José Ramón Franco Brañas

Cálculo I

Cálculo I

J. R. Franco Brañas

Contenido

Prólogo

Este texto trata de ser un puente entre la enseñanza media y la enseñanza universitaria. Nuestra intención al escribir estas páginas fue la de proporcionar al alumno los conocimientos básicos para seguir con aprovechamiento un primer curso de Cálculo en una carrera técnica. Así, este libro va primordialmente dirigido a aquellos alumnos que inician sus estudios universitarios. También puede ser utilizado como libro de texto en un curso de cálculo de una variable en las distintas Escuelas Universitarias de Ingeniería.

Por otra parte, en el texto se presupone el conocimiento de la geometría analítica y la trigonometría.

En cada capítulo, las explicaciones teóricas van acompañadas de ejemplos aclaratorios. Además, se incluyen más de 100 ejemplos y se proponen más de 600 ejercicios, la mitad totalmente resueltos y el resto con sus soluciones, que tratan de aclarar los conceptos teóricos, sin detenerse en posibles casos particulares.

Por último, queremos expresar nuestro agradecimiento a todos los profesores y a todos los estudiantes que nos ayudaron con sus sugerencias y críticas.

José Ramón Franco Brañas

Ponte Aranga, Julio de 2010

Símbolos y expresiones

	α	*alfa*		ν	*nu*
	β	*beta*	Ξ	ξ	*xi*
Γ	γ	*gamma*	O	o	*omicron*
Δ	δ	*delta*	Π	π	*pi*
	ϵ	*epsilon*		ρ	*ro*
	ζ	*dseta*	Σ	σ	*sigma*
	η	*eta*		τ	*tau*
Θ	θ	*theta*	Υ	υ	*ipsilon*
	ι	*iota*	Φ	ϕ	*fi*
	κ	*kappa*		χ	*ji*
Λ	λ	*lambda*	Ψ	ψ	*psi*
	μ	*mu*	Ω	ω	*omega*

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	conjunto de los números racionales positivos
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\Rightarrow$	implicación
$\Leftrightarrow$	doble implicación
$\wedge$	*y* (conjunción lógica)
$\vee$	*o* (disyunción lógica)
$x \in A$	x pertenece al conjunto A
$x \notin A$	x no pertenece al conjunto A
$A \cup B$	unión de los conjuntos A y B
$A \cap B$	intersección de los conjuntos A y B
$/$	tal que
$\exists$	existe
$\forall$	para todo
$A \times B$	producto cartesiano de A por B
$A - B$	diferencia de los conjuntos A y B
$\approx$	aproximadamente
$A \subset B$	A es subconjunto de B
$A \subseteq B$	A es subconjunto o es igual a B
$a < b$	a es menor que b
$a \leq b$	a es menor o igual que b
$\emptyset$	conjunto vacío
$\overline{A}$	complementario del conjunto A
gof	aplicación compuesta de f y g
f^{-1}	aplicación inversa de f

$\lvert\vec{x}\rvert$	módulo del vector $\vec{x}$
$\vec{x}\times\vec{y}$	producto vectorial de $\vec{x}$ por $\vec{y}$
$\vec{x}\cdot\vec{y}$	producto escalar de $\vec{x}$ por $\vec{y}$
$det(A)\ o\ \lvert A\rvert$	determinante de la matriz A
r_α	número complejo de módulo r y argumento α

Capítulo 1

El número real

Un estudio riguroso del número real haría necesaria su construcción formal. Pero, mas que su construcción, lo que interesa son sus propiedades para el posterior desarrollo del Cálculo. Así, a lo largo del siglo XIX se perfilan tres teorías distintas: 1) La axiomática (Weierstrass), 2) empleando sucesiones de Cauchy, 3) mediante cortaduras (Dedekind). Hemos preferido, en cambio, comenzar con una visión intuitiva de $\mathbb{R}$ y presentar una lista de propiedades algebraicas ($\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo), a partir de las que podremos deducir otras propiedades. A continuación presentamos las propiedades de "orden" ($\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado) y, por último, presentamos la propiedad de "completitud" ($\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo). Creemos que la exposición será más asequible haciéndolo de este modo.

1.1 Introducción

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ resulta insuficiente, por ejemplo, para encontrar solución a la ecuación $x + 1 = 0$, ya que -1 no es un número natural. Es necesario, por tanto, ampliar el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales e introducir el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ (que permite resolver ecuaciones de la forma $2x - 3 = 0$).

