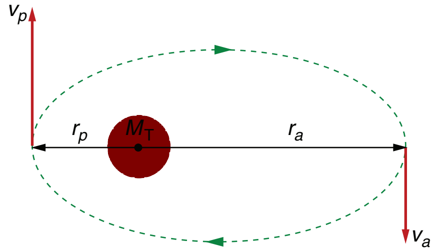
Un satélite artificial describe una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos. Si se conocen las distancias máxima y mínima del satélite al centro de la Tierra (apogeo y perigeo), r_a y r_p, respectivamente, plantea razonadamente, sin resolverlas, las ecuaciones necesarias para determinar las velocidades orbitales del satélite en esos puntos, v_a y v_p.



En toda órbita descrita por un cuerpo dentro de un campo gravitatorio, el momento angular y la energía mecánica se mantienen constantes. Por tanto, para el apogeo y el perigeo se cumplirá:

$$L_a = L_p \rightarrow m \cdot r_a \cdot v_a = m \cdot r_p \cdot v_p \rightarrow r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p \qquad [1]$$

$$E_{m_a} = E_{m_p} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_p} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_a^2}{2} - \frac{G \cdot M_T}{r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{G \cdot M_T}{r_p} \qquad [2]$$

Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a $3{,}6 \cdot 10^7$ m de su superficie. Calcula:

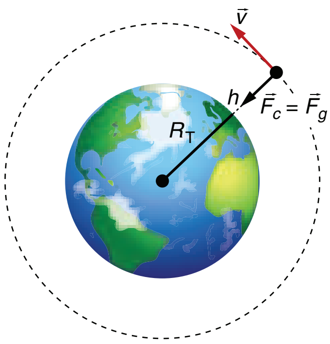
a) La velocidad del satélite.

b) Su aceleración.

c) El período de rotación del satélite alrededor de la Tierra, expresado en días. ¿Qué nombre reciben los satélites de este tipo?

Datos: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Si el satélite gira alrededor de la Tierra, está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Igualando sus respectivas expresiones:



$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

siendo $r = R_T + h$.

Sustituyendo datos, se obtiene el valor de la velocidad del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6{,}38 + 36) \cdot 10^6}} = 3\,065{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Aunque el módulo de su velocidad es constante, el satélite cambia su dirección; luego, tiene aceleración normal, a_n, que vale:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \rightarrow a_n = \frac{(3\,065{,}3)^2}{42{,}38 \cdot 10^6} = 0{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) Como se desplaza con velocidad constante (en módulo), tenemos:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 42{,}38 \cdot 10^6 \text{ m}}{3\,065{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 86\,870 \text{ s} = 1 \text{ día}$$

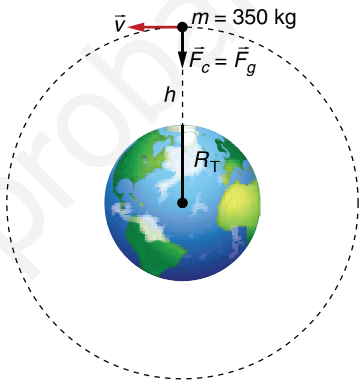
Los satélites cuyo período es 1 día se denominan geosíncronos.

Un satélite artificial de 350 kg se encuentra en una órbita circular de 15 000 km de radio alrededor de la Tierra. Si R_T = 6 370 km, determina:

a) El peso del satélite estando en esta órbita.

b) Su período de rotación alrededor de la Tierra.

c) La energía total del satélite en esta órbita.



a) El peso del satélite, P, será la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre él; es decir:

$$P = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

siendo r = 15 000 km = $R_T + h$.

Como no tenemos datos de G y M_T, podemos expresar el producto $G \cdot M_T$ en función de datos conocidos. Para ello, consideramos un punto de la superficie de la Tierra, donde:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = m \cdot g_0 \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$P = m \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} = m \cdot g_0 \cdot \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$P = 350 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{6\,370 \text{ km}}{15\,000 \text{ km}}\right)^2 = 618{,}6 \text{ N}$$

b) Al ser el módulo de la velocidad constante, tenemos:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \qquad [1]$$

