I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 1ª EVALUACIÓN **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C** **CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

1. *(UCLM, junio 2005)* **a)** Enunciar la regla de L'Hôpital. **b)** Resolver: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$

(1,5 puntos)

2. Resolver: **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ *(1,5 puntos)*

3. Dada $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Hallar **a** y **b** para que f(x) sea continua y derivable.
b) Enunciar el teorema del valor medio.
c) Razonar para esos valores de a y b si f(x) cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [-1,3]. En caso afirmativo, hallar el o los puntos intermedios que verifican el teorema. *(2,5 puntos)*

4. Dada $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$

a) Obtener su Dom(f)
b) Calcular los posibles cortes con los ejes.
c) Hallar los posibles M y m, y los intervalos de crecimiento.
d) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
e) Con la información anterior, hacer un esbozo de su gráfica.
f) Hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) en x=-1 *(4,25 puntos)*

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.

CALIGRAFÍA Y LIMPIEZA 0.05
ORDEN PLANTEAMIENTO 0.05
ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS 0.05
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO ... 0.10

1 a) $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ y } g(x) \text{ derivables en } x=a \\ f(a)=g(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ⇦ 0,5

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{tg\,x-\operatorname{sen}x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+tg^2x-\cos x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2tg\,x(1+tg^2x)+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2tg\,x+2tg^3x+\operatorname{sen}x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+tg^2x)+6tg^2x\cdot(1+tg^2x)+\cos x} = \boxed{\frac{1}{3}}$ ⇦ 1

TOTAL: 1,5

2 a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \underset{0/0}{\overset{\text{indetermin.}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

0,5

b) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}Ln(\cos 2x)}$ (*) ⇦ 0,125

1^{∞} = indeterm.

$\lim_{x\to 0}\frac{3\,Ln(\cos 2x)}{x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{-\cancel{2}\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{\cancel{2}x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}2x}{x\cdot\cos 2x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot 2\cdot\cos 2x}{\cos 2x+x\cdot(-2\operatorname{sen}2x)} = \frac{-6}{1} = -6$

0,

Sustituimos en (*): soluc: $\boxed{e^{-6}}$ ⇦ 0,125

TOTAL: 1,5

3 $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si\ x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & si\ x>2 \end{cases}$

a) CONTINUA en $x=2$:

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2+3x) = 4a+6 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2-bx-4) = 4-2b-4 = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+6=-2b;\ 4a+2b=-6$

0,25 ⇨ $2a+b=-3$

DERIVABLE en $x=2$:

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 2ax+3\big]_{x=2} = 4a+3 \\ f'(2^+) = 2x-b\big]_{x=2} = 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+3=4-b$

$4a+b=1$ ⇧ 0,25

$2a+b=-3$
$4a+b=1$
$2a \quad =4$

$\boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=-7}$ ⇦ 0,5

⇨ $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x & si\ x\leq 2 \\ x^2+7x-4 & si\ x>2 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) \,/\, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ⇦ 0,5

c) $f(x)$ sí cumple las hipótesis del th., pues acabamos de ver que es continua y derivable $\forall\mathbb{R}$, y en particular en $[-1,3] \Rightarrow \exists\, c\in(-1,3) \,/\, f'(c) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{26-(-1)}{4} = \frac{27}{4}$ ⇦ 0,25

TOTAL: 2,5

1ª rama: $f'(x) = 4x+3 = \frac{27}{4}$; $16x+12=27$; $16x=15$; $\boxed{x=\frac{15}{16}}$ ∈ 1ª rama ⇦ 0,375

2ª rama: $f'(x) = 2x+7 = \frac{27}{4}$; $8x+28=27$; $8x=-1$; $x=-1/8$ descartado pq. ∉ 2ª rama ⇦ 0,375

4 a) $x^2+x-2=0$ $\begin{array}{l} \nearrow x_1=1 \\ \searrow x_2=-2 \end{array}$ $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}}$ ⇦ 0,5

b) CORTES EJE X: $y=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+x-2}=0$; $1=0$!! $\Rightarrow$ $\boxed{\text{no corta al eje x}}$ ⇦ 0,25

CORTE EJE Y: $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{(0,-1/2)}$ ⇦ 0,25

c) $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2} = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-1/2$ posible Mo m ⇦ 0,25