Proposición 1.1 *El par ($\mathbb{N}$,+) es un semigrupo abeliano* [1].

Demostración. En efecto, el par ($\mathbb{N}$,+) es un semigrupo ya que la operación + es interna y asociativa en $\mathbb{N}$. Además, por ser conmutativa, ($\mathbb{N}$,+) es semigrupo abeliano.$\square$

Proposición 1.2 *El par ($\mathbb{Z}$, $\cdot$) es semigrupo abeliano con elemento neutro.*

[1] Decimos que el par $(A, *)$ es un semigrupo si se verifica:
1. La operación * es interna en A: $x * y \in A,\ \forall x, y \in A$.
2. La operación * es asociativa en A: $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall x, y, z \in A$.

Si la operación * es conmutativa, el semigrupo se llama abeliano o conmutativo.

Proposición 1.3 *El par ($\mathbb{Z}$,+) es grupo abeliano* [2].

Demostración. La operación + es interna y asociativa en $\mathbb{Z}$ y $0 \in \mathbb{Z}$ es el elemento neutro. Además, $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\exists(-x) \in \mathbb{Z}$ / $x+(-x) = (-x)+x = 0$. Por ser conmutativa la operación + en $\mathbb{Z}$, el par $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano. □

Proposición 1.4 *La terna ($\mathbb{Z}$,+, ·) es un anillo conmutativo* [3].

Demostración. En efecto, ya que ($\mathbb{Z}$,+) es grupo abeliano y la operación · es interna, asociativa y distributiva respecto de la operación +. Como existe elemento neutro en $\mathbb{Z}$ para el producto ($1 \in \mathbb{Z}$), decimos que ($\mathbb{Z}$,+, ·) es un anillo con elemento unidad. Por ser la operación · conmutativa, el anillo es conmutativo o abeliano. □

1.2 El conjunto de los números racionales

Sea el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Si consideramos una recta y elegimos en ella un origen O y una determinada unidad de medida para la medición de segmentos, podemos tomar para cada número racional x un segmento de igual longitud, que llevado sobre la recta a partir del origen O hacia la derecha o hacia la izquierda, según que x sea positivo o negativo, se alcanza un punto final p que podemos considerarse como el punto de la recta correspondiente al número racional x. El número racional cero corresponde al origen O. De este modo, a cada número racional x le corresponde un único p de la recta.

Es de la mayor importancia el hecho de que en la recta hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. La recta es infinitamente más rica en puntos que $\mathbb{Q}$ en números.

En efecto, si se consideran dos elementos de $\mathbb{Q}$, por ejemplo, 1/3 y 1/2, al sumarlos y dividirlos por 2, se obtiene el número racional correspondiente, en la recta, al punto medio de ambos:

$$(1/2 + 1/3)/2 = 5/12$$

El número racional $(1/3 + 5/12)/2 = 9/24$ corresponde a su vez al punto medio de 1/3 y 5/12. Si repetimos el proceso indefinidamente, encontramos infinitos números racionales entre 1/3 y 1/2. Podemos concluir que, dados dos números racionales, por próximos que estén, existen infinitos números racionales entre ellos.

---

[2] Se dice que el par $(A, *)$ es un grupo si se verifica:
1. La operación * es interna en A: $x * y \in A$, $\forall x, y \in A$.
2. La operación * es asociativa en A: $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in A$.
3. Existe un elemento neutro e en A: $x * e = e * x = x$, $\forall x \in A$.
4. Existe elemento simétrico $x' \in A$, $\forall x \in A$: $x * x' = x' * x = e$.

Si la operación $*$ es conmutativa, el grupo se llama abeliano o conmutativo.

[3] Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo si se verifica:
1. El par $(A, +)$ es grupo abeliano.
2. La operación · es interna en A: $x \cdot y \in A$, $\forall x, y \in A$.
3. La operación · es asociativa en A: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall x, y, z \in A$.
4. La operación · es distributiva respecto a +: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall x, y, z \in A$.

Si la operación · es conmutativa, el anillo se llama abeliano o conmutativo.

Podríamos pensar, a la vista de lo anterior, que los números racionales recubren completamente la recta numérica. Esto no es cierto, como nos muestra el teorema siguiente.