La velocidad orbital del satélite la calculamos igualando la fuerza centrípeta con la fuerza de atracción gravitatoria:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{r} \rightarrow v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$v = 6\,370 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{15\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 5\,149 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Finalmente, de acuerdo con [1], el período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 15\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}{5\,149 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 18\,304 \text{ s (5 h 5 min 4 s)}$$

c) La energía total del satélite, E_m, será la suma de sus energías cinética y potencial; es decir:

$$E_m = E_c + E_p \rightarrow E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r}\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r} \quad ; \quad G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Resulta:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r} - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r}$$

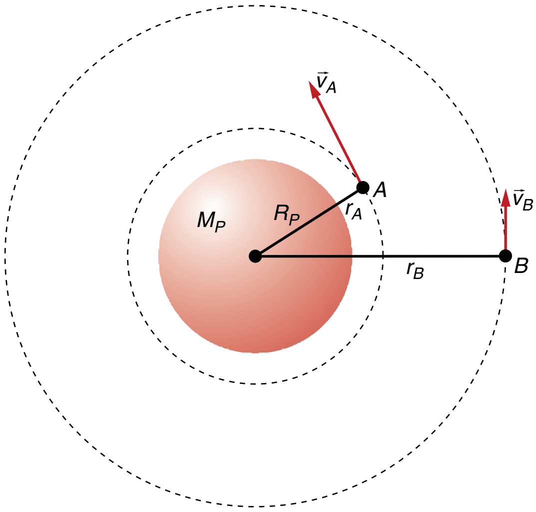
Al sustituir datos numéricos se obtiene:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6370 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot 350 \text{ kg}}{15\,000 \cdot 10^3} = -4{,}64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Dos satélites, *A* y *B*, giran alrededor de un planeta siguiendo órbitas circulares de radios $2 \cdot 10^8$ m y $8 \cdot 10^8$ m, respectivamente. Calcula la relación entre sus velocidades (tangenciales) respectivas.

Cada satélite describe una órbita circular, luego está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_P \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_P}{r}$$



Por tanto:

- Para el satélite *A*:

$$v_A^2 = \frac{G \cdot M_P}{r_A}$$

- Para el satélite *B*:

$$v_B^2 = \frac{G \cdot M_P}{r_B}$$

La relación entre ambas velocidades resulta:

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{\dfrac{G \cdot M_P}{r_A}}{\dfrac{G \cdot M_P}{r_B}} = \frac{r_B}{r_A} \rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{8 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m}} = 4 \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

Un satélite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra. Su masa es de 10 000 kg, y su velocidad, de 4,2 km/s. Calcula:

a) El radio de la órbita.

b) Lo que tarda en dar diez vueltas a la Tierra.

c) La energía potencial gravitatoria del satélite.

Datos: $\boldsymbol{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}};\ M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg};\ R_T = 6\,370\ \mathrm{km}}$.

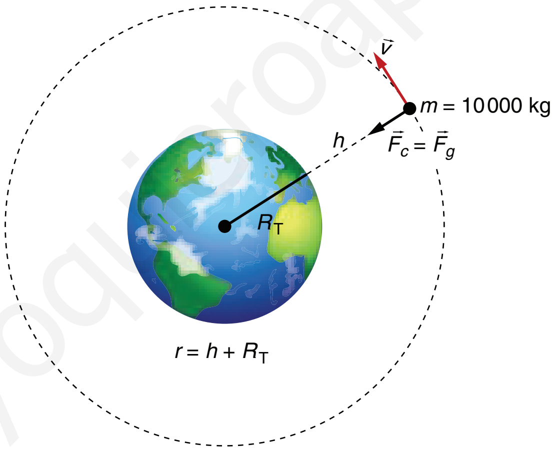
a) Si el satélite describe una trayectoria circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto, se cumplirá:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Despejando el radio de la órbita, r, y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$r = \frac{G \cdot M}{v^2} \rightarrow r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(4{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}$$

$$r = 2{,}26 \cdot 10^7\ \mathrm{m} = 22\,600\ \mathrm{km}$$



b) El satélite se desplaza en su órbita con velocidad constante en módulo; luego:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

Como cada órbita mide $2 \cdot \pi \cdot r$, sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$t = 10 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}26 \cdot 10^7\ \mathrm{m}}{4\,200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 338\,095\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{d}\ 21\ \mathrm{h}\ 54\ \mathrm{min}\ 55\ \mathrm{s}$$

c) La energía potencial gravitatoria del satélite será:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

por lo que al sustituir datos numéricos nos queda:

$$E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 10\,000\ \mathrm{kg}}{2{,}26 \cdot 10^7\ \mathrm{m}} = -1{,}76 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}$$

Se consideran dos satélites, uno en órbita circular alrededor de Marte, y otro alrededor de la Tierra:

a) ¿Cuál es la relación entre los radios de las órbitas si ambos tienen el mismo período?

b) Supongamos ahora que los dos satélites están en órbitas del mismo radio, cada uno alrededor de su planeta. Calcula la relación entre los momentos angulares orbitales correspondientes, si las masas de los satélites son iguales.

