(5x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0$; $x^2 = 4/5 \rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} \simeq 0{,}89$; $x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \simeq -0{,}89$



$\left.\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 4x \\ g(x) &= -x \end{aligned}\right\}$ $5x^3 - 4x = -x$

$5x^3 - 3x = 0$

$x(5x^2 - 3) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$; $x^2 = 3/5 \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ descartado ; $x = -\sqrt{\frac{3}{5}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{5}}$

$\left.\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 4x \\ g(x) &= x \end{aligned}\right\}$ $5x^3 - 4x = x$; $5x^3 - 5x = 0$

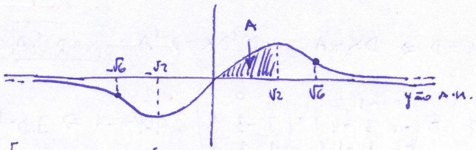
$5x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$; $x^2 = 1 \rightarrow x = -1$ descartado ; $\boxed{x = 1}$

$$A_2 = \int_0^1 [x - (5x^3 - 4x)]\,dx = \int_0^1 (-5x^3 + 5x)\,dx = \left[-\frac{5x^4}{4} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{4}u^2}$$ 0.75

$$A_1 = \int_{-\sqrt{15}/5}^{0} [(5x^3 - 4x) - (-x)]\,dx = \int_{-\sqrt{15}/5}^{0} (5x^3 - 3x)\,dx = \left[5\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{15}/5}^{0} = -\left[\frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2\right] = -\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{5^2 \cdot 3^2}{5^4} - \frac{3}{2}\,\frac{5 \cdot 3}{5^2}\right) = -\frac{3^2}{4 \cdot 5} + \frac{9}{10} =$$ 0.125

0.875 $= -\frac{9}{20} + \frac{9}{10} = \boxed{\frac{9}{20}u^2} \Rightarrow A_T = A_2 + A_1 = \frac{9}{20} + \frac{5}{4} = \frac{34}{20} = \boxed{\frac{17}{10}u^2}$

e)

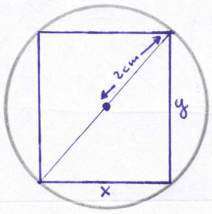


0.3

f) $A = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) = \ln\sqrt{x^2+2}\Big]_0^{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{4} - \ln\sqrt{2} = \ln\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \boxed{\ln\sqrt{2}\ u^2}$ 0.3

---

④ 0.5



$$\left.\begin{array}{l} \text{RESTRICCIÓN: } x^2+y^2=16 \\ \text{F. A MAXIMIZAR: } A = x\cdot y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = \sqrt{16-x^2} \ (*) \\ A(x) = x\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16x^2-x^4} \end{array}$$

$$A'(x) = \frac{32x-4x^3}{2\sqrt{16x^2-x^4}} = 0 \Rightarrow 32x-4x^3=0;\ 4x(8-x^2)=0$$

$x=0$ descartado

$x^2=8$ → $x=-2\sqrt{2}$ descartado; $\boxed{x=2\sqrt{2}\text{ cm}}$ 1

⇓ sustituimos en (*)

$\boxed{y=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\text{ cm}}$ 0.5

$$A''(x) = \left(\frac{16-2x^3}{\sqrt{16x^2-x^4}}\right)' = \frac{-6x^2\sqrt{16x^2-x^4} - (16-2x^3)\cdot\frac{32x-4x^3}{\sqrt{16x^2-x^4}}}{16x^2-x^4}$$

$$A''(2\sqrt{2}) = \frac{-48\sqrt{128-64}}{128-64} < 0 \Rightarrow \text{se confirma que es un M}$$ 0.5

Soluc: se trata de un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ cm