I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	**EXAMEN PARCIAL 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II**	**2º Bach. A CURSO 2010-2011**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno/a: SOLUCIONES

1. Calcular:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+1}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x+x+1-2x+1}{(x+1)(x-1)} =$ *(1 punto)*

$(x+1)(x-1)$ mcm

$= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)} \overset{7/0}{=} \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{2\cdot 0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{2\cdot 0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 1} f(x)}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2-1}\right) \sim \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x}-\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right) = \boxed{3}$ *(0,5 puntos)*

$\boxed{2,5}$
$(1+0,5+1)$

→ RECORDAR: las ctes. multiplicativas pueden salir del límite

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x}-\sqrt{x}}{2} \overset{\infty-\infty}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^4+2x}-\sqrt{x})(\sqrt{x^4+2x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x^4+2x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-x}{\sqrt{x^4+2x}+\sqrt{x}} =$ *(1 punto)*

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x}{\sqrt{x^4+2x}+\sqrt{x}} \overset{\infty/\infty}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^8}+\frac{2x}{x^8}}+\sqrt{\frac{x}{x^8}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^7}}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{0^+} = \boxed{\infty}$

0,25   0,25   0,5

2. Dada $f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$, se pide: (se anula en $x=0$)

a) Expresarla como función definida a trozos: *(0,75 puntos)*

$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{-x}{x} & si\ x<0 \\ 2x+\frac{x}{x} & si\ x>0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ 2x+1 & si\ x>0 \end{cases}}$ (Nótese que la función no puede estar definida en $x=0$)

0,75

www.yoquieroaprobar.es

b) Clasificar su posible discontinuidad en $x = 0$ *(1 punto)*

Veamos los 3 requisitos de la continuidad:

1º) ¿$\exists\ F(0)$? Vemos que $\nexists\ F(0)$, por anularse su denominador $\Rightarrow$ f(x) discontinua en $x=0$ 0,25

Para ver qué tipo de discontinuidad es, hay que estudiar el límite:

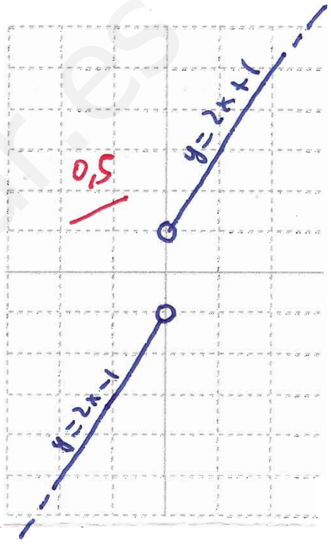
2º) $\lim_{x\to 0} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (2x-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{f(x) presenta discontinuidad de salto finito en } x=0}$ 0,5 0,25

c) Dibujarla: *(0,5 puntos)*

x	$-\infty$	-1	0
$y=2x-1$	$-\infty$....	-3	-1

X	0	1	....∞
$y=2x+1$	1	3	....∞

$\boxed{2,25}$ (0,75+1+0,5)



3. a) Enunciar el teorema de Bolzano: *(0,5 puntos)*

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ /\ F(c) = 0$ 0,5

b) Aplicarlo para demostrar que las gráficas de $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto: *(2 puntos)*
(NOTA: Se podrá valorar también la interpretación gráfica)

Demostrar que $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto equivale a demostrar que $F(x)=\ln x - e^{-x}$ se anula en algún punto. Vemos que esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano: 0,5

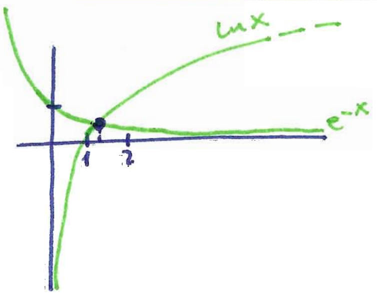
$f(x) = \ln x - e^{-x} = \ln x - \frac{1}{e^x}$ continua $\forall x \in \mathbb{R}^+$, por ser el logaritmo continuo $\forall \mathbb{R}^+$ y la exponencial continua $\forall \mathbb{R}^+$ 0,5

$f(1) = \ln 1 - \frac{1}{e} < 0$ ($\ln 1 = 0$; $\frac{1}{e} \simeq 0{,}3678$) 1

$f(2) = \ln 2 - \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}5578 > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Soluc: las funciones } \ln x \text{ y } e^{-x} \text{ se cortan en algún punto del intervalo } (1,2)}$