Dato: relación entre las masas de los planetas: $M_M = 0{,}11 \cdot M_T$.

a) Si un cuerpo describe una trayectoria circular es porque está sometido a una fuerza centrípeta, que en este caso es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Con los datos que tenemos podemos escribir:

- Para el satélite de Marte:

$$v_M = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T} \rightarrow v_M^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_M^2}{T^2} \ [1] \quad ; \quad v_M^2 = \frac{G \cdot M_M}{r_M} \ [2]$$

$$[1] = [2] \rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_M^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_M}{r_M} \rightarrow r_M^3 = \frac{G \cdot M_M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

- Del mismo modo, para el satélite de la Tierra:

$$r_T^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Para obtener esta última expresión, hemos procedido de la misma forma que en el caso del satélite de Marte. Teniendo en cuenta que $M_M = 0{,}11 \cdot M_T$, la relación entre los radios de las órbitas resulta:

$$\left(\frac{r_M}{r_T}\right)^3 = \frac{\dfrac{G \cdot 0{,}11 \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}{\dfrac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = 0{,}11 \rightarrow r_M = r_T \cdot \sqrt[3]{0{,}11} = 0{,}479 \cdot r_T$$

Es decir, el radio de la órbita del satélite que gira alrededor de Marte es menor que el radio de la órbita del satélite que gira alrededor de la Tierra; en concreto, 0,479 veces.

b) A partir de la definición de momento angular, $\vec{L}$, y teniendo en cuenta que las órbitas son circulares, podemos escribir que

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow L = m \cdot r \cdot v \cdot sen\ 90° = m \cdot r \cdot v$$

ya que en una órbita circular los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Luego, como $r_M = r_T = r$, nos queda:

- Para el satélite de Marte:

$$L_M = m \cdot r \cdot v_M \rightarrow L_M = m \cdot r \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}$$

• Y para el satélite de la Tierra:

$$L_T = m \cdot r \cdot v_T \;\rightarrow\; L_T = m \cdot r \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Elevando al cuadrado L_M y L_T y teniendo en cuenta que $M_M = 0{,}11 \cdot M_T$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} L_M^2 &= m^2 \cdot r^2 \cdot \frac{G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{r} \\ L_T^2 &= m^2 \cdot r^2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{L_M}{L_T}\right)^2 = \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{m^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot M_T} = 0{,}11$$

Es decir:

$$\frac{L_M}{L_T} = \sqrt{0{,}11} = 0{,}332$$

La velocidad de un satélite, de 500 kg de masa, en órbita alrededor de la Tierra es de 7,70 km/s:

a) Determina el radio de la órbita.

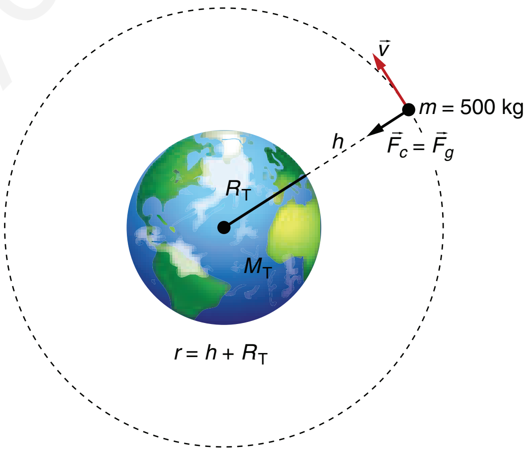
b) Si el satélite pasa a girar a una órbita superior cuyo radio es el doble del de la anterior, ¿cuál es la nueva velocidad orbital?

c) ¿Qué energía suplementaria hay que comunicarle al satélite para que cambie de órbita?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Cualquier cuerpo que orbite alrededor de la Tierra está sometido a una fuerza centrípeta. En este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria; luego:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \;\rightarrow\; v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$



