MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Llamamos *movimiento rectilíneo uniforme MRU* a aquel MR cuya velocidad (en x) es constante no nula a lo largo del tiempo:

$$\boxed{MRU = MR + [v_x = cte \neq 0]}$$

Por las propiedades de la derivada vistas en la sección anterior, las expresiones de la posición, la velocidad (en x) y la aceleración (en x) son:

$$x = x_0 + v_x t$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$$

$$a_x = 0 = cte$$

Demostración de las ecuaciones del MRU. Vamos a probar a partir de la expresión de la posición en función del tiempo de un MRU $x_0 + v_x t$ y de la definición de velocidad y de aceleración las demás expresiones. Recordar que en un MRU $v_x = cte$.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (x_0 + v_x t)' = 0 + v_x \cdot 1 = v_x = cte.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (v_x)' = (cte)' = 0.$$

Sabemos por lo visto sobre las propiedades de las derivadas que como $v_x = cte$, podemos cambiar $v_x = \frac{dx}{dt}$ por $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. No obstante, vamos a probarlo.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(x_0 + v_x t_f) - (x_0 + v_x t_i)}{t_f - t_i} = \frac{x_0 + v_x t_f - x_0 - v_x t_i}{t_f - t_i} =$$

$$= \frac{v_x t_f - v_x t_i}{t_f - t_i} = \frac{v_x (t_f - t_i)}{t_f - t_i} = v_x. \blacksquare$$

Observar que un MRU está totalmente determinado si conocemos su posición inicial x_0 y su velocidad (en x) v_x constante.

Ejemplo. En un MR la posición inicial se encuentra a 4 m a la derecha del origen y la velocidad es constante de 3 m/s en sentido hacia la izquierda. ¿Cuál es la expresión de la posición en función del tiempo? Comprobar a partir de dicha expresión y de la definición de velocidad que, efectivamente, la posición inicial y la velocidad son las del enunciado.

Solución. Suponemos positivo el eje x hacia la derecha (como es habitual). Como es un movimiento rectilíneo de velocidad constante, estamos ante un MRU. Como inicialmente está a la derecha del origen: $x_0 = +4$ m. Como se mueve hacia la izquierda: $v_x = -3$ m/s. Así: $x = 4 - 3t$ (SI). Ahora haremos las comprobaciones.

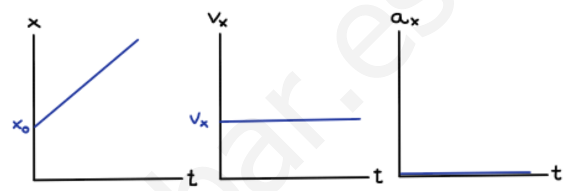
$v_x = \frac{dx}{dt} = (4 - 3t)' = 0 - 3 \cdot 1 = -3$ m/s = cte

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-3)' = 0$ m/s^2 = cte (esto no lo piden).

$x_0 = x(0s) = 4 - 3 \cdot 0 = 4$ m.

Notar que si en un MR $v_x = cte = 0$, entonces, en realidad, la partícula está en reposo.

Veamos las *gráficas de un MRU*. Es fácil comprobar que en un MRU la gráfica $x = x(t)$ es una recta de pendiente la velocidad, la gráfica $v_x = v_x(t)$ es una horizontal de valor la velocidad y la gráfica $a_x = a_x(t)$ es la horizontal nula.



Como en un MRU nunca hay cambio en el sentido de movimiento, también se verifican:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = cte$$

$$a_\tau = 0 = cte$$

Estrategias para problemas de MRU. En un MRU:

- Los parámetros del MRU son x_0 y v_x. Conocidos estos podemos hallar cualquier cosa de ese MRU.
- Si inicialmente está en la parte positiva del eje x, entonces x_0 es positiva. Etcétera.
- Si se mueve en sentido positivo del eje x, entonces v_x es positiva. Si se mueve en sentido contrario al eje x, entonces v_x es negativa. En cualquier caso, la celeridad v es positiva.
- En un MRU la aceleración (en x) y la aceleración tangencial son nulas.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Llamamos *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado MRUA* a aquel MR cuya aceleración (en x) es constante no nula a lo largo del tiempo:

$$\boxed{MRUA = MR + [a_x = cte \neq 0]}$$

Por las propiedades de la derivada vistas en la sección anterior, las expresiones de la posición, la velocidad (en x) y la aceleración (en x) son:

$$\boxed{\begin{gathered} x = x_0 + v_{x,0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x = v_{x,0} + a_x t \\ a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = cte \\ v_x^2 - v_{x,0}^2 = 2a_x(x - x_0) \end{gathered}}$$