Teorema 1.1 $\sqrt{2}$ *no es un número racional.*

Demostración. Para demostrarlo, se supone que $\sqrt{2}$ *es racional:* $\exists\ a/b \in \mathbb{Q} \,/\, \sqrt{2} = a/b$, *siendo* a/b *una fracción irreducible, esto es,* a *y* b *son primos entre sí. Elevando al cuadrado:* $2 = a^2/b^2 \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$. *Por tanto,* a^2 *es par. En consecuencia, también lo es* a *(ver ejercicio resuelto núm. 1.4). Si* a *es par, existe un número natural* m *tal que:* $a = 2m \Rightarrow a^2 = (2m)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2m^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ *par* $\Rightarrow b$ *par. Entonces,* a *y* b *son pares, en contra de la hipótesis de que* a/b *era irreducible.* $\square$

Por tanto, entre los números racionales existe otro tipo de números, a los que se llama *irracionales*, y simbolizamos su conjunto con la letra $\mathbb{I}$.

Por otra parte, es sencillo representar un número racional en la recta numérica. Por ejemplo, el número 2/3 (ver figura 1.1) es fácil situarlo mediante un procedimiento geométrico simple. Trazamos una semirrecta cualquiera con origen en O y tomamos sobre ella tres segmentos de igual longitud OA, AB y BC. Unimos el punto C con el punto correspondiente al 1 en la recta y trazamos una paralela por B, siendo su intersección con la recta numérica el lugar de 2/3.

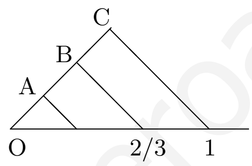

Figura 1.1

Para situar $\sqrt{2}$, se observa que $\sqrt{2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a la unidad (ver figura 1.2).

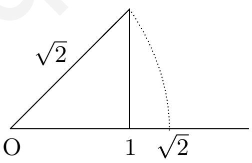

Figura 1.2

Proposición 1.5 $(\mathbb{Q}\,, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo* [4].

[4] Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo si se verifica:
1. El par $(A, +)$ es grupo abeliano, con elemento neutro e.
2. El par $(A - \{e\}, \cdot)$ es grupo.
3. La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall x, y, z \in A$.

Si la operación $\cdot$ es conmutativa, el cuerpo se llama abeliano o conmutativo.

Demostración. En efecto, ya que los pares $(\mathbb{Q},+)$ *y* $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ *son grupos abelianos y la operación* $\cdot$ *es distributiva respecto a la operación* $+$*, como es fácil de comprobar.* $\square$

1.3 Forma decimal de un número racional

Al transformar en decimal un número racional (simplemente efectuando la división entre numerador y denominador), se pueden presentar tres casos:

a) Resulta un número entero: 6/2=3

b) Resulta un decimal finito. Esto ocurre cuando el número racional (¡irreducible!) no tiene en el denominador otros divisores que 2 y 5. Por ejemplo:

$$\frac{3}{2^2\cdot 5^4}=\frac{3\cdot 2^2}{2^4\cdot 5^4}=\frac{3\cdot 2^2}{10^4}=\frac{12}{10^4}=0.0012$$

$$\frac{7}{2^3\cdot 5^2}=\frac{7\cdot 5}{2^3\cdot 5^3}=\frac{35}{10^3}=0.035$$

c) Resulta un decimal periódico. Por ejemplo: $9/7=1.\overline{285714}$, ya que, si se hace la división, llegará un momento en que las distintas cifras del resto se agotarán y, al repetirse, dan lugar a un decimal periódico en el cociente.

Podemos entonces decir que a un número racional le corresponde un decimal periódico, considerando los números decimales exactos como números con período igual a cero:

$$2.837=2.8370000000... \qquad 2=2.0000000....$$

A la inversa, si tenemos un número decimal periódico y queremos escribirlo en la forma de fracción, por ejemplo, $x=2.3\overline{76}$, multiplicamos x por 1000 y por 10

$$1000x=2376.767676...$$
$$10x=23.767676...$$

y restamos ambas igualdades

$$990x=2353$$

obtenemos

$$x=\frac{2353}{990}$$

Observación *Un número de la forma* $n.\overline{9}$ *es igual al número entero* $n+1$*, resultado que apreciamos al hallar su fracción generatriz.*

Ejemplo 1.1 *Sea* $x=2.\overline{9}$*. Entonces, si multiplicamos* x *por 10 y le restamos* x

$$10x=29.999...$$
$$x=2.999...$$
$$9x=27$$
$$x=\frac{27}{9}=3$$

¿Ocurre lo mismo con $2.\overline{8}$*?. Evidentemente, no, ya que* $2.\overline{8}=26/9$*.*

Los números decimales no periódicos son los irracionales. Dentro de ellos distinguimos dos categorías, los números irracionales algebraicos y números irracionales trascendentes.

