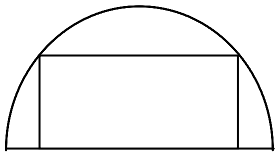
I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 2ª EVALUACIÓN **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C** **CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

1. 

(UCLM, septiembre 2003) En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, como muestra la figura. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima. *(2,5 puntos)*

2. Dada $f(x)=(x+2)e^x$, se pide:
- **a)** Dom(f) y cortes con los ejes.
- **b)** M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).
- **c)** P.I. e intervalos de curvatura (sin usar decimales).
- **d)** Asíntotas.
- **e)** Representación gráfica.
- **f)** Hallar el área del recinto limitado por la curva anterior, ambos ejes y la recta x=1 *(2,5 puntos)*

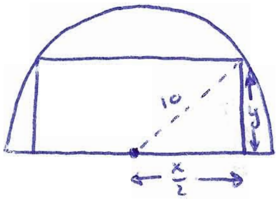
3. **a)** *(UCLM, junio 2007)* $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+1}{x^2+25}\,dx$

(puede ayudar hacer un cambio de variable adecuado) *(2,5 puntos)*

4. **a)** *(UCLM, septiembre 2007)* $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$ **b)** $\int \cos^5 x\,dx$ *(2,5 puntos)*

NOTA: Se ruega cuidar la ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático.

①



Restricción: $\frac{x^2}{4}+y^2=100$ ← 0,5 ; $x^2+4y^2=400$; $x=\sqrt{400-4y^2}$ (*)

F. a maximizar: $A=x\cdot y$; $A(y)=y\cdot\sqrt{400-4y^2}=\sqrt{400y^2-4y^4}$

$A'(y)=\frac{800y-16y^3}{2\sqrt{400y^2-4y^4}}=0 \Rightarrow 800y-16y^3=0;\ 16y(50-y^2)=0 \to y=0$ descartado

$\searrow y^2=50 \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,m}$ ← 1

⇓(*)

$\boxed{x=\sqrt{400-200}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\,m}$ ← 0,5

$A'(y)=\frac{400y-8y^3}{\sqrt{400y^2-4y^4}} \to A''(y)=\frac{(400-24y^2)\sqrt{400y^2-4y^4}-(400y-8y^3)\cdot\frac{800y-16y^3}{2\sqrt{400y^2-4y^4}}}{400y^2-4y^4}$

$A''(5\sqrt{2})=\frac{(400-1200)\cdot\sqrt{20000-10000}}{20000-10000}<0 \Rightarrow$ se confirma que es un M ← 0,5

---

② $f(x)=(x+2)e^x$

a) $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$ pq. es el producto de dos funciones definidas $\forall\mathbb{R}$ ← 0,125

Corte eje x: $y=0 \Rightarrow (x+2)e^x=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \to \boxed{(-2,0)}$ ← 0,125

" " y: $x=0 \Rightarrow y=2\cdot e^0=2 \to \boxed{(0,2)}$ ← 0,125

b) $f'(x)=e^x+(x+2)e^x=\boxed{(x+3)e^x}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$ posible M o m ← 0,125

$f''(x)=e^x+(x+3)e^x=\boxed{(x+4)e^x}$; $f''(-3)=e^{-3}>0 \Rightarrow \boxed{m\left(-3,-\frac{1}{e^3}\right)}$ ← 0,125 $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,-3) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(-3,\infty)\end{array}}$ ← 0,125

c) $f''(x)=(x+4)e^x=0 \Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4$ posible P.I. ← 0,125

$f'''(x)=e^x+(x+4)e^x=\boxed{(x+5)e^x}$; $f'''(-4)=e^{-4}>0 \Rightarrow \boxed{P.I.\left(-4,-\frac{2}{e^4}\right)}$ ← 0,125 $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)\cap \forall x\in(-\infty,-4) \\ f(x)\cup \forall x\in(-4,\infty)\end{array}}$ ← 0,125