Demostración de las ecuaciones del MRUA. Vamos a probar a partir de la expresión de la posición en función del tiempo de un MRUA $x = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ y de la definición de velocidad y de aceleración las demás expresiones. Recordar que en un MRUA $a_x = cte$.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(x_0 + v_{x,0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2\right)' =$$
$$= 0 + v_{x,0} \cdot 1 + \tfrac{1}{2}a_x 2t = v_{x,0} + a_x t.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(v_{x,0} + a_x t\right)' = 0 + a_x \cdot 1 = a_x = cte.$$

Como $a_x = cte$, ya sabemos que podemos cambiar $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ por $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$.

La última expresión es más tediosa. De la ecuación de la velocidad instantánea obtenemos $t = \frac{v_x - v_{x,0}}{a_x}$. Sustituyendo t de esta expresión en la posición instantánea:

$$x - x_0 = v_{x,0}\left(\frac{v_x - v_{x,0}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{x,0}}{a_x}\right)^2 =$$
$$= \frac{v_{x,0}(v_x - v_{x,0})}{a_x} + \frac{a_x(v_x - v_{x,0})^2}{2a_x^2} =$$
$$= \frac{2v_{x,0}(v_x - v_{x,0}) + (v_x - v_{x,0})^2}{2a_x} = \cdots = \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{2a_x}$$

Luego $x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{2a_x}$.

Así, $v_x^2 - v_{x,0}^2 = 2a_x(x - x_0)$ ■

Observar que un MRUA está totalmente determinado si conocemos su posición inicial x_0, su velocidad inicial $v_{x,0}$ y su aceleración a_x constante.

Ejemplo. En un MR la posición inicial se encuentra a 4 m a la derecha del origen, la velocidad inicial es de 3 m/s en sentido hacia la izquierda y la aceleración es constante de 5 m/s² hacia la derecha. ¿Cuál es la expresión de la posición en función del tiempo? Comprobar a partir de dicha expresión y de la definición de velocidad y de aceleración que, efectivamente, la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración son las del enunciado.

Solución. Suponemos positivo el eje x hacia la derecha (como es habitual). Como es un movimiento rectilíneo de aceleración constante, estamos ante un MRUA. Como inicialmente está a la derecha del origen: $x_0 = +4$ m. Como inicialmente se mueve hacia la izquierda: $v_{x,0} = -3$ m/s. Como la aceleración es hacia la derecha: $a_x = +5$ m/s². Así:

$x = 4 - 3t + 2{,}5t^2$ (SI).

Ahora haremos las comprobaciones.

$v_x = \frac{dx}{dt} = (4 - 3t + 2{,}5t^2)' = 0 - 3 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 2t =$
$= -3 + 5t$ (SI).

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-3 + 5t)' = 0 + 5 \cdot 1 = 5$ m/s² = cte

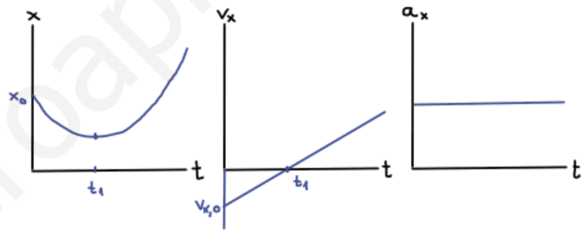
$x_0 = x(0s) = 4 - 3 \cdot 0 + 2{,}5 \cdot 0^2 = 4$ m.

$v_{x,0} = v_x(0s) = -3 + 5 \cdot 0 = -3$ m/s.

Notar que si en un MR $a_x = cte = 0$, entonces estamos ante un MRU (si $v_{x,0} \neq 0$) o la partícula está en reposo (si $v_{x,0} = 0$).

Veamos las *gráficas de un MRUA*. Es fácil comprobar que en un MRUA:

- La gráfica $x = x(t)$ es una parábola. Hacia arriba si $a_x > 0$, o hacia abajo si $a_x < 0$. Corta con el eje vertical en x_0.
- La gráfica $v_x = v_x(t)$ es una recta de pendiente la aceleración constante a_x y corta con el eje vertical en $v_{x,0}$.
- La gráfica $a_x = a_x(t)$ es una horizontal de valor la aceleración.