Números irracionales algebraicos son aquellos que son solución de una ecuación algebraica, es decir, una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio con coeficientes enteros y su segundo miembro es igual a cero. De no existir dicha ecuación, el número irracional recibe el nombre de *transcendente*.

Ejemplo 1.2 *$\sqrt{2}$ es irracional algebraico, ya que $x^2 - 2 = 0$, $x = \sqrt{2}$.*

Por último, la unión de los números racionales e irracionales constituye el llamado conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que recubre completamente la recta numérica:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

1.4 Segmentos conmensurables

Consideremos dos segmentos a y b, tales que $a > b$. Si los comparamos, pueden ocurrir tres cosas:

1. El segmento a contiene un número entero de veces al segmento b.
2. El segmento a contiene un número entero de veces a un divisor de b.

En ambos casos, la relación entre a y b se puede expresar mediante un número racional. Decimos entonces que a y b son segmentos conmensurables.

3. No existe ningún divisor de b contenido un número entero de veces en a. Decimos que a y b son *inconmensurables*.

Ejemplo 1.3 *La diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables, ya que $d = \sqrt{2} \cdot l$, y $\sqrt{2}$ no es racional.*

Ejemplo 1.4 *La longitud de una circunferencia y su radio son inconmensurables, ya que $L = 2\pi r$, y π no es racional.*

1.5 El método de inducción

Si consideramos el polinomio $P(n) = n^2 + n + 41$, debido a Euler, y sus valores numéricos para $n = 0, 1, 2, ...$:

$$P(0) = 41$$

$$P(1) = 43$$

$$P(2) = 47$$

$$P(3) = 53$$

$$P(4) = 61$$

Hemos obtenido números primos. Si sustituimos para n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, obtenemos los números primos 71, 83, 97, 113, 131 y 151, respectivamente. ¿Podemos afirmar que el valor numérico de $P(n)$ es un número primo para todo valor natural de n?. NO. Para $n = 40$,

$$P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40+1) \cdot 41 = 41^2$$

que no es un número primo. El polinomio anterior produce números primos para $n = 0, 1, 2, ..., 39$, pero falla para $n = 40$. Por lo tanto, es inadmisible y peligroso establecer una proposición general para todo valor natural de n, basándonos en proposiciones que hemos encontrado verdaderas para valores particulares de n.

La cuestión es la siguiente: si una proposición se cumple para determinados valores naturales, ¿cómo podremos determinar si es cierta para todo valor natural?.

Para contestar a esta pregunta emplearemos la llamada *inducción completa* o método de inducción, que exponemos a continuación.

Teorema 1.2 *Una proposición se cumple para todo número natural si se verifica:*

a) Dicha proposición es cierta para $n = 1$.

b) Si se supone que la proposición es cierta para un valor natural cualquiera $n = k$, ello implica que es cierta para $n = k + 1$ (efecto dominó).

Observación *Hemos visto, en el ejemplo anterior del polinomio de Euler, el error que podemos cometer al pasar por alto la condición b). El siguiente ejemplo muestra que tampoco podemos obviar la condición a).*

Teorema 1.3 *(teorema "falaz") Todo número natural es igual al número natural que le sigue.*

Demostración. Suponemos que es cierto para $n = k$:

$$k = k + 1 \qquad (1)$$

y queremos probarlo para $n = k + 1$. Es decir, hemos de probar que

$$k + 1 = k + 2 \qquad (2)$$

En efecto, si sumamos 1 a los dos miembros de (1), obtenemos (2). Por tanto, si la proposición es cierta para k, también lo es para $n = k + 1$.

El error estuvo en que consideramos únicamente la condición b) del principio de inducción. □

1.6 Numerabilidad

Definición 1.1 *Decimos que dos conjuntos A y B son conjuntos* coordinables *cuando podemos establecer una aplicación biyectiva entre ellos* [5].

Decimos también que dos conjuntos coordinables tienen la misma *potencia*.

