EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 1º BACHILLERATO - RECUPERACIÓN
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA – 18-V-09

1) Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\alpha \in 1^{er}$ cuadrante, $\beta \in 4^{o}$ cuadrante, calcula:

$$\text{sen}(\alpha - \beta), \quad \cos(2\alpha) \quad \text{y} \quad \text{tag}(2\beta)$$

2) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC (calcula sus lados, sus ángulos y su área), siendo:

$$\hat{A} = 45^\circ, \ \hat{B} = 60^\circ \ \text{ y } \ b = \sqrt{3}\ \text{cm}$$

(Si haces uso de la calculadora, este ejercicio se valorará con 1 punto)

3) Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \text{sen}\, x - 3 = 0$$

4) Halla el simétrico del punto P(1, 2) respecto de la recta $r: \ 2x + y - 1 = 0$.

5) Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)
a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.
b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

Puntuación: 2 puntos cada ejercicio

SOLUCIONES

1) $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, $\alpha\in 1^{er}$ cuadrante, $\beta\in 4^{o}$ cuadrante

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{4}\rightarrow\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}\rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3}\rightarrow\text{sen}^2\beta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\rightarrow\text{sen}\,\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}\rightarrow\text{tg}\,\beta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

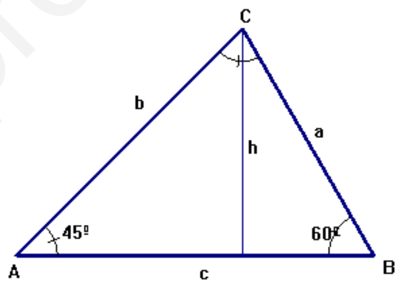
$$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\beta\cos\alpha=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{2+5\sqrt{3}}{12}$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=\frac{15}{16}-\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\text{tag}(2\beta)=\frac{2\text{tag}\beta}{1-\text{tag}^2\beta}=\frac{-\sqrt{5}}{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{5}}{1-\dfrac{5}{4}}=\frac{-4\sqrt{5}}{-1}=4\sqrt{5}$$

2) $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ y $b=\sqrt{3}$ cm

$\hat{C}=180-(45+60)=75^o$



Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}\rightarrow a=\frac{\sqrt{3}\cdot\text{sen}45^o}{\text{sen}60^o}$$

$$a=\frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$\text{sen}75^o=\text{sen}(45+30)=\text{sen}45\cos30+\text{sen}30\cos45=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{c}{\text{sen}C}=\frac{b}{\text{sen}B}\rightarrow c=\frac{\sqrt{3}\cdot\text{sen}75^o}{\text{sen}60^o}=\frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

Área: Hallamos primero la altura h: $\text{sen}45=\dfrac{h}{b}\rightarrow h=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm

$$A=\frac{c\cdot h}{2}=\frac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{8}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

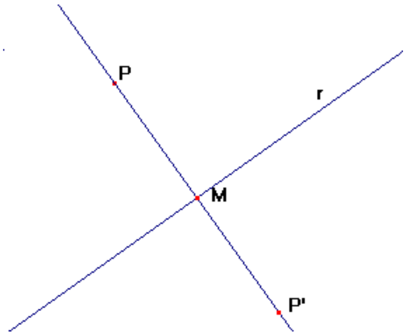
3) $2\cdot\cos^2x+3\cdot\text{sen}\,x-3=0\rightarrow 2(1-\text{sen}^2x)+3\text{sen}\,x-3=0\rightarrow -2\text{sen}^2x+3\text{sen}\,x-1=0$

$$\text{sen}\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-4}=\begin{cases}\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}30^o+360^o k\\150^o+360^o k\end{cases}\\[2ex]\dfrac{-4}{-4}=1\rightarrow x=90^o+360^o k\end{cases}\qquad k\in Z$$

4) Halla el simétrico del punto P(1, 2) respecto de la recta $r:\ 2x+y-1=0$.

Hallaremos primero la ecuación de la recta perpendicular a r, pasando por P:

Vector director de $r \rightarrow (-1,2)$, vector perpendicular $\rightarrow (2,1)$



Recta perpendicular:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1} \rightarrow x-1=2y-4 \rightarrow x-2y+3=0$$

Resolvemos ahora el sistema formado por las dos rectas, para hallar su punto de corte M:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y-1=0\\ x-2y+3=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}4x+2y-2=0\\ x-2y+3=0\end{array}\right\} \rightarrow 5x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5}+y-1=0 \rightarrow y=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$$

M es el punto medio del segmento PP', luego, si P'(a,b):

$$\frac{1+a}{2}=-\frac{1}{5} \rightarrow 5+5a=-2 \rightarrow a=-\frac{7}{5}$$

$$\frac{2+b}{2}=\frac{7}{5} \rightarrow 10+5b=14 \rightarrow b=\frac{4}{5}$$

Punto simétrico: $P'\left(-\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right)$

5) Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

Punto medio de AB: $M\left(\frac{-1+1}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(0,2)$, dirección AB: $\vec{d}=(1,1)-(-1,3)=(2,-2)$

Vector perpendicular (la mediatriz es perpendicular por el punto medio): (1,1)

Ecuación de la mediatriz: $\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{1} \rightarrow x-y+2=0$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

dirección AB: $\vec{d}=(1,1)-(-1,3)=(2,-2)$, punto C(-3,-2)

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{-2} \rightarrow x+3=-y-2 \rightarrow x+y+5=0$$