Despejando r y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} \;\rightarrow\; r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(7{,}70 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 6{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}$$

b) Ahora tenemos que, en la segunda órbita, r_2, el radio es el doble, $r_2 = 2 \cdot r_1$; luego:

- En la primera órbita:

$$v_1^2 = \frac{G \cdot M_T}{r_1}$$

- En la segunda órbita:

$$v_2^2 = \frac{G \cdot M_T}{r_2}$$

Por tanto:

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{G \cdot M_T/r_2}{G \cdot M_T/r_1} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{r_1}{2 \cdot r_1} = \frac{1}{2} \rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_1$$

Al sustituir datos numéricos, se obtiene:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7\,700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5\,445 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Como la energía mecánica, E_m, es la suma de las energías potencial y cinética, será:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Por tanto, la energía suplementaria que hay que comunicarle al satélite para que cambia de órbita será la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas; es decir:

$$\Delta E_m = E_m \text{ (2.ª órbita)} - E_m \text{ (1.ª órbita)}$$

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_1} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Pero $r_2 = 2 \cdot r_1$; luego:

$$\Delta E_m = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2 \cdot r_1}\right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{4 \cdot r_1}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$\Delta E_m = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 500 \text{ kg}}{4 \cdot 6{,}73 \cdot 10^6 \text{ m}} = 7{,}41 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Un módulo lunar de 3 000 kg de masa está en órbita circular a una altura de 2 000 km por encima de la superficie de la Luna:

a) ¿Cuál es la velocidad y la energía total del módulo en su órbita?

b) ¿Cuánto variará la energía total si el módulo sube a una órbita circular de 4 000 km sobre la superficie de la Luna?

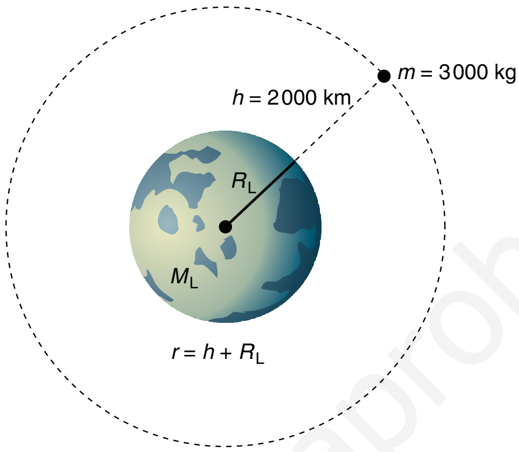
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{Luna} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; $R_{Luna} = 1\,740$ km.

a) Si describe un movimiento circular, el módulo lunar está sometido a una fuerza centrípeta que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_L}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_L}{r}}$$

Teniendo en cuenta que r = 1 740 km + 2 000 km = 3 740 km, al sustituir datos, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{3740 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 1145{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$



La energía total será la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E_m = E_c + E_p \rightarrow E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r}\right)$$

Y como:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_L}{r}$$

Resulta:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_L}{r} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r}$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 3\,000\ \text{kg}}{3\,740 \cdot 10^3\ \text{m}} = -1{,}97 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Como la energía mecánica vale:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r}$$

Al pasar el módulo lunar de una órbita de radio r_1 = 2 000 km + 1 740 km = 3 740 km a otra de radio r_2 = 1 740 km + 4 000 km = 5 740 km, la variación de energía será:

$$\Delta E_m = E_m(r_2) - E_m(r_1) \rightarrow \Delta E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_L \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 3\,000\ \text{kg}}{10^3\ \text{m}} \cdot \left(\frac{1}{3\,740} - \frac{1}{5\,740}\right)$$

$$\Delta E_m = 6{,}86 \cdot 10^8\ \text{J}$$

El signo positivo nos indica que la energía del módulo lunar ha aumentado, hecho que ocurre a medida que el cuerpo se aleja del origen del campo gravitatorio.

