GLOBAL TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA 19-II-09

1) Calcula el baricentro (punto donde se cortan las medianas) del triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(5,3)$ y $C(3,7)$.

(2 puntos)

2) Dados el punto $P(4,3)$ y la recta $r: 2x - y + 3 = 0$, se pide:

(a) Distancia del punto P a la recta r.

(b) Punto simétrico de P respecto de r.

(2 puntos)

3) Sabiendo que $sen\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{4}$, $\alpha \in 1^{er}$ cuadrante, $\beta \in 4^{o}$ cuadrante, calcula:

$$sen(2\alpha), \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad tag(2\beta) \quad y \quad sen(\alpha - \beta)$$

(1,5 puntos)

4) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC (calcula sus lados, sus ángulos y su área), siendo:

$$\hat{A} = 30^{o} \;; \quad \hat{B} = 45^{o} \quad y \quad c = 20 \text{ cm}.$$

(1,5 puntos)

5) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$, se pide:

(a) Averigua su posición relativa.

(b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

(2 puntos)

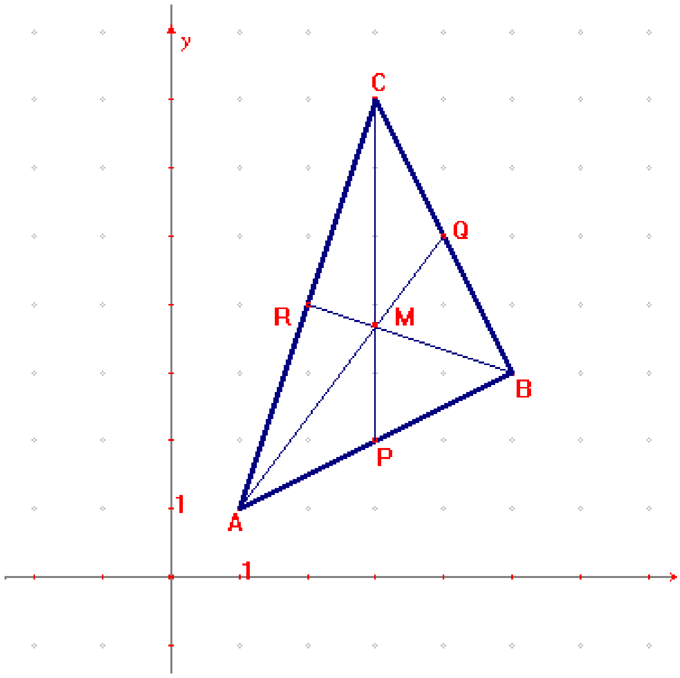
6) Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x + sen\, x = 4sen^{2}x$$

(1 punto)

SOLUCIONES

1) triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(5,3)$ y $C(3,7)$.



Empezamos hallando los puntos medios de los lados:

$$P\left(\frac{1+5}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(3,2)$$

$$Q\left(\frac{5+3}{2},\frac{3+7}{2}\right)=(4,5)$$

$$R\left(\frac{1+3}{2},\frac{1+7}{2}\right)=(2,4)$$

Ahora, las ecuaciones de las tres medianas:

Mediana del lado AB, pasa por C(3,7) y P(3,2) $\vec{d}=\overrightarrow{CP}=(0,-5)$

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-5}\Rightarrow x-3=0$$

Mediana del lado BC, pasa por A(1,1) y Q(4,5) , $\vec{d}=\overrightarrow{AQ}=(3,4)$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}\Rightarrow 4x-4=3y-3\Rightarrow 4x-3y-1=0$$

Mediana del lado AC, pasa por B(5,3) y R(2,4) , $\vec{d}=\overrightarrow{BR}=(-3,1)$

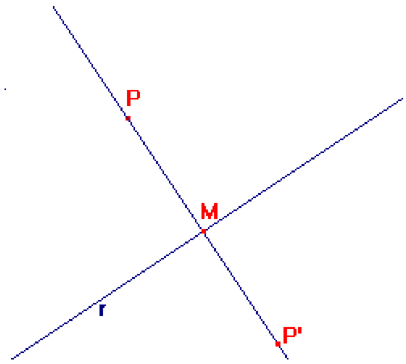
$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-4}{1}\Rightarrow x-2=-3y+12\Rightarrow x+3y-14=0$$

Para hallar el baricentro M, habrá que resolver el sistema:

$$\left.\begin{matrix}x=3\\4x-3y=1\\x+3y=14\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=3\\4\cdot 3-3y=1\\3+3y=14\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}12-1=3y\\3y=14-3\end{matrix}\right\}\rightarrow y=\frac{11}{3}\rightarrow M\left(3,\frac{11}{3}\right)\ \text{Baricentro}$$

2) punto $P(4,3)$ y la recta $r:2x-y+3=0$, se pide:

(a) Distancia del punto P a la recta r.



Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r:

Vector dirección de r: $\vec{d}(1,2)\rightarrow\perp\vec{e}(2,-1)$

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow -x+4=2y-6\Rightarrow x+2y-10=0$$

y ahora, hallamos el punto M (intersección de esta recta con la dada r):

$$\left.\begin{matrix}2x-y+3=0\\x+2y-10=0\end{matrix}\right\}\rightarrow x=10-2y\Rightarrow 2(10-2y)-y+3=0\Rightarrow 20-5y+3=0$$

$$-5y=-23\Rightarrow y=\frac{23}{5}\Rightarrow x=10-\frac{46}{5}=\frac{4}{5}\rightarrow M\left(\frac{4}{5},\frac{23}{5}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,M)=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-4\right)^2+\left(\frac{23}{5}-3\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{5}\text{u.l.}$$

(b) Punto simétrico de P respecto de r.

P' es el simétrico de P respecto de r, luego M es el punto medio del segmento PP':

$$P(4,3),M\left(\frac{4}{5},\frac{23}{5}\right),P'(x,y)\rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{4+x}{2}=\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{3+y}{2}=\dfrac{23}{5}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+20=8\\5y+15=46\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{12}{5}\\ y=\dfrac{31}{5}\end{array}\right\}$$

$P'\left(-\frac{12}{5},\frac{31}{5}\right)$ Simétrico de P respecto de la recta r

3) Vamos a hallar primero las restantes razones:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{3},\ \alpha\in 1^{er}\text{cuadrante}\rightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{4},\ \beta\in 4^{o}\text{ cuadrante}\rightarrow\operatorname{sen}^2\beta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=-\frac{\sqrt{15}}{4},\ \operatorname{tg}\beta=-\sqrt{15}$$

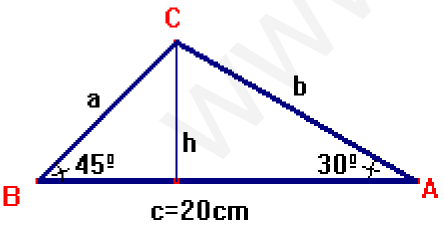
$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{8}}=-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{4}\quad(\frac{\beta}{2}\text{ está en el 2° cuad})$$

$$\operatorname{tag}(2\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{-2\sqrt{15}}{1-(-\sqrt{15})^2}=\frac{-2\sqrt{15}}{1-15}=\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{-\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2+5\sqrt{3}}{12}$$

4) $\hat{A}=30^{o}$; $\hat{B}=45^{o}$ y $c=20\text{ cm}\rightarrow\hat{C}=180-(30+45)=105^{o}$



Teorema del seno: $\dfrac{20}{\operatorname{sen}105^{o}}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}45^{o}}$

$$\operatorname{sen}105=\operatorname{sen}(45+60)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$b=\frac{20}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=20\sqrt{3}-20\text{ cm}$$

$$\frac{20}{\operatorname{sen}105^{o}}=\frac{a}{\operatorname{sen}30^{o}}\rightarrow a=\frac{20}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=10\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\text{cm}$$

Para hallar la altura, nos fijamos en el triángulo rectángulo de la izquierda:

$\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{a} \to h = a \cdot \text{sen } 45^\circ = 10\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\left(2\sqrt{3}-2\right) = 10\sqrt{3}-10 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{20\cdot\left(10\sqrt{3}-10\right)}{2} = 100\sqrt{3}-100 \text{ cm}^2$

5) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$, se pide:

(a) Averigua su posición relativa.

Las ponemos en forma general:

$r \equiv x - y + 1 = 0$; s: $t = x-1;\ t = 2-y \Rightarrow x-1 = 2-y \Rightarrow x+y-3=0$

$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$ las rectas son **secantes**

(b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

Hallamos el punto de corte:

$\left.\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right\}$ sumando (reducción): $2x-2=0 \Rightarrow x=1 \to 1+y-3=0 \Rightarrow y=2$

se cortan en el punto **(1,2)**

ángulo que forman: $\cos\alpha = \frac{\left|1\cdot 1+(-1)\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ Perpendiculares

6) $\cos 2x + \text{sen } x = 4\text{sen}^2 x \to \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen } x = 4\text{sen}^2 x$

$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen } x = 4\text{sen}^2 x \to 6\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

$$\text{sen } x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12} = \frac{1\pm 5}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in Z$$

$$x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 199^\circ 28' + 360^\circ k \\ 340^\circ 32' + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in Z$$