$f''(x) = -\frac{2(x^2+x-2)^{\cancel{2}}-(2x+1)\cdot 2\cancel{(x^2+x-2)}\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^{\cancel{4}\,3}}$ ⇦ 0,25

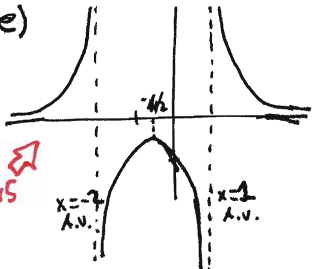
$f''(-1/2) = -\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3} = -\frac{2\cdot(-9/4)}{-9/4} < 0 \Rightarrow \boxed{M\left(-\frac{1}{2},-\frac{4}{9}\right)}$ ⇦ 0,5

TOTAL: 4,25

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{\infty} = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

0,5

e)



0,5

0,5

⇨ $f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-\frac{1}{2})$

$f(x)\searrow \forall x\in(-\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)$

F) $x=-1 \rightarrow y=f(-1)=-\frac{1}{2} \rightarrow P(-1,-1/2)$

$f'(-1) = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+1)$

$4y+2=x+1$

$\boxed{x-4y-1=0}$

0,75

I.E.S. "Fernando de Mena"	**EXAMEN 1ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A** **CURSO 2005-2006**	Junta de Comunidades de **Castilla -La Mancha**

1. Calcular: a) *(Junio 2005)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\text{sen } x}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}\right)$

(3 puntos)

2. *(Septiembre 2004)* Dada $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determinar los valores de **a** y **b** para que sea derivable en todos los puntos.
b) Esbozar la gráfica de la curva resultante.
c) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ *(2 puntos)*

3. Estudiar si la función $y=(x-1)(2x+3)^2+4$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-2,1]. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema. *(2 puntos)*

4. Dada $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$

a) Razonar cuál es su dominio de definición. Hallar sus asíntotas.
b) Hallar sus posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
b) Hallar sus posibles P.I. Intervalos de curvatura.
c) Dibujar su gráfica. *(3 puntos)*

① a) $\lim_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2x-\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x)+\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}}$ 0.25 0.25

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\cos x}{2[1+\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}^2x\cdot(1+\operatorname{tg}^2x)]+\cos x} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ 0.25 0.25 1 punto

b) $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{sen}x} \underset{\infty^0}{=} e^{\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln\frac{1}{x^2}}$ (*) ; $\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln\dfrac{1}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}x\cdot(\cancel{\ln 1}-\ln x^2) = \lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}x\cdot(-2\ln x)$ 0.25

$=-2\cdot\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln x = -2\cdot\lim_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1/\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{-\infty/\infty}{=}} -2\cdot\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2x}} = -2\lim_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{-x\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}}$ 0.25

$=-2\cdot\lim_{x\to0^+}\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x}{-(\cos x-x\operatorname{sen}x)} = -2\cdot\dfrac{0}{-1}=0$; sustituimos en (*): soluc: $e^0=\boxed{1}$ 0.25 0.25 1 punto

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax} \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} =$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\cancel{x^2}+ax)-(\cancel{x^2}-ax)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{\text{ídem}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \dfrac{2a}{2} = \boxed{a}$ 1 punto

---

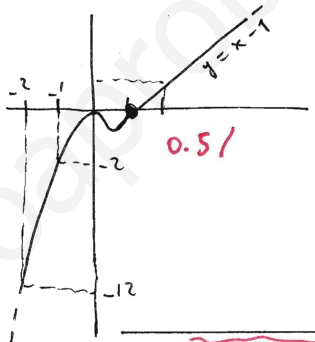
② $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2 & \text{si } x\le1\\ ax+b & \text{si } x>1\end{cases}$ a) Para que sea derivable, previamente hay que imponer que sea continua en $x=1$:

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3-x^2)=0\\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}(ax+b)=a+b\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{CONTINUA}} a+b=0$ (*) 0.5

derivable en $x=1$:

$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=3x^2-2x]_{x=1}=1\\ f'(1^+)=a\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=1} \xrightarrow{(*)} \boxed{b=-1}$ 0.5

b)