[5] Una aplicación entre dos conjuntos A y B es una correspondencia que asigna a todo elemento del conjunto A un solo elemento del conjunto B. Si en el conjunto A no hay dos elementos que tengan la misma imagen, la aplicación recibe el nombre de aplicación inyectiva. Si todo elemento de B tiene un original en A, la aplicación se llama aplicación sobreyectiva. Una aplicación inyectiva y sobreyectiva recibe el nombre de aplicación biyectiva.

Definición 1.2 *Un conjunto A es finito si es coordinable con $\{1, 2, 3, ..., n\} \in I\!N$ de extremo n, y decimos que n es el número de elementos de A o cardinal de A, card(A)=n.*

Definición 1.3 *A un conjunto no finito, lo denominamos infinito.*

Según las definiciones anteriores, dos conjuntos finitos son coordinables si tienen el mismo número de elementos. En conjuntos infinitos, las cosas son distintas, como veremos a continuación.

Definición 1.4 *Decimos que un conjunto es numerable si es coordinable con $I\!N$ o con un subconjunto de $I\!N$.*

Por ejemplo, el conjunto P de los números naturales pares, es infinito y, además, numerable. En efecto, podemos establecer una aplicación biyectiva entre $I\!N$ y P haciendo corresponder a cada elemento $n \in I\!N$ una imagen $2n \in P$.

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un superconjunto de $I\!N$ y, sin embargo, es numerable. Se puede ver mediante la correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $I\!N$ tal que $\forall x \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \geq 0 \\ -2x - 1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.4 *La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. En efecto, sean los conjuntos numerables

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_{11},\ x_{12}, ..., x_{1n}, ...\} \\ X_2 &= \{x_{21},\ x_{22}, ..., x_{2n}, ...\} \\ X_3 &= \{x_{31},\ x_{32}, ..., x_{3n}, ...\} \\ &.................................... \end{aligned}$$

Podemos numerar la unión de todos ellos, $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, *siguiendo el esquema siguiente*

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & \dots \end{array}$$

....

Esto es,

$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{22}, x_{13}\ , x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, x_{51}, x_{42},\ \ldots\ \Box$

Como consecuencia de este teorema podemos ver que el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable. Para ello, formamos los conjuntos

$$Y_1 = \{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5...\}$$
$$Y_2 = \{2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5...\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cada uno de los conjuntos Y_i es numerable y su unión es $\mathbb{Q}^+$.

1.7 Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$

Dados dos números reales x e y, su suma es un número real, que designamos $x+y$, y su producto es otro número real, que designamos $x \cdot y$, cumpliéndose las propiedades siguientes:

Ax1. Existe *elemento neutro* $0 \in \mathbb{R}$ para la suma:

$$x + 0 = 0 + x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ax2. Existe un *elemento opuesto* $-x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in R$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Ax3. Propiedad *asociativa* para la suma:

$$x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Ax4. Propiedad *conmutativa* para la suma:

$$x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ax5. Existe *elemento neutro* $1 \in \mathbb{R}$ para el producto:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ax6. Existe un *elemento simétrico* $1/x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$:

$$x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1.$$

Ax7. Se verifica la propiedad *asociativa* para el producto:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Ax8. Se verifica la propiedad *conmutativa* para el producto:

$$x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ax9. Se verifica la propiedad *distributiva* del producto respecto a la suma:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

A partir de los axiomas anteriores deducimos todas las leyes usuales del álgebra elemental de $\mathbb{R}$. A continuación, vamos a ver algunas.

Proposición 1.6 *Probar que si dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen que $x + y = y$, entonces $x = 0$.*

Demostración. Sumamos $-y \in \mathbb{R}$ (cuya existencia está garantizada por Ax2) a ambos miembros de la igualdad $x + y = y$:

$$(x + y) + (-y) = y + (-y) = 0$$

Por otra parte, en virtud de Ax2 ,Ax3 y Ax1:

$$(x + y) + (-y) = x + (y + (-y)) = x + 0 = x$$

Por tanto, $x = 0$. □

Proposición 1.7 *Probar que si $x \cdot y \neq 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \Rightarrow x = 1$.*

Demostración. Análoga a la anterior. □

Proposición 1.8 *Demostrar que si $x + y = 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $y = -x$.*