Desde que se inicie el movimiento hasta que éste no cambie de sentido también se verificarán:

$$\boxed{\begin{gathered} s = v_0 t + \tfrac{1}{2}a_\tau t^2 \\ v = v_0 + a_\tau t \\ a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = cte \\ v^2 - v_0^2 = 2a_\tau s \end{gathered}}$$

Estrategias para problemas de MRUA. En un MRUA:

- Los parámetros del MRUA son x_0, $v_{x,0}$ y a_x. Conocidos estos podemos hallar cualquier cosa del MRUA en cuestión.
- Si inicialmente está en la parte positiva del eje x, entonces x_0 es positiva. Etcétera.
- Si inicialmente se mueve en sentido positivo del eje x, entonces $v_{x,0}$ es positiva. Si inicialmente se mueve en sentido contrario al eje x, entonces $v_{x,0}$ es negativa. Si inicialmente está parada, entonces $v_{x,0} = 0$. En cualquier caso, la celeridad v nunca es negativa.

- Si inicialmente aumenta la rapidez del movimiento, entonces a_x tiene el mismo signo que $v_{x,0}$, y a_τ es positiva. Si inicialmente frena, entonces a_x tiene el signo contrario que $v_{x,0}$, y a_τ es negativa.

MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE

Movimiento de caída libre. Llamamos *movimiento rectilíneo de tiro vertical* o *caída libre* al movimiento que poseería una partícula cuando se deja caer o se lanza con una velocidad inicial en dirección vertical (hacia arriba o hacia abajo) en el vacío. Se observa que en caída libre todas las partículas sufren la misma aceleración constante independientemente de su masa. Esta aceleración constante es vertical, hacia abajo y de valor absoluto g = 9,8 m/s².

Tomando el eje y vertical y hacia arriba, se tiene que el movimiento de caída libre es un MRUA donde
$$a_y = -g = -9{,}8\frac{m}{s^2} = cte$$

Las expresiones de la posición, la velocidad (en y) y la aceleración (en y) son:

$$y = y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_y = v_{y,0} - gt$$
$$a_y = -g = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = cte$$
$$v_y^2 - v_{y,0}^2 = -2g(y - y_0)$$

Como vemos, un movimiento de tiro vertical está totalmente determinado si conocemos su altura inicial y_0 y su velocidad inicial (en y) $v_{y,0}$, puesto que su aceleración (en y) siempre es $a_y = -g = cte$.

Estrategias para problemas de MR de tiro vertical.

- De una caída libre podemos hallar cualquier cosa conociendo dos parámetros: y_0, $v_{y,0}$.
- El instante en el que la partícula toca el suelo t_s es el que verifica que la altura de la partícula se anula:

$$y_s = 0 \rightarrow y_0 + v_{y,0}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = 0$$

  En el caso de que haya dos soluciones, nos quedaremos con la positiva.

- Si lanzamos la partícula hacia arriba ($v_{y,0} > 0$), entonces el instante de tiempo t_h en el que la partícula tiene *altura máxima* verifica que la componente vertical de la velocidad es nula:

$$v_{y,h} = 0 \rightarrow v_{y,0} - gt_h = 0$$

  En efecto, mientras la partícula sube su velocidad será positiva; mientras la partícula baja su velocidad será negativa. Por tanto, en el punto más alto, la velocidad debe ser nula.

  La distancia total recorrida por la partícula desde que la lanzamos hacia arriba hasta que llega al suelo habrá que calcularla en dos tramos: el tramo hacia arriba y el tramo hacia abajo:

$$\Delta s = |y_h - y_0| + |0 - y_h|$$

- Si lanzamos la partícula hacia abajo o la dejamos caer ($v_{y,0} \leq 0$), entonces el instante de tiempo t_h en el que la partícula tiene *altura máxima* es el instante inicial, puesto que siempre se moverá hacia abajo.

  La distancia total recorrida por la partícula desde que la lanzamos hasta que llega al suelo será e valor absoluto del desplazamiento, pues siempre se mueve en el mismo sentido (hacia abajo):

$$\Delta s = |0 - y_0|$$

EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1. El coche *A* presenta una velocidad constante de 90 km/h hacia la derecha. La furgoneta *B* está situada inicialmente a una distancia de 8 km del coche A y a la derecha del mismo, y se mueve con velocidad constante de 72 km/h hacia la izquierda. ¿Dónde y cuándo se encuentran si…?

a) *A* y *B* salen a la vez.

b) *A* sale minuto y medio después de *B*.

c) ¿Cuánto tiempo tendría que salir *A* más tarde que *B* para que se encuentren en el punto medio?

