

Ecuaciones de segundo grado

Definición y elementos de la ecuación de segundo grado

Una *ecuación de segundo grado* es una igualdad del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son números reales conocidos con $a \neq 0$, y reciben el nombre de *coeficientes* de la ecuación de segundo grado. Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, al número desconocido x se le llama *incógnita*.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

- **Caso 1:** $b = 0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Para resolverlas se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita x . Hay que tener en cuenta que:

- ✓ Si el radicando es mayor que cero obtendremos dos soluciones, la raíz cuadrada con signo positivo y la raíz cuadrada con signo negativo.
- ✓ Si el radicando es cero la solución es $x = 0$.
- ✓ Si el radicando es negativo la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales.

Nota: el *radicando* de una raíz es “aquello que se encuentra dentro de la raíz”.

Ejemplo 7

$$3x^2 - 24 = 0$$

Despejamos x^2 :

$$3x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{3} \Rightarrow x^2 = 8$$

Extraemos la raíz cuadrada de 8. Como 8 es positivo tenemos dos soluciones:

$$x = \sqrt{8} \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{8} \\ x_2 = -\sqrt{8} \end{cases}$$

Observa que, cuando la ecuación de segundo grado, tiene dos soluciones, éstas se denotan con subíndices: x_1 , x_2 .

Ejemplo 8

$$6x^2 + 12 = 0$$

Despejamos x^2 :

$$6x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = -\frac{12}{6} \Rightarrow x^2 = -2$$

Al intentar extraer la raíz cuadrada de -2 , observamos que no podemos hacerlo porque -2 es negativo:

$$x = \sqrt{-2} \text{ (no existe, pues no hay ningún número cuyo cuadrado sea } -2 \text{)}$$

Así pues, en este caso la ecuación no tiene soluciones reales.

- **Caso 2:** $c = 0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita x pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es $x_1 = 0$. La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado.

Veámoslo:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo 9

$$3x^2 - 18x = 0$$

Sacamos x factor común:

$$x(3x - 18) = 0$$

Una solución es $x_1 = 0$. La otra se obtiene de igualar a cero el factor $3x - 18$:

$$x(3x - 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x - 18 = 0 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

Ecuación de segundo grado. Caso general

En este caso vamos a suponer que los tres coeficientes a , b y c son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes a , b y c en la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa que el símbolo $\pm$ indica que, para obtener las dos posibles soluciones, hay que sumar por un lado y restar por otro:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 10

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

En este caso $a = 3$, $b = -5$ y $c = -2$. Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-24)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5-7}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$, situada en el interior de la raíz de la fórmula que proporciona las soluciones, se le llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado. Pueden ocurrir tres cosas:

- Si el discriminante es mayor que cero ($b^2 - 4ac > 0$) la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales (véase el ejemplo anterior).
- Si el discriminante es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$) la ecuación de segundo grado tiene una única solución, que se suele llamar solución doble. Esta solución se obtiene mediante la expresión:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Es fácil ver la demostración:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- Si el discriminante es menor que cero ($b^2 - 4ac < 0$) la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales. La razón es, de nuevo, la no existencia de raíces cuadradas de números negativos en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 11

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

Ahora tenemos que $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$. Por tanto el discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

Como el discriminante es menor que cero, la solución de la ecuación de segundo grado es única. Ésta es:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado

Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, una ecuación de primer grado no suele aparecer en su forma reducida, tal y como se ha tratado en el apartado anterior, sino que se presenta como una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que pueden aparecer corchetes, paréntesis y fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{3(x^2 - 4 + 1)}{2} - 5 \frac{x + 3 - 2}{3} = x - \frac{-2x^2 - 2(+2)}{4} - 8$$

Los pasos para resolver una ecuación de segundo grado son muy similares a los que se seguían para resolver ecuaciones de primer grado:

1. **Eliminar los corchetes y paréntesis.**
2. **Eliminar los denominadores.** Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. **Colocar todos los términos en el primer miembro.** De este modo en el segundo miembro aparecerá un cero.
4. **Reducir términos semejantes.** Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya en su forma reducida más general $ax^2 + bx + c = 0$, o bien se presentará en una de sus dos formas incompletas: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$.
5. **Despejar la incógnita.** Para ello procederemos como ya se ha explicado en el caso de que la ecuación de segundo grado sea incompleta. Si la ecuación se presenta en su forma reducida más general se aplicará la fórmula ya conocida para despejar la incógnita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 12

$$2(3x^2 + 5x) = 2 - x$$

Esta ecuación no tiene denominadores así que bastará eliminar el paréntesis y colocar todos los términos en el primer miembro de la ecuación:

$$2(3x^2 + 5x) = 2 - x \Rightarrow 6x^2 + 10x = 2 - x \Rightarrow 6x^2 + 10x - 2 + x = 0 \Rightarrow 6x^2 + 11x - 2 = 0$$

Los coeficientes son $a = 6$, $b = 11$ y $c = -2$. Entonces:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{12} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{-11 \pm 13}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{-11+13}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\ x_2 = \frac{-11-13}{12} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 13

$$\frac{5x}{4} - \frac{x^2}{12} - \frac{5}{3} = \frac{3x}{8}$$

Esta ecuación de segundo grado no tiene paréntesis, pero sí que aparecen denominadores. Multiplicamos todos los términos por el mínimo común múltiplo de los mismos, que es 24.