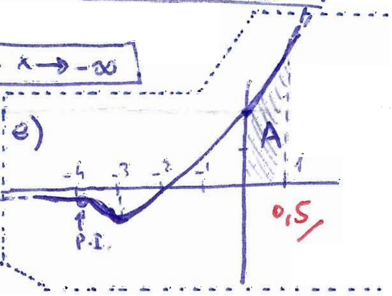
d) ¿A.H.? $\lim_{x\to\infty}(x+2)e^x=\infty\cdot\infty=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{e^{-x}} \overset{L'H}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0^- \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ A.H. cuando } x\to-\infty}$ ← 0,125

¿A.V.? ∄ pq. $Dom(f)=\mathbb{R}$ ← 0,125

¿A.O.? $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^x}{x} \overset{L'H}{\underset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+(x+2)e^x}{1}=\infty \Rightarrow$ ∄ A.O. ← 0,125

e)



0,5

f) $A=\int_0^1(x+2)e^x\,dx=(x+2)e^x-\int_0^1 e^x\,dx=(x+2)e^x-e^x=(x+1)e^x\Big]_0^1=\boxed{(2e-1)\,u^2}$ ← 0,5

$u=x+2 \to du=dx$

$dv=e^x\,dx \to v=e^x$

---

③ a) $\int\frac{2}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{4t}{1+t}dt=4\int\frac{t}{t+1}dt=4\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=4\left[\int\frac{t+1}{t+1}dt-\int\frac{1}{t+1}dt\right]=4\left[t-Ln(t+1)\right]=$ ← 0,25

Cambio de variable $x=t^2$ ← 0,25

⇓

$dx=2t\,dt$

$=4\boxed{\left[\sqrt{x}-Ln(\sqrt{x}+1)\right]+C_1}$ ← 0,75

b) $\int\frac{x+1}{x^2+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+25}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x}{x^2+25}dx+\int\frac{2}{x^2+25}dx\right]=\frac{1}{2}\left[Ln(x^2+25)+2\cdot\int\frac{1}{25\left(\frac{x^2}{25}+1\right)}dx\right]=$ ← 0,25

$=\frac{1}{2}\left[Ln(x^2+25)+\frac{2}{25}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}\right]=\frac{1}{2}\left[Ln(x^2+25)+\frac{2}{25}\cdot 5\int\frac{1/5}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}dx\right]=\frac{1}{2}\left[Ln(x^2+25)+\frac{2}{5}\,arctg\,\frac{x}{5}\right]=$

$=\boxed{Ln\sqrt{x^2+25}+\frac{1}{5}\,arctg\,\frac{x}{5}+C_1}$ ← 1

④ a) $I=\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$; $\frac{x}{\boxed{(x+1)^3}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$; $x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$

raíz $x=-1$ triple

mcm

$x=-1 \to \boxed{-1=C}$

$x=0 \to 0 = A+B+C$; $x=1 \to 1 = 4A+2B+C$ $\Big\}$ $\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+2B=2 \end{cases}$ $\begin{array}{r} -2A-2B=-2 \\ 4A+2B=2 \\ \hline 2A \quad =0 \end{array} \to \boxed{A=0} \to \boxed{B=1}$ 0,25

$I = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}dx = \int (x+1)^{-2}dx - \int (x+1)^{-3}dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} - \frac{(x+1)^{-2}}{-2} = \boxed{-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C}$ 0,5 0,5

(NOTA: también se puede resolver mediante el cambio $x+1=t$)

---

b) $\int \cos^5 x \cdot dx = \int (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int (\sqrt{1-t^2})^4 dt = \int (1-t^2)^2 \cdot dt = \int (1-2t^2+t^4)dt = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} =$ 0,25 0,25

INTEGRANDO IMPAR EN $\cos x \Rightarrow$ cambio de var $\operatorname{sen} x = t$ $\Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

$\cos x\, dx = dt$ 0,25

$dx = \frac{dt}{\cos x} =$

$= \boxed{\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C}$ 0,5

I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	**RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C** **CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

1. 