Demostración. Sumamos $-x \in \mathbb{R}$ (cuya existencia está garantizada por Ax2) a ambos miembros de la igualdad $x + y = 0$

$$(-x) + (x + y) = (-x) + 0$$

Aplicamos Ax3 al primer miembro y Ax1 al segundo miembro obtenemos que

$$((-x) + x) + y = -x$$

Aplicamos ahora Ax2 y Ax1 al primer miembro, obtenemos que $y = -x$. □

Proposición 1.9 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $a + x = b$ tiene la solución única $x = (-a) + b$.*

Demostración. Sustituimos $x = (-a) + b$ en la ecuación y aplicamos Ax3, Ax2 y Ax1:

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

Por tanto, $x = (-a) + b$ es solución de la ecuación.
Para demostrar que es única, consideramos otra solución x':

$$a + x' = b$$

Sumamos $-a$ a ambos miembros y aplicamos Ax3 y Ax1:

$$(-a) + (a + x') = (-a) + b$$

$$x' = (-a) + b$$

Por tanto, $x' = x$, y la solución es única. □

1.8 El orden en $\mathbb{R}$

Decimos que una relación R, entre los elementos de un conjunto A, es de *orden* si verifica los tres axiomas siguientes:

1. Reflexiva: $\forall a \in A,\ aRa$.
2. Antisimétrica: $\forall a, b \in A : aRb \ \wedge \ bRa \Rightarrow a = b$.
3. Transitiva: $\forall a, b, c \in A : aRb \ \wedge \ bRc \Rightarrow aRc$.

Además, si para todo par de elementos $a, b \in A$ se verifica aRb o bRa, decimos que la relación es de *orden total*. En caso contrario la relación es de *orden parcial*.

Proposición 1.10 *La relación de inclusión $\subseteq$ entre conjuntos es de orden parcial.*

Demostración. Inmediata. $\square$

Pues bien, si en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales definimos la relación menor o igual $\leq$ en la forma

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$$

podemos ver que es una relación de orden.

En efecto, es *reflexiva* ya que si tomamos $x = 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : a + 0 = a \Leftrightarrow a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Es *antisimétrica*, puesto que $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$$

$$b \leq a \Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ b + x' = a$$

Sumamos miembro a miembro: $a + b + x + x' = b + a \Rightarrow x + x' = 0$ (por la proposición 1.6) $\Rightarrow x = x' = 0$ (ya que $x, x' \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) $\Rightarrow a = b$.

Por último, es transitiva, ya que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x_1 = b$$

$$b \leq c \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ b + x_2 = c$$

Despejamos b en la segunda igualdad y sustituimos en la primera:

$$a + x_1 = -x_2 + c \Leftrightarrow a + x_1 + x_2 = c \Leftrightarrow aRc$$

ya que $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Por otra parte, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, siempre existe un número $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$ o bien $b + x = a$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado.

Así, $(\mathbb{R}, +, \cdot\,, \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado.

Proposición 1.11 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.*

Demostración. En efecto, $a \leq b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$. Sumamos c a ambos miembros: $a + c + x = b + c$, lo que implica que $a + c \leq b + c$. $\square$

Proposición 1.12 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$. Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$.*

Demostración. Análoga a la anterior. □

Proposición 1.13 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$.*

Demostración.

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x_1 = b$$

$$c \leq d \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ c + x_2 = d$$

Sumamos miembro a miembro: $a + c + x_1 + x_2 = b + d \Leftrightarrow a + c \leq b + d$, ya que $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. □

Proposición 1.14 *Si $x \geq 0$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Demostración. Por inducción. Para $n = 1$ es evidente. La suponemos cierta para $n = k$ y hemos de demostrarla para $n = k + 1$. Si es cierto que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, como $1 + x > 0$, tenemos que

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) =$$

$$= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

ya que $kx^2 \geq 0$. □

1.9 Densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$

Vamos a probar ahora que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, esto es, que dados dos números reales cualesquiera distintos, siempre podremos encontrar un número racional entre ambos.

Teorema 1.5 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q} \, / \ x < r < y$.*

Demostración. Sean $x = x_0.x_1x_2x_3x_4...$ e $y_0.y_1y_2y_3y_4...$, tales que $x < y$. Por próximos que se encuentren, es decir, si $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., las cifras que ocupan un lugar determinado n, cumplirán que $x_n < y_n$. Entonces, el número racional $r = y_0.y_1y_2y_3...y_n$ (decimal finito) es el número buscado. □

Corolario *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists i \in \mathbb{I} \ / \ x < i < y$.*

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a $x/\sqrt{2}$ e $y/\sqrt{2}$ y obtenemos un número racional $r \neq 0$ tal que

$$x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}$$

y entonces, $i = r\sqrt{2}$, $x < i < y$, es el número buscado. □

1.10 Valor absoluto de un número real

Si x es un número real, definimos su *valor absoluto* $|x|$ como

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.5 $|3| = 3$; $|-3| = -(-3) = 3$.