0.5 2 puntos

c) $\left.\begin{array}{l}x=-1 \Rightarrow y=-2 \text{ (sustituyendo en la 1.ª rama)}\\ y'=3x^2-2x;\ y'(-1)=5\end{array}\right\} \boxed{y+2=5(x+1)}$ $y=5x+3$

---

③ $y=(x-1)(2x+3)^2+4=(x-1)(4x^2+12x+9)+4=4x^3+12x^2+9x-4x^2-12x-9+4=4x^3+8x^2-3x-5 \rightarrow f'(x)=12x^2+16x-3$

$\left.\begin{array}{l}f(x) \text{ CONTINUA en } [-2,1] \text{ por ser polinómica}\\ f(x) \text{ DERIVABLE en } (-2,1)\ \text{"}\ \ \text{"}\ \ \text{"}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(-2,1)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} \Rightarrow 12x^2+16x-3=\dfrac{4-1}{3}=1$ 0.25 0.25

$12x^2+16x-4=0;\ 3x^2+4x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+12}}{6}=\dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{6}=\dfrac{-4\pm2\sqrt7}{6}$ $x_1=\dfrac{-2+\sqrt7}{3}$ $x_2=\dfrac{-2-\sqrt7}{3}$

2 puntos 0.25

0.5 (los dos son solución pq. $\in(-2,1)$) 0.75

---

④ $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+1}$ a) Dom(f) = ℝ pq. $x^2+1\neq0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ A.V.
(ES SIMÉTRICA IMPAR)

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{8x}{x^2+1}=0 \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ A.H.}} \Rightarrow \nexists$ A.O. 0.5

b) $f'(x)=\dfrac{8(x^2+1)-8x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{8-8x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 8-8x^2=0;\ 8=8x^2;\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$ posibles M o m 0.25

$f''(x)=\dfrac{-16x\cdot(x^2+1)^2-(8-8x^2)\,2\cdot(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{-16x(x^2+1)-(8-8x^2)\cdot4x}{(x^2+1)^3}=\dfrac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}$ 0.25

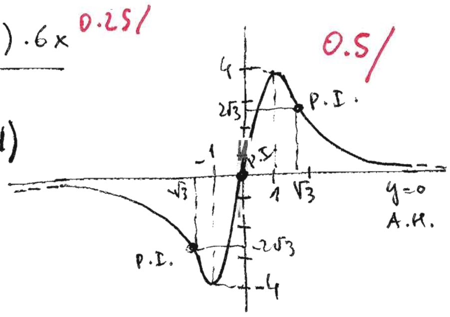
$\left.\begin{array}{l}f''(1)=\frac{-}{+}<0 \Rightarrow \boxed{M(1,4)}\\ f''(-1)=\frac{+}{+}>0 \Rightarrow \boxed{m(-1,-4)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}f(x) \searrow \forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ f(x) \nearrow \forall x\in(-1,1)\end{array}$ 0.5 3 puntos

c) $f''(x)=\dfrac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 16x^3-48x=0;\ 16x(x^2-3)=0 \rightarrow \begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt3\end{array}\Big\}$ posibles P.I. 0.25

$f'''(x)=\dfrac{(48x^2-48)(x^2+1)^3-(16x^3-48x)\cdot3(x^2+1)^2\cdot2x}{(x^2+1)^6}=\dfrac{(48x^2-48)(x^2+1)-(16x^3-48x)\cdot6x}{(x^2+1)^4}$ 0.25

$\left.\begin{array}{l}f'''(0)=\frac{-48}{+}<0 \Rightarrow \boxed{\text{P.I. }(0,0)}\\ f'''(\sqrt3)=\frac{+}{+}>0 \Rightarrow \boxed{\text{P.I. }(\sqrt3,2\sqrt3)}\\ f'''(-\sqrt3)=\frac{+}{+}>0 \Rightarrow \boxed{\text{P.I. }(-\sqrt3,-2\sqrt3)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}f(x) \cap \forall x\in(-\infty,-\sqrt3)\cup(0,\sqrt3)\\ f(x) \cup \forall x\in(-\sqrt3,0)\cup(\sqrt3,\infty)\end{array}$ 0.5

d)



0.5

EXAMEN 1ª EVALUACIÓN **CURSO 2003-2004**
MATEMÁTICAS II

1. Calcular: a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - x - 1}{2x^2 - x^3}$ b) $\lim_{x \to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

2. Dada

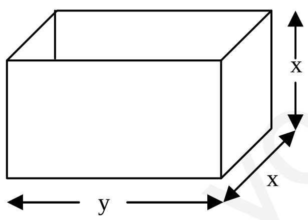
$$f(x) = \begin{cases} -1 + e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ -x + \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad.