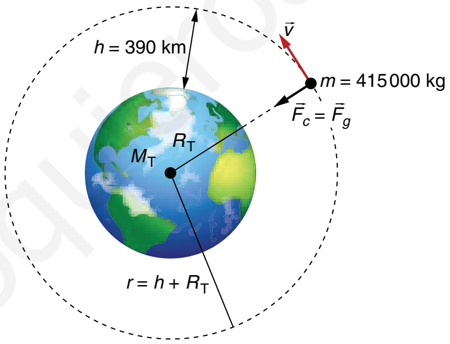
La Estación Espacial Internacional (ISS) describe una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa m = 415 toneladas:

a) Calcula su período de rotación, en minutos, así como la velocidad con la que se desplaza.

b) ¿Qué energía se necesitaría para llevarla desde su órbita actual a otra al doble de altura? ¿Cuál sería el período de rotación en esta nueva órbita?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.

a) La órbita circular que describe la ISS es debido a la existencia de una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:



$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(390 + 6\,370) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7\,681{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período de rotación, T, es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa a la Tierra en esa órbita. Como el módulo de su velocidad es constante, será:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 390) \cdot 10^3\ \text{m}}{7\,681{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 5\,530\ \text{s} = 92{,}17\ \text{min}$$

b) Si ahora la altura sobre la superficie de la Tierra es el doble, tendremos que:

$$r = 6\,370\ \text{km} + 2 \cdot 390\ \text{km} = 7\,150\ \text{km}$$

Su velocidad será:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{7\,150 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7\,469\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

y el período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7\,150 \cdot 10^3\ \text{m}}{7\,469\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 6\,015\ \text{s}$$

NOTA: A este mismo valor podemos llegar aplicando la tercera ley de Kepler.

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. Se puede calcular a partir de la expresión:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, la energía necesaria para llevar la ISS a la nueva órbita sería:

$$\Delta E_m = E_m(r_2) - E_m(r_1) = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sustituyendo datos numéricos (r_1 = 6 760 km; r_2 = 7 150 km):

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 415 \cdot 10^3\ \text{kg}}{10^3\ \text{m}} \cdot \left(\frac{1}{6\,760} - \frac{1}{7\,150}\right)$$

$$\Delta E_m = 6{,}68 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

Un satélite artificial de 500 kg de masa se mueve alrededor de un planeta, describiendo una órbita circular con un período de 42,47 horas y un radio de 419 000 km. Calcula:

a) La fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite.

b) La energía cinética, la energía potencial y la energía total del satélite en su órbita.

c) Si, por cualquier causa, el satélite duplica repentinamente su velocidad sin cambiar la dirección, ¿se alejará indefinidamente del planeta?

a) Si el satélite describe una órbita circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria, F_g, luego:

$$F_g = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Por otro lado, el módulo de la velocidad del satélite es constante; entonces:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Por tanto, nos quedará:

$$F_g = m \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

$$F_g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 500\ \text{kg} \cdot 419\,000 \cdot 10^3\ \text{m}}{(42{,}47 \cdot 3\,600\ \text{s})^2} = 353{,}8\ \text{N}$$

b) La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\, m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} \;\rightarrow\; E_c = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r^2}{T^2}$$

$$E_c = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 500 \text{ kg} \cdot (419\,000 \cdot 10^3 \text{ m})^2}{(42{,}47 \cdot 3\,600 \text{ s})^2} = 7{,}41 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

y la energía potencial:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_P \cdot m}{r}$$

Como no tenemos datos de G y de M_P (la masa del planeta) y sabemos que la velocidad orbital es:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_P}{r} \;\rightarrow\; G \cdot M_P = v^2 \cdot r$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} E_p = -\dfrac{v^2 \cdot r \cdot m}{r} = -v^2 \cdot m \\[2ex] E_c = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\rightarrow\; m \cdot v^2 = 2 \cdot E_c \end{array}\right\} \rightarrow E_p = -2 \cdot E_c$$

El valor de la energía potencial es, entonces:

$$E_p = -2 \cdot 7{,}41 \cdot 10^{10} \text{ J} = -14{,}82 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía total será la suma de las energías cinética y potencial, luego:

$$E_m = 7{,}41 \cdot 10^{10} \text{ J} + (-14{,}82 \cdot 10^{10} \text{ J}) = -7{,}41 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

NOTA. Este resultado ya lo hemos visto en otros problemas: la energía total es la mitad del valor de la energía potencial gravitatoria.