(UCLM, junio 2002) Un solar rectangular de 11.250 m^2 se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcular las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima. *(2,5 puntos)*

2. Dada $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, se pide:
- **a)** Dom(f) y cortes con los ejes.
- **b)** M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).
- **c)** P.I. e intervalos de curvatura (sin usar decimales).
- **d)** Asíntotas.
- **e)** Representación gráfica.
- **f)** Hallar el área del recinto limitado por la curva anterior, el eje x y las rectas verticales $x=\sqrt{3}$ y x=2 *(2,5 puntos)*

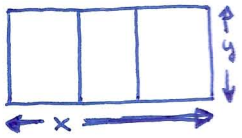
3. **a)** $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ **b)** *(UCLM, junio 2006)* $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$

(NOTA: un cambio de variable puede ser útil) *(2,5 puntos)*

4. **a)** $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int x^3\cos x^2\,dx$ *(2,5 puntos)*

NOTA: Se ruega cuidar la ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático.

1)



RESTRICCIÓN: $x \cdot y = 11250 \Big\} \to y = \dfrac{11250}{x}$ (*) $\Rightarrow L(x) = 2x + \dfrac{45000}{x}$; 0,5

F. A MINIMIZAR: $L = 2x + 4y$

$L'(x) = 2 - \dfrac{45000}{x^2} = 0$; $2 = \dfrac{45000}{x^2}$; $x^2 = 22500$ 0.5

$\boxed{x = 150\ m.}$ 0.5

$L''(x) = -45.000 \cdot \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -45000 \cdot \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{90000}{x^3}$; $L''(150) > 0 \Rightarrow$ se confirma que es un mínimo 0,5

$\Downarrow$ (*)

$\boxed{y = 75\ m}$ 0.5

---

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

a) $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1 \Rightarrow \boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$ 0.1

CORTE EJE X: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0$; $x^3 = 0$; $x = 0 \to (0,0)$ 0.1 (no es necesario, por tanto, hallar el corte con el eje y, pues saldrá de nuevo el mismo punto)

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \boxed{\dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}} = 0$ 0.1 $\Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$; $x^2(x^2-3) = 0$ $\nearrow x = 0$, $\searrow x = \pm\sqrt{3}$ posibles Mom 0.1

$f''(x) = \dfrac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (x^4 - 3x^2) \cdot 2\cancel{(x^2-1)} \cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - 6x^3 + 6x - (\cancel{4x^5} - 12x^3)}{(x^2-1)^3} = \boxed{\dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}}$ 0.2

$f''(0) = 0 \to$ este método no decide

$f''(\sqrt{3}) = \dfrac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{m\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ 0.2

$f''(-\sqrt{3}) = \dfrac{-}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{M\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty) \\ f(x) \searrow \forall x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - \{\pm 1\} \end{array}}$ 0.1

c) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0$; $2x(x^2+3) = 0$ $\nearrow x = 0$ posible P.I. $\searrow x^2 + 3 = 0$ $\nexists$ soluc. 0.1

$f'''(x) = \dfrac{(6x^2+6)(x^2-1)^{\cancel{3}} - (2x^3+6x) \cdot 3\cancel{(x^2-1)^2} \cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{6}\,4}} = \dfrac{6x^4 - 6 - (12x^4 + 36x^2)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2-1)^4}$ 0.1

$f'''(0) = \dfrac{-}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(0,0)}$ 0.1 $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \cap \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1) \\ f(x) \cup \forall x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \end{array}}$ 0.1

d) ¿A.H.? $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} \sim \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \infty \Rightarrow \nexists$ A.H. 0.1