$\boxed{2,5}$ (0,5+2)



4. Hallar y', **simplificada**:

a) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$ $\xrightarrow[u'/u]{\ln u}$ $y' = \dfrac{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)'}{\frac{x-1}{x+2}} = \dfrac{\frac{\cancel{x}+2-(\cancel{x}-1)}{(x+2)^2}}{\frac{x-1}{x+2}} = \dfrac{\frac{3}{(x+2)^{\cancel{2}}}}{\frac{x-1}{\cancel{x+2}}} = \boxed{\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}}$ *(0,5 puntos)*

$= \dfrac{3}{x^2+x-2}$

OTRA FORMA: Desarrollando, antes de derivar, el logaritmo:

$y = \ln\dfrac{x-1}{x+2} = \ln(x-1) - \ln(x+2) \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{\cancel{x}+2-(\cancel{x}-1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

b) $y = 2^{\sqrt{x}}$ $\xrightarrow[u'\cdot a^u\cdot \ln a]{a^u}$ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^{\sqrt{x}}\cdot \ln 2 = \dfrac{2^{\sqrt{x}}\cdot \ln 2}{2\cdot\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{2^{\sqrt{x}-1}\cdot \ln 2}{\sqrt{x}}}$ *(0,5 puntos)*

cociente de potencias de la misma base

2,5
(0,5 cada apdo.)

c) $y = \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x} = \left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^2$ $\xrightarrow[n\cdot u^{n-1}\cdot u']{u^n}$ $y' = 2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)' =$ *(0,5 puntos)*

$= 2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x} = \boxed{-\dfrac{2}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{2}{x}$

d) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} e^{x^2}$ $\xrightarrow[\frac{u'}{1+u^2}]{\operatorname{arctg} u}$ $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(e^{x^2}\right)'}{1+\left(e^{x^2}\right)^2} = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}x\cdot e^{x^2}}{1+e^{2x^2}} = \boxed{\dfrac{x\,e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}}$ *(0,5 puntos)*

e) $xy^2 = x^2 + y$ Por derivación implícita: *(0,5 puntos)*

$y^2 + x\cdot 2yy' = 2x + y'$

$2xyy' - y' = 2x - y^2$

$(2xy-1)\,y' = 2x - y^2$

$y' = \boxed{\dfrac{2x-y^2}{2xy-1}}$ o $\dfrac{y^2-2x}{1-2xy}$

ORTOGRAFÍA, CALIGRAFÍA, SINTAXIS : 0,05
ORDEN Y LIMPIEZA : 0,1
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO : 0,1

0,25

NOTA: La ortografía, sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un total de 0,25 puntos.

www.yoquieroaprobar.es

I.E.S. "Fernando de Mena"	PARCIAL 1ª EVALUACIÓN **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C** **CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de **Castilla -La Mancha**

1. **a)** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$ **b)** $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-4x}-\sqrt{4x^2+4}\right)=$ *(2 puntos)*

2. **a)** Enunciar el teorema de Bolzano.
b) Aplicarlo para demostrar que la ecuación $x^5=\frac{x+1}{x}$ tiene al menos una solución en [1,2]
(1,75 puntos)

3. *(UCLM, Sept 97)* Calcular **a** y **b** para que f(x) sea continua en x=0 y x=1:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\le 0\\ a+x^3 & \text{si } 0<x<1\\ b/2x & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Para los valores de **a** y **b** obtenidos, estudiar la derivabilidad en x=0 y x=1 *(2 puntos)*

4. Dada $f(x)=x^2+x+1$
a) Hallar, mediante el correspondiente límite, su derivada en x=-1
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función anterior en el mencionado punto.
(2 puntos)

5. Derivar (y simplificar, cuando proceda): **a)** $y=x^{e^x}$ **b)** $x^3+y^3+2xy=0$ **c)** $y=\text{arc tg}\,\frac{1}{x}$
d) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **e)** $y=\text{sen}^2(x^2+1)$ *(2 puntos)*

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.

www.yoquieroaprobar.es

① a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right) \underset{\text{indeterm.}}{\overset{\infty-\infty}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-3(x-1)}{(x-1)(x^3-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1} \underset{\text{indeterm.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^2}(x+2)}{\cancel{(x-1)^2}(x^2+x+1)} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$ 0.75

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

b) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \underset{\text{indeterm.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{x-a}}{(\cancel{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}}$ 0.5