3. Dada $f(x) = (x+1)^{x-1}$ a) Hallar f '(x) (por derivación logarítmica)
b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=0

4. Dada $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ a) Hallar sus posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
b) Posibles P.I. Intervalos de curvatura. (Si tienes tiempo, se valorará esbozar la gráfica)

5.



Se desea construir un contenedor (sin tapa) tal como indica la figura, de 36 m^3 de capacidad. Hallar las dimensiones del más económico, es decir, el que emplea menos chapa en su construcción.

① a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}x} - x - 1}{2x^2 - x^3} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot e^{\operatorname{sen}x} - 1}{4x - 3x^2} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x \cdot e^{\operatorname{sen}x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen}x}}{4 - 6x} = \boxed{\frac{1}{4}}$ 0.25/ 0.5/ 0.25/

b) $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}x} = e^{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x \cdot \ln x}$ (0^0 = INDTDO) ; $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen}x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x \cdot \cos x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{-\cos x + (-x)\cdot(-\operatorname{sen}x)} =$ ($0\cdot(-\infty)$ = INDTDO) 0.25/ 0.25/

0.25/ $= \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$ solución: $e^0 = \boxed{1}$ 0.25/

---

② $f(x) = \begin{cases} -1 + e^x & \text{si } x \le 0 \\ \operatorname{sen}x & \text{si } 0 < x \le \pi \\ -x + \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$

a) Vamos que cada rama es continua en los intervalos en que están definidos.

¿Continua en x=0?

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-1+e^x) = -1+1 = 0$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x = 0$
$\Rightarrow$ f(x) continua en x=0 0.5/

¿Continua en $x=\pi$?

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi} \operatorname{sen}x = 0$
$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi}(-x+\pi) = -\pi+\pi = 0$
$\Rightarrow$ f(x) continua en $x=\pi$ 0.5/

CONCLUSIÓN: $\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ continua } \forall \mathbb{R}}$

b) Como f(x) es continua $\forall\mathbb{R}$, puede ser derivable. Estudiémoslo:

¿Derivable en x=0? $f'(0^-) = [-1+e^x]'_{x=0} = e^x]_{x=0} = 1$; $f'(0^+) = [\operatorname{sen}x]'_{x=0} = \cos x]_{x=0} = 1$ $\Rightarrow \exists f'(0)$ 0.5/

¿Derivable en $x=\pi$? $f'(\pi^-) = [\operatorname{sen}x]'_{x=\pi} = \cos x]_{x=\pi} = -1$; $f'(\pi^+) = [-x+\pi]'_{x=\pi} = -1$ $\Rightarrow \exists f'(\pi)$ 0.5/

CONCLUSIÓN: $\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ derivable } \forall\mathbb{R}}$

---

③ $f(x) = (x+1)^{x-1}$ a) $\ln y = \ln(x+1)^{x-1} = (x-1)\cdot\ln(x+1)$; $\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + (x-1)\cdot\frac{1}{x+1}$; $\boxed{y' = (x+1)^{x-1}\cdot\left[\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1}\right]}$ 0.25/ 0.25/ 0.5/

b) $x=0 \to f(0) = 1^{-1} = 1 \to P(0,1)$ 0.25/
$m = f'(0) = 1^{-1}\cdot\left[\cancel{\ln 1} + \frac{-1}{1}\right] = 1\cdot(-1) = -1$ 0.25/
$y - 1 = -1(x-0)$; $\boxed{y = -x+1}$ 0.5/