Solución

a)

Tenemos que ambos vehículos presentan MRU: $x_0^A = 0m;\ \ x_0^B = 8000m;$

$v_{x,0}^A = 90\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 25\frac{m}{s};$

$v_{x,0}^B = -72\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = -20\frac{m}{s}.$

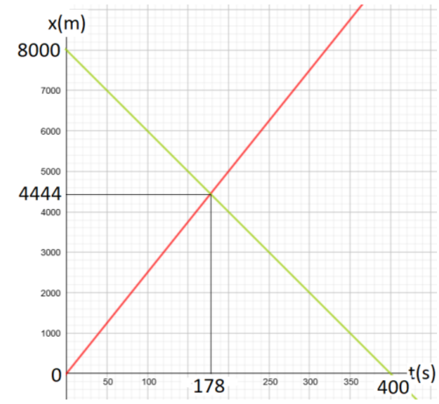
$x^A = x_0^A + v_{x,0}^A\cdot t \Rightarrow x^A = 0 + 25t$ (SI);

$x^B = x_0^B + v_{x,0}^B\cdot t \Rightarrow x^B = 8000 - 20t$ (SI).

Llamo t_1 al instante donde se encuentran.

$x_1^A = x_1^B \Rightarrow 25t_1 = 8000 - 20t_1 \Rightarrow t_1 = \mathbf{177{,}78\ s}$ **después de que salgan**.

$x_1^A = 25 \cdot 177{,}78 = \mathbf{4444{,}44\ m}$ **de distancia del *A* inicial**.



b)

En este caso, *A* sale en $t_2 = 90s$. Luego:

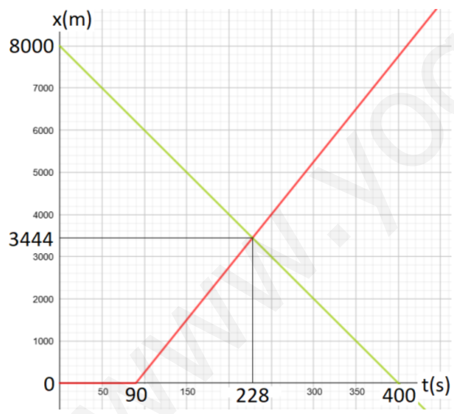
$$x^A = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 90 \\ 25(t-90) & t > 90 \end{cases} \quad (SI)$$

$x^B = 8000 - 20t$ (SI).

Como $x_2^A = 0m$ y $x_2^B = 8000 - 20 \cdot 90 = 6200m$ se encontrarán después de los 90s. Llamo t_3 al instante en que se encuentran.

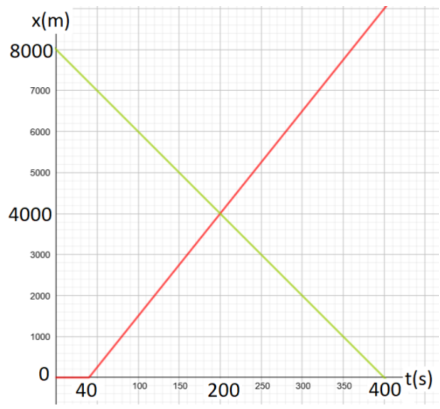
$x_3^A = x_3^B \Rightarrow 25(t_3 - 90) = 8000 - 20t_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_3 = \mathbf{227{,}78\ s}$ **después de que salga *B***.

$x_3^A = 25(227{,}78 - 90) = \mathbf{3444{,}44\ m}$ **de distancia del *A* inicial**.



c)

A viaja más rápido que *B*. Si se encuentran en el punto medio ambos deben recorrer 4000m. El tiempo que tarda *A* en recorrer 4000 m es $\frac{4000}{25} = 160s$. *B* tarda $\frac{4000}{20} = 200s$. Luego *B* tarda $200 - 160 = 40s$ más que *A*. Luego ***A* saldrá 40 s después de *B***.



Ejemplo 2. Una partícula con MR posee una velocidad inicial de 72 km/h y frena uniformemente a razón de 18 km/h cada segundo hasta que para por completo. Se pide:

a) Posición, velocidad y aceleración instantáneas.
b) Tiempo que tarda en parar por completo, desplazamiento y distancia recorrida hasta entonces.