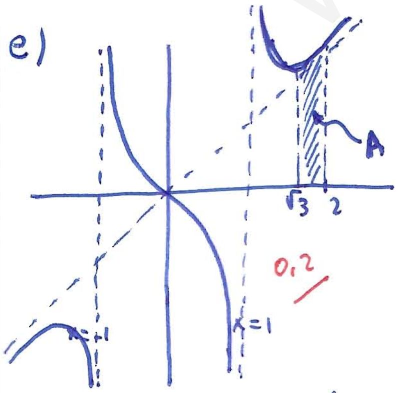
¿A.V.? $\boxed{x = \pm 1}$ pues anulan el denom. pero no el num. 0.1

¿A.O.? $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{(x^2-1)x} \sim \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$

$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = 0$

$\Big\} \boxed{y = x}$ A.O. 0.2

e)



0,2

F) $A = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \dfrac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} x\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \dfrac{x}{x^2-1}\,dx = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{2} \dfrac{2x}{x^2-1}\,dx =$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ -x^3+x & x \\ \hline x & \end{array} \Rightarrow x^3 = x(x^2-1) + x$$

$\dfrac{x^3}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{x^2-1}$

$= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1) = \left.\dfrac{x^2}{2} + \ln\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{3}}^{2} =$

$= (2 + \ln\sqrt{3}) - \left(\dfrac{3}{2} + \ln\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\sqrt{6}}{2}\ u^2}$ 0,6

3 a)

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)^2\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int t^2(t^4-2t^2+1)\,dt = 2\left(\int t^6\,dt - 2\int t^4\,dt + \int t^2\,dt\right) =$$

0.125

CAMBIO DE VAR: $x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx = 2t\cdot dt$ 0.125 ; $t=\sqrt{x+1}$

$$= 2\left(\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) = \boxed{2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^7}}{7} - 2\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5} + \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right) + C}$$

0.25 0.75

---

b)

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx \; ; \quad \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \; ; \quad x+2 = A(x-1)+B$$

raíz 1 doble

$x=1 \rightarrow \boxed{3=B}$ 0.25

$x=0 \rightarrow 2=-A+B \; ; \; 2=-A+3 \; ; \; \boxed{A=1}$

$$I = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \ln(x-1) + 3\int (x-1)^{-2}\,dx = \ln(x-1) + 3\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C}$$

0.5 0.5

---

4 a)

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx + 8\int \frac{dx}{x^2-2x+5}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-2x+5) + 8\int \frac{dx}{x^2-2x+5}\right]$$

0.25 (*)

$$\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{2\pm 4i}{2} = 1\pm 2i$$

CAMBIO DE VAR: $x-1=2t \Rightarrow x=2t+1 \Rightarrow dx = 2\cdot dt$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{2\,dt}{(2t+1)^2-2(2t+1)+5} = 2\int \frac{dt}{4t^2+\cancel{4t}+1-\cancel{4t}-2+5} = 2\int \frac{dt}{4t^2+4} =$$

$$= \frac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\, t = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-1}{2}$$

0.75

Sustituimos en (*):

$$I = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-2x+5) + \frac{8}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-1}{2}\right] = \boxed{\ln\sqrt{x^2-2x+5} + 2\,\text{arctg}\,\frac{x-1}{2} + C}$$

0.25

---

b)

$$\int x^3\cdot\cos x^2\cdot dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{sen}\,x^2 - \frac{1}{2}\int 2x\cdot\text{sen}\,x^2\,dx = \frac{x^2\cdot\text{sen}\,x^2}{2} - \frac{1}{2}(-\cos x^2) = \boxed{\frac{x^2\,\text{sen}\,x^2}{2} + \frac{\cos x^2}{2} + C}$$

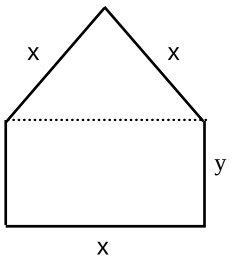
0.5 0.5 0.25

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = x\cdot\cos x^2 \Rightarrow v = \int x\cdot\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos x^2\cdot dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x^2$

I.E.S. "Fernando de Mena"	**EXAMEN 2ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A** **CURSO 2005-2006**	Junta de Comunidades de Castilla -La Mancha

1.



Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

2. Resolver: $\int \frac{2x+5}{x^2 - 4x + 13}\,dx$

3. Resolver: $\int \frac{dx}{e^x + 1}$ (Ayuda: hacer el cambio $e^x=t$)

4. Resolver: $\int x^3 \cos x^2\,dx$

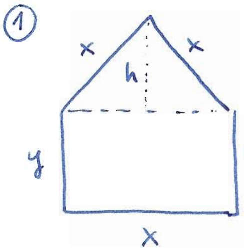
5. Representar las funciones $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=x$, y hallar el área del recinto que delimitan.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:
a) Calcular A^2 y A^3
b) A partir de lo anterior, hallar razonadamente (¡no por cálculo directo!) A^4, A^5 y A^6
c) Razonar cuánto valdría A^{18}

7. *(PAU UCLM junio 2002)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes determinantes: **a)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

①



$x^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2;\quad x^2=h^2+\frac{x^2}{4};\quad x^2-\frac{x^2}{4}=h^2;\quad \frac{3x^2}{4}=h^2 \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

RESTRICCIÓN: $3x+2y=6{,}6$ 0.25

FUNCIÓN A MAXIMIZAR: $S=xy+\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=xy+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ $\Big\} \rightarrow y=\frac{6{,}6-3x}{2}=3{,}3-1{,}5x$

$S(x)=x(3{,}3-1{,}5x)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\boxed{3{,}3x-1{,}5x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} \Rightarrow S'(x)=3{,}3-3x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2x=$

$=3{,}3-3x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0 \Rightarrow 3{,}3=3x-\frac{\sqrt{3}}{2}x;\quad 3{,}3=\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \Rightarrow \boxed{x=\frac{3{,}3}{3-\sqrt{3}/2}\simeq 1{,}55\,m}$ 0.25

$\xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{sustituimos}} \boxed{y\simeq 0{,}98\,m}$ 0.25 ; $S''(x)=\frac{-12+2\sqrt{3}}{4}<0 \Rightarrow$ se confirma que es un máximo 0.25

---

② $\int\frac{2x+5}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{2x-4+9}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\int\frac{9}{x^2-4x+13}dx=Ln(x^2-4x+13)+9\cdot\int\frac{dx}{x^2-4x+13}$ (*)

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i \Rightarrow$ cambio de variable $x-2=3t \Rightarrow dx=3\,dt$

$\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=\int\frac{3\,dt}{(2+3t)^2-4(2+3t)+13}=3\cdot\int\frac{dt}{4+\cancel{12t}+9t^2-8-\cancel{12t}+13}=3\int\frac{dt}{9t^2+9}=\frac{3}{9}\int\frac{dt}{t^2+1}=$

$=\frac{1}{3}\,arctg\,t=\frac{1}{3}\,arctg\,\frac{x-2}{3}$ 0.75 ; sustituimos en (*): $I=\boxed{Ln(x^2-4x+13)+3\,arctg\,\frac{x-2}{3}+C}$ 0.25

---

③ $\int\frac{dx}{e^x+1}$; cambio de variable $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{dt/t}{t+1}=\int\frac{dt}{t(t+1)}$ 0.25 ; $\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}$; $1=A(t+1)+B\cdot t$

↳ Raíces $t=0$, $t=-1$

$t=0\rightarrow \boxed{1=A}$

$t=-1\rightarrow 1=-B \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{1}{t}dt+\int\frac{-1}{t+1}dt=Ln\,t-Ln(t+1)$ 0.5 $=\cancel{Ln}\,e^x-Ln(e^x+1)$ 0.25 $=\boxed{x-Ln(e^x+1)+C}$