---

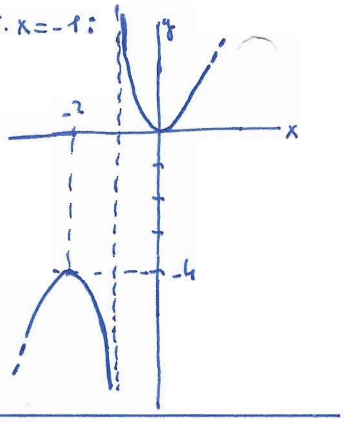
④ $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \to D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ a) $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \to x^2+2x = 0; x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$ posibles Max/min 0.25/

$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}} - (x^2+2x)\cdot 2\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f''(0) > 0 \Rightarrow m(0,0)$; $f''(-2) < 0 \Rightarrow M(-2,-4)$ 0.5/ $\Rightarrow$ f(x) ↗ $\forall x \in (-\infty,-2)\cup(0,\infty)$; f(x) ↘ $\forall x \in (-2,0) - \{-1\}$ 0.25/

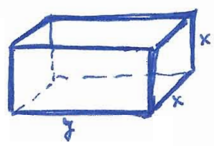
b) $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow \nexists$ solución $\Rightarrow \boxed{\nexists\, P.I.}$ 0.5/ Estudiamos la curvatura viendo el signo de f''(x) a ambos lados de la A.V. x=−1:

p.ej: $f''(-2) < 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \cap \forall x \in (-\infty,-1)}$
$f''(0) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \cup \forall x \in (-1,\infty)}$ 0.5/



---

⑤



Restricción: $x^2 y = 36$ 0.25 $\to y = \frac{36}{x^2}$
F.A minimizar: $2x^2 + 3xy = A$ $\to A(x) = 2x^2 + 3x\cdot\frac{36}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}$ 0.25/

$A'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{108}{x^2}$; $x^3 = \frac{108}{4} = 27 \to \boxed{x = \sqrt[3]{27} = 3\,m}$ 0.5/

Confirmemos que se trata de un mínimo: Sustituimos en la restricción

$A''(x) = 4 - 108\cdot\frac{-2x}{x^4} = 4 + \frac{216}{x^3}$; $A''(3) > 0 \Rightarrow$ mínimo 0.5/ $\boxed{y = \frac{36}{9} = 4\,m}$ 0.5/

EXAMEN 1ª EVALUACIÓN	**CURSO 2002-2003**
MATEMÁTICAS II	

1. **a)** $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4+3x^3+x^2-3x-2}$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

2. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x \le -1 \\ ax^2 - 2x + 2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -ax^2 + bx - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se pide: **a)** Hallar **a** y **b** para que sea continua.
b) Para esos valores de **a** y **b** estudiar su derivabilidad.

3. Derivar y simplificar: **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$ **b)** $y = (\operatorname{sen} x)^{1/x}$ **c)** $y = (2x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{3x-1}$

4. Dada la ecuación $x^5-x^4+x-1=0$ se pide:

- **a)** Aplicando el teorema de Bolzano demostrar que tiene al menos una raíz real e indicar un posible intervalo en el que se encuentre.
- **b)** ¿De qué raíz se trata?

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)=(3x-2x^2)\cdot e^x$ en $x=0$

6. Estudiar si la función $y=7+x\cdot(x+2)^2$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [-2,0]. En caso afirmativo hallar el valor o los valores intermedios en que se verifica el teorema.

INSTRUCCIONES: *Se debe contestar obligatoriamente a las tres primeras preguntas, y elegir dos cualesquiera de entre las tres últimas (es decir, cinco preguntas en total)*

1) a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4+3x^3+x^2-3x-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2+3x+2)}{\cancel{(x+1)}(x^3+2x^2-x-2)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x^2+x-2)} = \dfrac{1}{-2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$ 0.25/ 0.5/ 0.25

	1	4	5	2
-1		-1	-3	-2
	1	3	2	$\boxed{0}$
-1		-1	-2	
	1	2	$\boxed{0}$	

	1	3	1	-3	-2
-1		-1	-2	1	2
	1	2	-1	-2	$\boxed{0}$
-1		-1	-1	2	
	1	1	-2	$\boxed{0}$	

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}$ 0.25/

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+3x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} \overset{\infty/\infty}{=}$ 0.25/

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$ 0.25/ $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ 0.25/