c) Como acabamos de ver, en la órbita circular se cumple la siguiente relación entre las energías cinética y potencial del satélite:

$$E_p = -2 \cdot E_c$$

Si el satélite duplica súbitamente su velocidad, la energía potencial gravitatoria se mantiene inicialmente constante, $E'_p = E_p$, pues solo depende de la distancia del satélite al centro del planeta, pero su nueva energía cinética, E'_c, es cuatro veces mayor que la inicial:

$$E'_c = 4 \cdot E_c$$

Por tanto, ahora la energía mecánica del satélite es positiva:

$$E'_m = E'_p + E'_c = -2 \cdot E_c + 4 \cdot E_c = 2 \cdot E_c > 0$$

En consecuencia, el satélite ya no está ligado a la gravedad del planeta, y como la dirección del movimiento, inicialmente tangente a la trayectoria circular de la órbita, no es una trayectoria de colisión con el planeta, el satélite se alejará indefinidamente de él.

La masa de la Luna es de 7,35 · 10²² kg, y la de la Tierra, de 5,98 · 10²⁴ kg. La distancia media de la Tierra a la Luna es de 3,84 · 10⁸ m. Calcula:

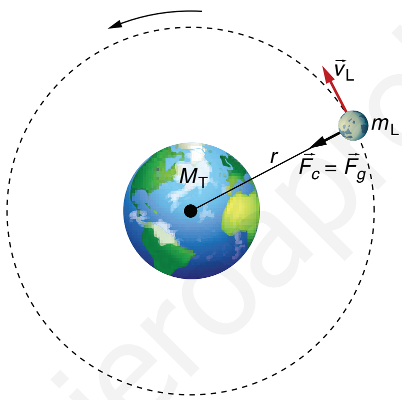
a) El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra y su energía cinética.

b) ¿A qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza neta ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo allí situado?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Si la Luna gira alrededor de la Tierra, está sometida a una fuerza centrípeta que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m_L \cdot \frac{v_L^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{r^2} \rightarrow v_L^2 = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow v_L = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$



Sustituyendo datos numéricos, la velocidad de la Luna resulta:

$$v_L = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}} = 1\,019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

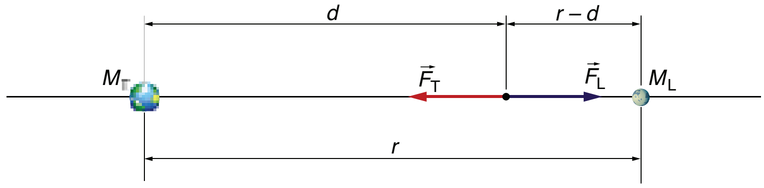
A partir del resultado obtenido y de la siguiente relación, obtenemos el período de giro de la Luna alrededor de la Tierra:

$$v_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}{1\,019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 2{,}367 \cdot 10^6\ \text{s} = 27{,}4\ \text{días}$$

Su energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot (1\,019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 3{,}82 \cdot 10^{28}\ \text{J}$$

b) El siguiente esquema muestra la situación física descrita por el enunciado:



Donde F_T es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo, y F_L, la fuerza de atracción que ejerce la Luna sobre el cuerpo.

En un determinado punto, situado a una distancia d de la Tierra, el módulo de F_T y F_L será igual; por tanto:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(r - d^2)} \rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2$$

Luego:

$$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2 \rightarrow \frac{d}{r - d} = 9{,}02$$

Por tanto:

$$d = 9{,}02 \cdot r - 9{,}02 \cdot d \rightarrow 10{,}02 \cdot d = 9{,}02 \cdot r \rightarrow d = 0{,}9 \cdot r$$

siendo r la distancia que separa la Tierra de la Luna. Por tanto:

$$d = 0{,}9 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m} = 3{,}456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Se lleva un cuerpo, mediante un cohete, hasta una altura de 630 km sobre el nivel del mar:

a) ¿Cuál es la intensidad del campo gravitatorio terrestre a esa altura?

b) ¿Con qué velocidad debería lanzarse este cuerpo (colocado a esa altura) en una dirección perpendicular al radio de la Tierra de tal forma que describiese una órbita circular?

c) ¿Cuál sería el período de revolución del cuerpo alrededor de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) El módulo de la intensidad del campo gravitatorio vale:

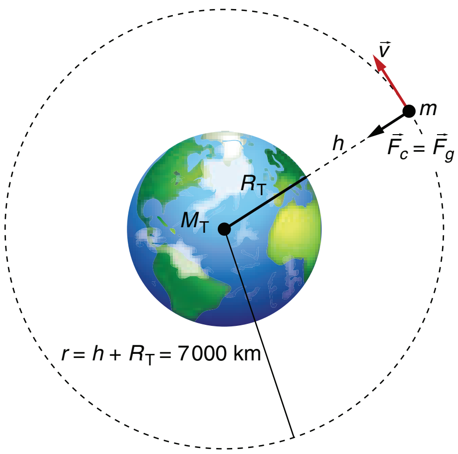
$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

por lo que, al sustituir datos, nos queda:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(7000 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 8{,}14 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La expresión del vector campo gravitatorio será:

$$\vec{g} = -8{,}14 \cdot \vec{u}_r \text{ N/kg}$$



b) Para que describa una órbita circular en ese punto, debe igualarse la fuerza centrípeta con la fuerza de atracción gravitatoria (o el peso). Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \rightarrow v^2 = g \cdot r \rightarrow v = \sqrt{g \cdot r}$$

Sustituyendo datos numéricos (teniendo en cuenta que $r = 6{,}37 \cdot 10^6 + 630 \cdot 10^3 = 7\,000 \cdot 10^3$ m), tenemos:

$$v = \sqrt{8{,}14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 7\,000 \cdot 10^3 \text{ m}} = 7\,548{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Como el cuerpo se mueve en la órbita con velocidad constante (en módulo), tendremos que:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

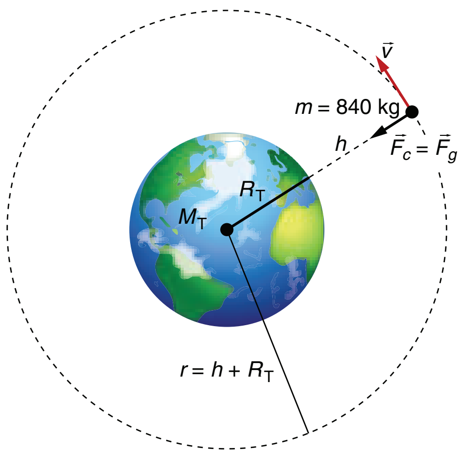
$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}{7548{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 5\,827 \text{ s} = 1 \text{ h } 37 \text{ min } 7 \text{ s}$$

Cada uno de los 24 satélites del sistema de posicionamiento GPS tiene una masa de 840 kg y se encuentra en una órbita circular de 26 570 km de radio. Determina, para uno de estos satélites:

a) Su período de rotación alrededor de la Tierra.

b) Su peso y sus energías cinética y potencial en su órbita.

a) Si el satélite describe una órbita circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:



$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Por otro lado, al desplazarse con velocidad constante (módulo), podemos escribir:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

Sustituyendo el valor de v, nos queda:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}}$$

Sustituyendo datos numéricos, el período de rotación resulta:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (26\,570 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 43\,088 \text{ s} \simeq 12 \text{ h}$$

b) El peso de cada satélite será $P = m \cdot g$, es decir:

$$P = F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Luego:

$$P = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 840\ \text{kg}}{(26\,570 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = 474{,}6\ \text{N}$$

La energía cinética de cada satélite valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 840\ \text{kg} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{26\,570 \cdot 10^3\ \text{m}} = 6{,}30 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Y su energía potencial en esa órbita:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \rightarrow E_p = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 840\ \text{kg}}{26\,570 \cdot 10^3\ \text{m}} =$$

$$= -1{,}26 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Un satélite artificial de 300 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de R = 36 378 km:

a) Calcula la velocidad del satélite en la órbita.

b) Obtén la energía total del satélite en la órbita.

Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}80$ m/s².

a) Si el satélite lleva una trayectoria circular, es porque está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{R}$$

Como no tenemos datos de G y M_T, en un punto de la superficie de la Tierra se cumplirá que:

$$m \cdot g_0 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Luego:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R}}$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{36\,378 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 3\,306{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía del satélite en órbita será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E_m = E_c + E_p \rightarrow E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(- \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R}\right)$$

Es decir:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{R}$$

pero como:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R}$$

Resulta:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{R}$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot 300 \text{ kg}}{36\,378 \cdot 10^3 \text{ m}} = -1{,}64 \cdot 10^9 \text{ J}$$