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-4x}-\sqrt{4x^2+4}\right) \underset{\text{indeterm.}}{\overset{\infty-\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-4x}-\sqrt{4x^2+4}\right)\left(\sqrt{4x^2-4x}+\sqrt{4x^2+4}\right)}{\sqrt{4x^2-4x}+\sqrt{4x^2+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{4x^2}-4x)-(\cancel{4x^2}+4)}{\sqrt{4x^2-4x}+\sqrt{4x^2+4}} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x-4}{\sqrt{4x^2-4x}+\sqrt{4x^2+4}} \underset{\text{indeterm.}}{\overset{-\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4x}{x}-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{4}{x}\to 0}{\sqrt{4-\frac{4}{x}}+\sqrt{4+\frac{4}{x^2}}} = \frac{-4}{4} = \boxed{-1}$ 0.75

TOTAL: 2

② a) $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c)=0$ 0.75

TOTAL: 1,75

b) $\left.\begin{array}{l} x^5 = \frac{x+1}{x} \to f(x) = x^5 - \frac{x+1}{x} \quad \text{continua } \forall x \in [1,2] \\ f(1) = 1-2<0\ ;\ f(2) = 32-\frac{3}{2}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (1,2) \,/\, f(c)=0$ 1

③ $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ a+x^3 & \text{si } 0<x<1 \\ b/2x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) Continuidad en $x=0$:

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(a+x^3) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$ 0.5

Continuidad en $x=1$:

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(a+x^3) = a+1 \overset{a=1}{=} 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{2}=2 \quad \boxed{b=4}$ 0.5

b) $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x & x \le 0 \\ 1+x^3 & 0<x<1 \\ 2/x & x \ge 1 \end{cases}$

Derivabilidad en $x=0$:

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -\operatorname{sen} x\big]_{x=0} = 0 \\ f'(0^+) = 3x^2\big]_{x=0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists\, f'(0)}$ 0.5

Derivabilidad en $x=1$:

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3x^2\big]_{x=1} = 3 \\ f'(1^+) = -2/x^2\big]_{x=1} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nexists\, f'(1)}$ 0.5

TOTAL: 2

④ $f(x) = x^2+x+1$ en $x_0=-1$

a) $f'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1} \underset{\text{indeterm.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to -1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \boxed{-1}$ 1

b) $\left.\begin{array}{l} x_0=-1 \to f(x_0) = f(-1) = 1 \to P(-1,1) \\ m = f'(-1) = -1 \end{array}\right\}$ $y-1 = -1(x+1)\ ;\ y-1 = -x-1\ ;\ \boxed{x+y=0}$ 1

TOTAL: 2

⑤ a) $y = x^{e^x} \xrightarrow[\text{logarítmica}]{\text{derivac.}} \ln y = \ln x^{e^x} = e^x \cdot \ln x\ ;\ \frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}\ ;\ y' = \boxed{\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)\cdot x^{e^x}}$ 0.4

b) $x^3+y^3+2xy=0 \xrightarrow[\text{implícita}]{\text{derivac.}} 3x^2+3y^2\cdot y'+2(y+xy')=0\ ;\ 3x^2+3y^2y'+2y+2xy'=0\ ;\ (3y^2+2x)y' = -3x^2-2y$

$y' = \boxed{\frac{-3x^2-2y}{3y^2+2x}}$ 0.4

c) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \xrightarrow{\operatorname{arctg} u} y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} = \boxed{-\frac{1}{x^2+1}}$ 0.4

TOTAL: 2

d) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x\ln x}{2x\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x-x\ln x}{2x^2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}}$ 0.4

e) $y = \operatorname{sen}^2(x^2+1) \xrightarrow{u^n} y' = 2\cdot\operatorname{sen}(x^2+1)\cdot\left[\operatorname{sen}(x^2+1)\right]' =$

$= 2\operatorname{sen}(x^2+1)\cdot 2x\cdot\cos(x^2+1) =$

$= \boxed{4x\cdot\operatorname{sen}(x^2+1)\cdot\cos(x^2+1)}$ 0.4

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS : 0,05
ORDEN PLANTEAMIENTO : 0,05
LIMPIEZA Y CALIGRAFÍA : 0,05
LENGUAJE MATEMÁTICO : 0,10

0,25

www.yoquieroaprobar.es

EXAMEN PARCIAL 1ª EVAL **CURSO 2005-2006**
MATEMÁTICAS II

1. **a)** $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$ **b)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$ *(2 puntos)*

2. **a)** $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2 - 1} \right) =$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2 - 1} \right) =$ *(2 puntos)*