Solución

a)

Como frena uniformemente estamos ante un MRUA. Tomaremos como origen del eje x la posición inicial de la partícula, esto es, $x_0 = 0m$. Tomamos como sentido positivo del eje x el de la velocidad inicial: $v_{x,0} = +72\,km/h = +20m/s$.

Como frena, el signo de la aceleración debe ser el contrario al de la velocidad, luego será negativa:

$$a_x = -18\frac{km/h}{s} = -18\frac{km}{h \cdot s} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = = -5m/s^2.$$

$x = \mathbf{20t - 2{,}5t^2}$ **(SI)**.
$v_x = \mathbf{20 - 5t}$ **(SI)**.
$a_x = \mathbf{-5m/s^2}$.

b)

Llamo t_1 al instante en que para por completo, luego $v_{x,1} = 0$.

$20 - 5t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \mathbf{4\ s}$.

$\Delta x = x_1 - x_0 = 40 - 0 = \mathbf{+40\ m}$.

En todo el movimiento no hay cambio de sentido del movimiento luego:

$x_1 = 20 \cdot 4 - 2{,}5 \cdot 4^2 = 40m$.
$\Delta s = |\Delta x| = |x_1 - x_0| = |40 - 0| = \mathbf{40\ m}$.

Ejemplo 3. De un MRUA sabemos que la posición inicial es $x_0 = +5m$ y la velocidad inicial $v_{x,0} = -12m/s$. Cuando la partícula se encuentra en la posición $+21m$ su velocidad es $+20m/s$. Se pide:

a) Posición instantánea y velocidad instantánea de la partícula.
b) Desplazamiento y distancia recorrida desde la posición inicial hasta la posición $+21m$.

Solución

a)

De los tres parámetros de un MRUA (x_0, $v_{x,0}$, a_x) solo desconocemos a_x; luego debemos hallarla. Llamo t_1 al instante en que $x_1 = +21m$ y $v_{x,1} = +20m/s$.

$$v_{x,1}^2 - v_{x,0}^2 = 2a_x(x_1 - x_0) \Rightarrow a_x = \frac{v_{x,1}^2 - v_{x,0}^2}{2(x_1 - x_0)}$$

$$a_x = \frac{v_{x,1}^2 - v_{x,0}^2}{2(x_1 - x_0)} = \frac{20^2 - (-12)^2}{2 \cdot (21-5)} = 8\frac{m}{s^2}.$$

$\boldsymbol{x = 5 - 12t + 4t^2}$ **(SI)**; $\quad \boldsymbol{v_x = -12 + 8t}$ **(SI)**.

b)

$\Delta x = x_1 - x_0 = 21 - 5 = \boldsymbol{+16\ m}$.

Para calcular la distancia recorrida debemos saber si la partícula cambia de sentido de movimiento. En t_0 la velocidad es negativa y en el instante t_1 la velocidad es positiva, luego entre t_0 y t_1 hay, al menos, un cambio de sentido de movimiento. Los instantes con cambio de sentido verifican que su velocidad se anula. Llamo t_2 a dicho instante. Notar que $t_0 < t_2 < t_1$.

$-12 + 8t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 1{,}5s$.

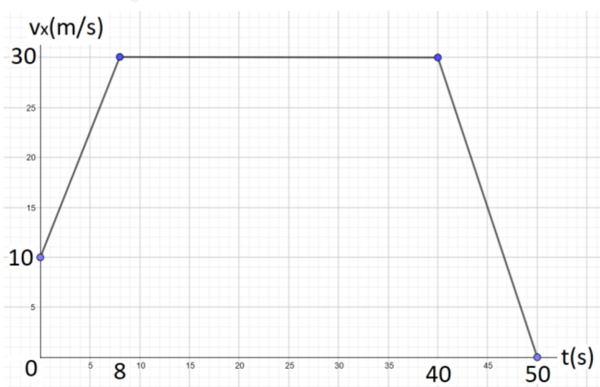
$x_2 = 5 - 12 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 1{,}5^2 = -4m$.

$\Delta s = |x_2 - x_0| + |x_1 - x_2| =$

$\quad = |-4 - 5| + |21 - (-4)| = 9 + 25 = \boldsymbol{34\ m}$.