---

④ $\int x^3\cdot\cos x^2\,dx$

$u=x^2 \longrightarrow du=2x\,dx$

$dv=x\cos x^2\,dx \rightarrow v=\int x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\,sen\,x^2$ $\Big\} \Rightarrow I=\frac{1}{2}x^2\,sen\,x^2-\int\frac{1}{2}\,sen\,x^2\cdot 2x\,dx=$ 0.25

$=\frac{1}{2}x^2\,sen\,x^2-\frac{1}{2}\cdot(-\cos x^2)$ 0.25 $=\boxed{\frac{1}{2}x^2\,sen\,x^2+\frac{1}{2}\cos x^2+C}$ 0.5

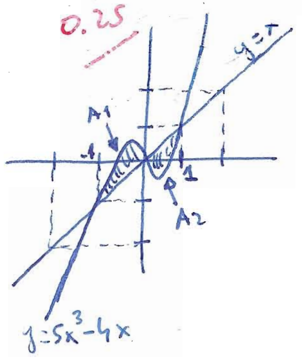
---

⑤ $\left.\begin{array}{l} f(x)=5x^3-4x \\ g(x)=x \end{array}\right\}$ $5x^3-4x=x;\ 5x^3-5x=0;\ 5x(x^2-1)=0$ $\nearrow x=0$, $\searrow x=\pm 1$

x	-2	-1	0	1	2
$y=5x^3-4x$	-32	-1	0	1	32

↳ simétrica impar

0.25



$A_2=\int_0^1\left[x-(5x^3-4x)\right]dx=\int_0^1(-5x^3+5x)\,dx=\left[-\frac{5x^4}{4}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$

$=-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}=\frac{5}{4}u^2$ 0.5 ; por simetría impar de $f(x)$, $A_1=A_2$,

con lo cual $A_T=2\cdot\frac{5}{4}=\boxed{\frac{5}{2}u^2}$ 0.25

⑥ a) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ 0.1

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}$ 0.1

b) $A^4 = A^3\cdot A = -\mathbb{I}\cdot A = -A$ 0.2

$A^5 = A^4\cdot A = -A\cdot A = -A^2$ 0.2

$A^6 = A^5\cdot A = -A^2\cdot A = -A^3 = -(-\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 0.2

c) $A^{18} = (A^6)^3 = \mathbb{I}^3 = \mathbb{I}$ 0.2

---

⑦ a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3\cdot 5 = \boxed{15}$ 0.5

b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}\right) = \boxed{\frac{25}{3}}$ 0.5

5   0 pq. $f_2 = 2f_1$

I.E.S. "Fernando de Mena"	**RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A** **CURSO 2005-2006**	Junta de Comunidades de Castilla -La Mancha

1. Resolver: $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$

2. Resolver: $\int \frac{x^2-2x+10}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

3. Resolver: $\int x^2 e^{2x+1}\,dx$

4. Representar las funciones $y=x^3$ e $y=4x$, y hallar el área del recinto que delimitan.

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^2

b) A partir de lo anterior, **deducir** (¡no por cálculo directo!) una fórmula general para A^n

c) Hallar det(A)

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

① $I=\int\frac{x}{x^2+2x+3}\,dx=\frac12\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx=\frac12\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx+\frac{1}{\cancel{2}}\int\frac{-\cancel{2}}{x^2+2x+3}\,dx=\frac12\ln(x^2+2x+3)-\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$ (*) 0.5

$\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt2\,i}{2}=-1\pm\sqrt2\,i \Rightarrow$ cambio de variable $x+1=\sqrt2\,t \Rightarrow x=\sqrt2\,t-1$

$\Downarrow$
$dx=\sqrt2\,dt$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{\sqrt2\,dt}{(\sqrt2t-1)^2+2(\sqrt2t-1)+3}=\sqrt2\cdot\int\frac{dt}{2t^2-\cancel{2\sqrt2t}+1+\cancel{2\sqrt2t}-2+3}=\sqrt2\int\frac{dt}{2t^2+2}=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\sqrt2}{2}\,\mathrm{arctg}\,t=\frac{\sqrt2}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt2}\xrightarrow[\text{en }(*)]{\text{sustituimos}} I=\boxed{\ln\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{\sqrt2}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt2}+C_1}$$