3. **a)** $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) =$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} =$ *(2 puntos)*

4. *(P.A.U. Junio 2004)* Determinar **b** y **c** para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Sea derivable $\forall \Re$

b) Calcular la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=1 *(2 puntos)*

5. Hallar las derivadas **simplificadas** de: *(2 puntos)*

a) $y = \frac{\ln x}{x^3}$ (resultado en forma de fracción algebraica)

b) $y = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 5$ (ídem)

c) $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (ídem)

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}\,(x^2 - 1)^2$ (ídem, sin racionalizar)

e) $y = x^{x^2}$ (por derivación logarítmica)

www.yoquieroaprobar.es

① a) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-7x^2+8x-3}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-3/2)\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{3}}} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x-1} \stackrel{-1/0}{=} \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-3}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-3}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 1} f(x)}$ 0.5/ 0.5/ 0.5/

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 8 & -3 \\ 1 & & 2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4} = \frac{5\pm 1}{4} \nearrow 1,\ \searrow 3/2$ $\qquad \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} = 1$ doble

b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3-7x^2+8x-3}{x^3-3x^2+3x-1} \sim \lim_{x\to -\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \boxed{2}$ 0.5

② a) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x-2}{x+1}-\frac{6}{x^2-1}\right) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x-1)-6}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+2-6}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x^2-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} =$ 0.25/ 0.25/ 0.25/

$= \lim_{x\to -1}\frac{x-4}{x-1} = \frac{-5}{-2} = \boxed{5/2}$ 0.5

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}-\frac{6}{x^2-1}\right) \sim \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{6}{x^2}\right) = 1-0 = \boxed{1}$ 0.75/

③ a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{x^2}+x+\cancel{1})-(\cancel{x^2}-x+\cancel{1})}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} =$ 0.25/

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$ 0.25/ 0.5/

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ 0.25/ 0.25/ 0.5/

④ $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx+c & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Para que sea derivable, previamente ha de ser continua:

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 = 8 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x^2+bx+c) = -4+2b+c \end{array}\right\} \Rightarrow -4+2b+c = 8;\ \boxed{2b+c=12}\ (*)$ 0.5/

La otra ecuación la obtenemos imponiendo que sea derivable:

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 3x^2\big]_{x=2} = 12 \\ f'(2^+) = -2x+b\big]_{x=2} = -4+b \end{array}\right\}\ 12 = -4+b;\ \boxed{b=16} \xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{sustituimos}} 32+c=12;\ \boxed{c=-20}$ 0.5/ 0.5/

b) $x=1 \xrightarrow[\text{la 1ª rama}]{\text{sustituimos en}} f(x)=1 \to P(1,1);\ f'(x)=3x^2;\ f'(1)=3 \Rightarrow y-1=3(x-1);\ y-1=3x-3;\ \boxed{y=3x-2}$ 0.5

⑤ a) $y = \frac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6} = \boxed{\frac{1-3\ln x}{x^4}}$ 0.4/

b) $y = \frac{1}{3x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+5 \to y' = \frac{-\cancel{9}x^2}{\cancel{9}x^6}+2\cdot\frac{-2x}{x^4}-3\cdot\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^2} = \boxed{\frac{-1-4x+3x^2}{x^4}}$ 0.4/

c) $y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)-\ln(x-1)\right] \to y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(\cancel{x}-1)-(\cancel{x}+1)}{x^2-1} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(x^2-1)} =$

$= \frac{-1}{x^2-1} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}$ 0.4/

d) $y = \sqrt{x^2+1}\cdot(x^2-1)^2 \xrightarrow{u\cdot v} y' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2-1)^2+\sqrt{x^2+1}\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x =$

$= \frac{x(x^2-1)^2}{\sqrt{x^2+1}}+4x(x^2-1)\sqrt{x^2+1} = \frac{x(x^4-2x^2+1)+4x(x^2-1)(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^5-2x^3+x+4x(x^4-1)}{\sqrt{x^2+1}} =$

$= \frac{x^5-2x^3+x+4x^5-4x}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{5x^5-2x^3-3x}{\sqrt{x^2+1}}}$ 0.4/

e) $y = x^{x^2} \xrightarrow{u^v} \ln y = \ln x^{x^2} = x^2\ln x;\ \frac{y'}{y} = 2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x+x = x(2\ln x+1)$

$y' = (2\ln x+1)\cdot x\cdot x^{x^2} = \boxed{(1+2\ln x)\cdot x^{x^2+1}}$ 0.4/

www.yoquieroaprobar.es

EXAMEN PARCIAL 1ª EVALUACIÓN **CURSO 2003-2004**
MATEMÁTICAS II

1. Calcular:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} =$ b) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}) =$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$

2. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 + 2bx + 4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ ax + 11 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se pide: a) Hallar **a** y **b** para que sea continua.
b) Para esos valores de **a** y **b** estudiar su derivabilidad.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$ en el punto de abscisa x=2

4. ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a la función $f(x)=x^3-3x-2$ en [-2,2]?
En caso afirmativo, calcular el valor de **c** tal que f '(c)=0

5. Derivar $y = x^{x^2}$ mediante derivación logarítmica.

www.yoquieroaprobar.es

① a) $\lim_{x\to 1} \frac{4x^3-9x^2+6x-1}{2x^3-3x^2+1} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{12x^2-18x+6}{6x^2-6x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{24x-18}{12x-6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$ 0.5

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+5x+1}+\sqrt{x^2-x-1}\right)}{\sqrt{x^2+5x+1}+\sqrt{x^2-x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\cancel{x^2}+5x+1)-(\cancel{x^2}-x-1)}{\sqrt{x^2+5x+1}+\sqrt{x^2-x-1}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x+2}{\sqrt{x^2+5x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x}{x}+\frac{2}{x}\to 0}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$ 0.75

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}\, 2x}{2x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = \boxed{2}$ 0.75

---

② $f(x) = \begin{cases} ax^2-bx+1 & \text{si } x\le -1 \\ 2x^2+2bx+4 & \text{si } -1<x\le 1 \\ ax+11 & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) f(x) continua en $x=-1$:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}(ax^2-bx+1) = a+b+1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(2x^2+2bx+4) = 2-2b+4 = 6-2b$

$\Rightarrow a+b+1 = 6-2b;\ a+3b=5$

f(x) continua en $x=1$:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2+2bx+4) = 2+2b+4 = 6+2b$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax+11) = a+11$

$\Rightarrow 6+2b = a+11;\ -a+2b=5$

$\begin{cases} a+3b=5 \\ -a+2b=5 \end{cases}$

$5b=10$

$\boxed{a=-1} \Leftarrow \boxed{b=2}$ 1

$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x+1 & \text{si } x\le -1 \\ 2x^2+4x+4 & \text{si } -1<x\le 1 \\ -x+11 & \text{si } x>1 \end{cases}$

b) f(x) derivable en $x=-1$:

$f'(-1^-) = -2x-2\,]_{x=-1} = 0$

$f'(-1^+) = 4x+4\,]_{x=-1} = 0$

$\Rightarrow \exists\, f'(-1)$ 0.5

f(x) derivable en $x=1$:

$f'(1^-) = 4x+4\,]_{x=1} = 8$

$f'(1^+) = -1$

$\Rightarrow \nexists\, f'(1)$ 0.5

Soluc: no es derivable en $x=1$

---

③ $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-3} \longrightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3)-(x^3-2)\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^4-9x^2-2x^4+4x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-9x^2+4x}{(x^2-3)^2}$ 0.5

$x_0=2 \to f(x_0)=f(2)=\frac{6}{1}=6$ (0.25) ; $m=f'(x_0)=f'(2)=\frac{16-36+8}{1} = -12$ (0.25) $\Rightarrow y-6=-12(x-2)$ 1

$y = -12x+24$; $\boxed{y=-12x+30}$

---

④ $f(x)=x^3-3x-2$ en $[-2,2]$

f(x) continua en $[-2,2]$ por ser polinómica

f(x) derivable en $(-2,2)$ " "

0.25

$\Rightarrow \exists x\in(-2,2)\,/\,f'(x) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ $\quad 3x^2-3 = \frac{0-(-4)}{2-(-2)} = \frac{4}{4} = 1$ 0.25

$3x^2-3=1;\ 3x^2=4;\ x^2=\frac{4}{3}$ 0.25 $\quad x_1=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$; $x_2=\boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ 0.25 1

(Nota: ambos son solución pues $\in(-2,2)$)

---

⑤ $y=x^{x^2}$; I) $\ln y = \ln x^{x^2} = x^2\cdot\ln x$ 0.25

II) $\frac{y'}{y} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x$ 0.25

III) $y' = (2x\ln x+x)\cdot x^{x^2} = (2\ln x+1)\cdot x\cdot x^{x^2} = \boxed{(1+2\ln x)\cdot x^{x^2+1}}$ 1.25

0.25

www.yoquieroaprobar.es