Ejemplo 4*. Presentamos la gráfica $v_x = v_x(t)$ de un MR desde los $0s$ hasta que para por completo, cuya posición inicial es $-6m$. Se pide:

a) Expresión de la posición instantánea.
b) Distancia total recorrida.



Solución

a)

En este movimiento tenemos cuatro tramos.

Tramo I: MRUA desde $t_0 = 0s$ a $t_1 = 8s$.
Necesitamos (x_0, $v_{x,0}$, a_x^I):

$x_0 = -6m$; $v_{x,0} = +10m/s$.

$a_x^I = \frac{\Delta v_x^I}{\Delta t^I} = \frac{v_{x,1} - v_{x,0}}{t_1 - t_0} = \frac{30-10}{8-0} = +2{,}5m/s^2$.

$x = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x^I t^2 = -6 + 10t + 1{,}25t^2$ (SI)

Tramo II: MRU desde $t_1 = 8s$ a $t_2 = 40s$.
Necesitamos (x_1, v_x^{II}):

$x_1 = -6 + 10t_1 + 1{,}25t_1^2 = +154m$.

$v_x^{II} = v_{x,1} = +30m/s$.

$x = x_1 + v_x^{II}(t - t_1) = 154 + 30(t - 8)$ (SI).

Tramo III: MRUA desde $t_2 = 40s$ a $t_3 = 50s$.
Necesitamos (x_2, $v_{x,2}$, a_x^{III}):

$x_2 = 154 + 30(t_2 - 8) = +1114m$;

$v_{x,2} = +30m/s$.

$a_x^{III} = \frac{\Delta v_x^{III}}{\Delta t^{III}} = \frac{v_{x,3} - v_{x,2}}{t_3 - t_2} = \frac{0-30}{50-40} = -3m/s^2$.

$x = x_2 + v_{x,2}(t - t_2) + \frac{1}{2}a_x^{III}(t - t_2)^2 =$

$\quad = 1114 + 30(t - 40) - 1{,}5(t - 40)^2$ (SI).

Tramo IV: Reposo desde $t_3 = 50s$ en adelante.
Necesitamos (x_3):

$x = x_3 = 1114 + 30(50 - 40) - 1{,}5(50 - 40)^2$
$= +1264m$.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} -6 + 10t + 1{,}25t^2, & 0 \le t \le 8 \\ 154 + 30(t - 8), & 8 < t \le 40 \\ 1114+30(t-40)-1{,}5(t-40)^2 & 40 < t \le 50 \\ 1264, & 50 < t \end{array} \right\}$$

en el SI.

b)

Como la velocidad v_x no cambia de signo, entonces la partícula no cambia de sentido de movimiento, por lo que la distancia recorrida es igual al valor absoluto del desplazamiento:

$\Delta s = |\Delta x| = |x_3 - x_0| = |1264 - (-6)| =$

$\quad = |1270| = \boldsymbol{1270\ m}$.

Otra manera de calcular $\Delta x = x_3 - x_0$ sin utilizar el apartado anterior es utilizar la propiedad que nos dice que Δx es el área con signo bajo la gráfica $v_x = v_x(t)$. El área total se puede descomponer en el área de un trapecio, de un rectángulo y de un triángulo. Como la gráfica siempre está en la parte positiva del eje vertical, estas áreas serán positivas. Así:

$$\Delta x = \frac{v_{x,1}+v_{x,0}}{2}(t_1\text{-}t_0) + v_1(t_2\text{-}t_1) + \frac{1}{2}v_{x,1}(t_3\text{-}t_2) =$$
$$= \frac{30+10}{2}(8\text{-}0) + 30(40\text{-}8) + \frac{1}{2}30(50\text{-}40) =$$
$$= \mathbf{+1270\ m}.$$

Ejemplo 5. Desde una altura de 30 m se lanza una pelota a 144 km/h. Se pide:

a) Altura máxima que alcanza la pelota, instante en que alcanza el suelo y distancia total recorrida si se lanza hacia arriba.
b) Altura máxima que alcanza la pelota, instante en que alcanza el suelo y distancia total recorrida si se lanza hacia abajo.