1.5

② $\frac{x^2-2x+10}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow x^2-2x+10=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C\cdot(x+2)$

$(x-1)^2$: raíz 1 doble; $(x+2)$: raíz -2

$x=1 \to 9=3C \Rightarrow \boxed{C=3}$

$x=-2 \to 18=9A \Rightarrow \boxed{A=2}$ 0.5

$x=0 \to 10=A-2B+2C;\ 10=2-2B+6;\ 2B=-2;\ \boxed{B=-1}$

$$I=\int\frac{2}{x+2}dx+\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{3}{(x-1)^2}dx=2\ln(x+2)-\ln(x-1)+3\cdot\int(x-1)^{-2}dx=\ln(x+2)^2-\ln(x-1)+3\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=$$

0.5 0.5 0.5

$$=\boxed{\ln\frac{(x+2)^2}{x-1}-\frac{3}{x-1}+C_1}$$

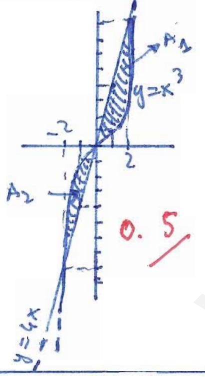
③ $I=\int x^2\cdot e^{2x+1}\cdot dx$; $\left.\begin{array}{l}u=x^2\longrightarrow du=2x\,dx\\ dv=e^{2x+1}dx\longrightarrow v=\int e^{2x+1}dx=\frac12\int2e^{2x+1}dx=\frac12e^{2x+1}\end{array}\right\}\Rightarrow I=\boxed{\frac{x^2}{2}e^{2x+1}-\int\frac{1}{\cancel{2}}e^{2x+1}\cdot\cancel{2}x\,dx}$ (*) 0.5

$\int xe^{2x+1}dx$; $\left.\begin{array}{l}u=x\longrightarrow du=dx\\ dv=e^{2x+1}dx\longrightarrow v=\frac12e^{2x+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\int xe^{2x+1}dx=\frac{x}{2}e^{2x+1}-\int\frac12e^{2x+1}dx}=\frac{x}{2}e^{2x+1}-\frac12\cdot\frac12\int2e^{2x+1}dx=$

$=\boxed{\frac{x}{2}e^{2x+1}-\frac14e^{2x+1}}$ 0.5

Sustituimos en (*): $I=\boxed{\frac{x^2}{2}e^{2x+1}-\frac{x}{2}e^{2x+1}+\frac14e^{2x+1}+C_1}$ 1

④ $\left.\begin{array}{l}y=x^3\\ y=4x\end{array}\right\}$ $x^3=4x;\ x^3-4x=0;\ x(x^2-4)=0$ $\nearrow x=0$, $\searrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm2$



$A_1=\int_0^2(4x-x^3)\,dx=4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}=2x^2-\frac{x^4}{4}\Big]_0^2=8-4=4u^2$ 0.75

$A_2=\int_{-2}^0(x^3-4x)\,dx=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{4}-2x^2\Big]_{-2}^0=-(4-8)=4u^2$ 0.75

$A_T=\boxed{8u^2}$

0.5

⑤
a) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathbb{I}$ 0.5

b) $\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=\mathbb{I}\cdot A=A$

$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=\mathbb{I}$

$A^5=A^4\cdot A=\mathbb{I}\cdot A=A\ \ldots$

$\vdots$

$\boxed{A^n=\begin{cases}A & \text{si } n \text{ impar}\\ \mathbb{I} & \text{si } n \text{ par}\end{cases}}$ 1

c) Como A es triangular, su det es igual al producto de los elementos de la diagonal $\Rightarrow \det A=1$ 0.5