2) $f(x)=\begin{cases} x+b & \text{si } x\le -1 \\ ax^2-2x+2 & \text{si } -1<x\le 2 \\ -ax^2+bx-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) CONTINUA en $x=-1$:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}(x+b) = -1+b$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(ax^2-2x+2) = a+4$

$\Rightarrow -1+b=a+4$; $-a+b=5$ 0.25/

CONTINUA en $x=2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2-2x+2) = 4a-2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-ax^2+bx-6) = -4a+2b-6$

$\Rightarrow 4a-2=-4a+2b-6$; $8a-2b=-4$; $\boxed{4a-b=-2}$ 0.25/

$-a+b=5$
$4a-b=-2$
$3a=3$; $\boxed{a=1} \to \boxed{b=6}$ 0.5/

$f(x)=\begin{cases} x+6 & \text{si } x\le -1 \\ x^2-2x+2 & \text{si } -1<x\le 2 \\ -x^2+6x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) ¿Derivable en $x=-1$?:

$f'(-1^-)=[x+6]'_{x=-1} = 1$

$f'(-1^+)=[x^2-2x+2]' = 2x-2]_{x=-1} = -4$

$\Rightarrow \nexists f'(-1)$ 0.5/

¿Derivable en $x=2$?:

$f'(2^-)=[x^2-2x+2]'_{x=2} = 2x-2]_{x=2} = 2$

$f'(2^+)=[-x^2+6x-6]'_{x=2} = -2x+6]_{x=2} = 2$

$\boxed{\exists f'(2)}$ 0.5/

3) a) $y=\dfrac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{y=u/v} y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2-3x^2\ln x}{x^6} = \boxed{\dfrac{1-3\ln x}{x^4}}$ 0.5/

b) $y=(\operatorname{sen} x)^{1/x} \xrightarrow{\text{derivación logarítmica}} \ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln \operatorname{sen} x$; $(\ln y)' = \left[\frac{1}{x}\cdot \ln \operatorname{sen} x\right]'$; $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{x^2}\cdot \ln \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x}\cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (ctg x) $= \dfrac{-\ln \operatorname{sen} x}{x^2}+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}$

$\boxed{y'=\left(\dfrac{-\ln \operatorname{sen} x}{x^2}+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)(\operatorname{sen} x)^{1/x}}$ 0.75/

c) $y=(2x+1)^3\cdot(3x-1)^{1/3}$

$y'=3(2x+1)^2\cdot 2\cdot(3x-1)^{1/3}+(2x+1)^3\cdot\frac{1}{\cancel{3}}(3x-1)^{-2/3}\cdot\cancel{3} = 6(2x+1)^2\cdot\sqrt[3]{3x-1}+\dfrac{(2x+1)^3}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} = \boxed{\dfrac{6(2x+1)^2\cdot\sqrt[3]{(3x-1)^3}+(2x+1)^3}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}$ 0.75/

4) a) $x^5-x^4+x-1=0 \to f(x)=x^5-x^4+x-1$ Continua por ser un polinomio 0.5/

$f(0)=-1<0$
$f(1)=0$
$f(2)>0$
$\Rightarrow \boxed{\exists \text{ raíz en } [0,2]}$ 1/ (Vemos casualmente que la raíz es $x=1$!) 0.5/

b)

	1	-1	0	0	1	-1
1		1	0	0	0	1
	1	0	0	0	1	$\boxed{0}$

raíz

↳ $x^4+1=0$; $x^4=-1$ $\nexists$ soluc.

5) $f(x)=(3x-2x^2)\cdot e^x$ en $x=0 \to f(0)=0$ 0.25/

$f'(x)=(3-4x)e^x+(3x-2x^2)e^x$; $f'(0)=3$ 0.25/

$y-0=3(x-0)$; $\boxed{y=3x}$ 1/

6) $y=7+x\cdot(x+2)^2$ en $[-2,0] \to F(x)=7+x(x^2+4x+4)=x^3+4x^2+4x+7$

$F(x)$ continua y derivable por ser polinómica
$F(-2)=f(0)=7$ 0.5/
$\Rightarrow \exists x\in(-2,0) \,/\, f'(x)=0$; $f'(x)=3x^2+8x+4=0$ 0.5/ $\to \boxed{x_1=-\dfrac{2}{3}}$ 1/

$x_2=-2$ descartado pq $\notin(-2,0)$