$$24 \frac{5x}{4} - 24 \frac{x^2}{12} - 24 \frac{5}{3} = 24 \frac{3x}{8} \Rightarrow 6 \cdot 5x - 2 \cdot x^2 - 8 \cdot 5 = 3 \cdot 3x \Rightarrow 30x - 2x^2 - 40 = 9x$$

Ahora colocamos todos los términos en el primer miembro y reducimos términos semejantes:

$$30x - 2x^2 - 40 - 9x = 0 \Rightarrow -2x^2 + 21x - 40 = 0$$

Los coeficientes ahora son $a = -2$, $b = 21$ y $c = -40$. Por tanto:

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-40)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 320}}{-4} = \frac{-21 \pm \sqrt{121}}{-4} = \frac{-21 \pm 11}{-4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-21+11}{-4} \Rightarrow x_1 = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{-21-11}{-4} \Rightarrow x_2 = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 14

$$(2x-5)\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

En esta ecuación, para eliminar los paréntesis, tenemos que aplicar la propiedad distributiva ("todos por todos"):

$$2x \cdot x - 2x \cdot \frac{3}{2} - 5x + 5 \cdot \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5x + \frac{15}{2} = 0$$

Eliminamos denominadores multiplicando todos los términos por 2, reducimos términos semejantes y despejamos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 3x - 2 \cdot 5x + 2 \cdot \frac{15}{2} &= 2 \cdot 0 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 10x + 15 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{16 \pm 4}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{16+4}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{16-4}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 15

Resolvamos ahora la ecuación que se ponía como ejemplo al principio de este apartado.

$$\frac{3(x^2 - 4 + 1)}{2} - 5 \frac{x + 3 - 2}{3} = x - \frac{-2x^2 - 2(+2)}{4} - 8$$

Eliminamos paréntesis:

$$\frac{3x^2 - 12x + 3}{2} - \frac{5x + 15 - 5x^2}{3} = x - \frac{-2x^2 - 2x - 4}{4} - 8$$

Eliminamos denominadores. Para ello multiplicamos por 12 cada uno de los términos de la ecuación:

$$12 \frac{3x^2 - 12x + 3}{2} - 12 \frac{5x + 15 - 5x^2}{3} = 12x - 12 \frac{-2x^2 - 2x - 4}{4} - 12 \cdot 8 ;$$

$$6(3x^2 - 12x + 3) - 4(5x + 15 - 5x^2) = 12x - 3(-2x^2 - 2x - 4) - 96 ;$$

$$18x^2 - 72x + 18 - 20x - 60 + 20x^2 = 12x + 6x^2 + 6x + 12 - 96$$

Colocamos todos los términos en el primer miembro y reducimos términos semejantes:

$$18x^2 - 72x + 18 - 20x - 60 + 20x^2 - 12x - 6x^2 - 6x - 12 + 96 = 0 ;$$

$$32x^2 - 110x + 42 = 0$$

Antes de obtener el valor de x mediante nuestra fórmula haremos algo muy importante. Si los coeficientes tienen un divisor común se pueden dividir todos los términos entre este divisor común, quedando una ecuación de segundo grado equivalente a la anterior, pero con la diferencia de que los coeficientes serán más pequeños y, por tanto, más fácil operar con ellos a la hora de aplicar la fórmula mediante la que obtenemos x .

Los coeficientes de nuestra ecuación tienen un divisor común: el 2. Así, dividiendo entre 2 cada uno de los términos obtenemos esta otra ecuación:

$$16x^2 - 55x + 21 = 0$$

Los coeficientes de esta ecuación son $a = 16$, $b = -55$ y $c = 21$ (más fáciles de tratar que los de la ecuación anterior). De este modo:

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{(-55)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 21}}{2 \cdot 16} = \frac{55 \pm \sqrt{3025 - 1344}}{32} = \frac{55 \pm \sqrt{1681}}{32} = \frac{55 \pm 41}{32} = \begin{cases} x_1 = \frac{55 + 41}{32} = \frac{96}{32} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{55 - 41}{32} = \frac{14}{32} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{16} \end{cases}$$

Nota final: la importancia de separar adecuadamente un paso del siguiente

Habrás observado que, cada vez que “damos un paso” sobre una ecuación, ya sea de primer o de segundo grado, para obtener otra ecuación equivalente, pero un poco más sencilla pues hemos conseguido suprimir paréntesis, o hemos eliminado denominadores, o bien se han reducido términos semejantes, etcétera, se ha separado la ecuación anterior de la siguiente o bien mediante el símbolo $\Rightarrow$ (que se traduce por “implica” o por “entonces”), o bien simplemente por un punto y coma (;). Ambas formas son adecuadas y son las que habitualmente se utilizan. También comentar que, ya sea mediante el punto y coma o mediante el símbolo $\Rightarrow$, cada paso se puede separar del siguiente escribiéndolo en renglones distintos, o uno a continuación de otro. Ambas formas son correctas también. Aunque al principio quizás sea conveniente escribir cada paso en un renglón distinto, pues así es posible que veas cada acción con más claridad. En estos apuntes se ha hecho de ambas formas, como habrás podido comprobar.