Solución

a)

La altura inicial es $y_0 = 30m$ y, por lanzarse hacia arriba, la velocidad inicial es:

$v_{y,0} = +144\frac{km}{h} = +40m/s.$

Así, las expresiones de la posición y de la velocidad quedan:

$y = 30 + 40t - 4{,}9t^2$ (SI)

$v_y = 40 - 9{,}8t$ (SI)

Por ser lanzada hacia arriba, el instante t_h en el que se alcanza la altura máxima es aquel en el que se anula la velocidad:

$v_{y,h} = 0 \rightarrow 40 - 9{,}8t_h = 0 \rightarrow t_h = \frac{40}{9{,}8} = 4{,}08s.$

$y_h = 30 + 40 \cdot 4{,}08 - 4{,}9 \cdot 4{,}08^2 = \mathbf{173{,}21\ m}.$

El instante en que alcanza el suelo t_s es aquel en el que se anula la altura:

$$y_s = 0 \rightarrow 30 + 40t_s - 4{,}9t_s^2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow -4{,}9t_s^2 + 40t_s + 30 = 0 \rightarrow$$
$$t_s = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 30}}{2 \cdot (-4{,}9)} =$$
$$= \frac{-40 \pm 46{,}78}{-9{,}8} = \begin{cases} -0{,}69 \\ 8{,}86 \end{cases} = \mathbf{8{,}86\ s}.$$

Como hemos lanzado hacia arriba, habrá cambio de sentido de movimiento, por lo que la distancia recorrida hay que calcularla en dos tramos: desde el principio hasta la altura máxima y desde la altura máxima hasta el final.

$$\Delta s = |y_h - y_0| + |0 - y_h| =$$
$$= |173{,}21 - 30| + |0 - 173{,}21| =$$
$$= 143{,}21 + 173{,}21 = \mathbf{316{,}42\ m}.$$

b)

La altura inicial es $y_0 = 30m$ y, por lanzarse hacia abajo, la velocidad inicial es:

$v_{y,0} = -40\ m/s.$

Así, las expresiones de la posición y de la velocidad quedan:

$y = 30 - 40t - 4{,}9t^2$ (SI)

$v_y = -40 - 9{,}8t$ (SI)

Por ser lanzada hacia abajo, la altura máxima es la altura inicial **30 m**.

El instante en que alcanza el suelo t_s (el t_s del apartado *b* es distinto que el del apartado *a*) es aquel en el que se anula la altura:

$$y_s = 0 \rightarrow 30 - 40t_s - 4{,}9t_s^2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow -4{,}9t_s^2 - 40t_s + 30 = 0 \rightarrow$$
$$t_s = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 30}}{2 \cdot (-4{,}9)} =$$
$$= \frac{40 \pm 46{,}78}{-9{,}8} = \begin{cases} -8{,}86 \\ 0{,}69 \end{cases} = \mathbf{0{,}69\ s}.$$

Como hemos lanzado hacia abajo, no habrá cambio de sentido de movimiento, por lo que la distancia recorrida se calcula en un único tramo desde el principio hasta el final:

$\Delta s = |0 - y_0| = |0 - 30| = \mathbf{30\ m}.$

Ejemplo 6. Desde una altura desconocida se deja caer una pelota. Cuando la pelota se encuentra a 25 m de altura su celeridad es de 15 m/s. ¿Desde qué altura se soltó la pelota?

Solución

Como nos dice que se deja caer, su velocidad inicial es nula: $v_{y,0} = 0\ m/s.$

Llamamos t_1 al instante en el que $y_1 = 25\ m$ y $v_{y,1} = -15\ m/s$ (la velocidad con signo es negativa ya que se mueve hacia abajo). Usaremos la expresión:

$$v_{y,1}^2 - v_{y,0}^2 = -2g(y_1 - y_0) \rightarrow$$
$$(-15)^2 - 0^2 = -2 \cdot 9{,}8(25 - y_0) \rightarrow$$
$$225 = -19{,}6(25 - y_0) \rightarrow$$
$$y_0 = \frac{225}{19{,}6} + 25 = \mathbf{36{,}48\ m}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. La posición instantánea de un ciclista en una contrarreloj es $x = 42t$ (t en h y x en km). Se pide:

a) Celeridad del ciclista en km/h y en m/s.
b) Tiempo que emplea en recorrer los 38 km de la contrarreloj (en minutos y segundos).
c) Expresar la posición instantánea en el SI.

Sol. a) 42 km/h y 11,67 m/s; b) 54 min y 17 s;
c) x = 11,67t (SI).

2.2. Una partícula sigue un MRU horizontal con una velocidad de 36 km/h hacia la derecha. Inicialmente se encuentra a 7 m del origen, a la izquierda del mismo. Se pide:

a) Posición a los 3 s.
b) Velocidad (en x) a los 3 s.
c) Aceleración (en x) 3 s.
d) Instante en el que pasa por el origen.

Sol. a) 23 m; b) 10 m/s; c) 0 m/s²; d) 0,7s.

2.3. Una partícula se desplaza ascendiendo por una rampa a velocidad constante. Entre los instantes 20 s y 1 min recorre medio kilómetro. Sabiendo que en el instante medio minuto se encontraba a 16 m del origen en sentido ascendente, se pide:

a) Posición en el instante 2 min.
b) Velocidad (en x) en el instante 2 min.
c) Aceleración (en x) en el instante 2 min.
d) Instante en el que se encuentra a 2 km del origen.

Sol. a) 1141 m; b) 12,5 m/s; c) 0 m/s²; d) 188,72 s.

2.4. Una partícula sigue un movimiento rectilíneo horizontal con una aceleración constante de 3 m/s^2 hacia la derecha. Inicialmente se mueve a 8 m/s hacia la izquierda. La posición inicial se encuentra a 12 m a la derecha del origen. Se pide:

a) Posición instantánea.
b) Velocidad media (en x) entre los instantes 2 s y 10 s.
c) Aceleración media (en x) entre los instantes 2 s y 10 s.

Sol. a) $x = 12-8t+1{,}5t^2$ (SI); b) 10 m/s; c) 3 m/s².

2.5*. Una partícula que parte con una velocidad inicial de +12 m/s frena uniformemente hasta pararse por completo. Su posición inicial es +4 m. En un determinado instante t_A la posición es +10 m y la velocidad +9 m/s. Se pide:

a) Posición instantánea.
b) Instante t_A.
c) Instante en el que para por completo y su distancia al origen.

Sol. a) $x = 4+12t-2{,}625t^2$ (SI); b) 0,571 s;
c) 2,29 s y 17,71 m.

2.6*. El coche *A* presenta una velocidad inicial de 2 m/s hacia la derecha, con una aceleración constante de 0,8 m/s^2 también hacia la derecha. La furgoneta *B* está situada inicialmente a una distancia de 100 m del coche A y a la derecha del mismo, y se mueve con velocidad constante de 25,2 km/h hacia la izquierda. ¿Dónde y cuándo se encuentran si…?

a) *A* y *B* salen a la vez.
b) *B* sale 8 s después de *A*.
c) *B* sale 15 s después de *A*.
d) ¿Cuánto tiempo tendría que salir *B* más tarde que *A* para que se encuentren en el punto medio?

Sol. a) 8,16 s y 42,91 m; b) 11,475 s y 75,675 m;
c) 13,51 s y 100 m; d) 1,82 s más tarde.

2.7*. Una partícula presenta el siguiente movimiento rectilíneo: inicialmente parte de la posición +5 m, del reposo, acelerando uniformemente a 4 m/s^2 hasta alcanzar la velocidad de 72 km/h. A partir de ahí continúa a 72 km/h durante 2 min, pasados los cuales frena uniformemente a 3 m/s^2 hasta que se para por completo. Se pide:

a) Dibujar las gráficas $v_x = v_x(t)$ y $a_x = a_x(t)$.
b) Distancia total recorrida en su movimiento.
c) Expresión de la posición instantánea.

Sol. b) 2516,7m;
c) En el (SI)

$$x=\begin{cases} 5+2t^2, & 0\le t\le 5 \\ 55+20(t-5), & 5<t\le 125 \\ 2427+20(t-125)-15(t-125)^2, & 125<t\le 131{,}67 \\ 2521{,}7 & 131{,}67 < t \end{cases}$$

2.8*. Desde una altura de 20 m se lanza hacia arriba una pelota a 108 km/h. Se pide:

a) Altura máxima que alcanza la pelota.
b) Instante en que cae al suelo.
c) Distancia total recorrida por la pelota.
d) Repetir el problema si se lanzara hacia abajo.

Sol. a) 65,92 m; b) 6,73 s; c) 111,84 m;
d) 20 m, 0,606 s y 20 m.

2.9*. Dejamos caer sin velocidad inicial una piedra a un pozo. Oímos el impacto de la piedra 4 s después de haberla lanzado. ¿Qué profundidad tiene el pozo? Dato: Velocidad del sonido 340 m/s.

Sol. 70,5m.