Proposición 1.15 $|-x| = |x|,\ \forall x \in I\!R$.

Demostración. Si $x = 0$*, es evidente. Si* $x > 0$*, entonces* $-x < 0 \Rightarrow \ |-x| = -(-x) = x = |x|$*. Si* $x < 0:\ |x| = -x = |-x|$*, ya que* $-x > 0$*.* □

Proposición 1.16 $|x-y| = |y-x|,\ \forall x, y \in I\!R$.

Demostración. Consecuencia de la proposición anterior. □

Proposición 1.17 $|xy| = |x||y|,\ \forall x, y \in I\!R$.

Demostración. Si x *ó* y *son cero, es evidente. Si* $x > 0$ *e* $y > 0$*, entonces* $xy > 0$*, con lo que* $|xy| = xy = |x||y|$*. Si* $|x| > 0$ *e* $|y| < 0$*, entonces* $xy < 0$*, con lo que* $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$*. Análogamente, si* $x < 0$ *e* $y > 0$*. Por último, si* $x < 0$ *e* $y < 0$*, entonces* $xy > 0$*:* $|xy| = xy = (-x)(-y) = |-x||-y| = |x||y|$*.* □

Proposición 1.18 $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ *ó* $x \leq -a$*, con* $x, a \in I\!R$*.*

Demostración. Si $x > 0$*,* $|x| = x \geq a$*. Si* $x < 0$*,* $|x| = -x \geq a \Rightarrow x \leq -a$*.* □

Proposición 1.19 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$*, con* $x, a \in I\!R$*.*

Demostración. Si $|x| \leq a$*, entonces* $x \leq a$ *y* $-x \leq a$*. De la segunda desigualdad se tiene* $-a \leq x$*. De aquí,* $-a \leq x \leq a$*.*

Recíprocamente, si $-a \leq x \leq a$*, tenemos que* $-x \leq a$ *y* $x \leq a$*, de manera que* $|x| \leq a$*.* □

Proposición 1.20 $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall x \in I\!R$.

Demostración. Inmediata, tomando $a = |x|$ *en la proposición anterior.* □

Proposición 1.21 $|x+y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in I\!R$.

Demostración. De la proposición anterior, $-|x| \leq x \leq |x|$*,* $-|y| \leq y \leq |y|$*. Sumamos miembro a miembro*

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

por la proposición 12.

Aplicamos que $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$*, probado anteriormente, y tenemos*

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \ \square$$

Proposición 1.22 $|x-y| \leq |x|+|y|$, $\forall x, y \in I\!R$.

Demostración. Es consecuencia de la desigualdad triangular, sustituyendo y por $-y$*:*

$$|x-y| \leq |x|+|-y|$$

Según una proposición anterior, $|-y|=|y|$*, con lo que*

$$|x-y| \leq |x|+|y|. \ \square$$

Proposición 1.23 $|x_1+x_2+...+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n|$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in I\!R$.

Demostración. Por inducción. Para $n=1$ *es evidente:* $|x_1|=|x_1|$*. Si* $|x_1+x_2+...+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_k|$*, entonces*

$$|(x_1+x_2+..+x_k)+x_{k+1}| \leq |x_1+x_2+...+x_k|+|x_{k+1}| \leq$$
$$\leq |x_1|+|x_2|+...+|x_k|+|x_{k+1}|. \ \square$$

1.11 Intervalos de $I\!R$

Definición 1.5 *Llamamos intervalo abierto de extremos a y b, y lo representamos* (a, b)*, al conjunto*

$$(a, b)=\{x \in I\!R \ / \ a<x<b\}$$

Definición 1.6 *Llamamos intervalo cerrado de extremos a y b, y lo representa* $[a, b]$*, al conjunto*

$$[a, b]=\{x \in I\!R \ / \ a \leq x \leq b\}$$

Damos ahora, sin demostración, un importante teorema.

Teorema 1.6 *El intervalo* $(0,1) \subset I\!R$ *no es numerable.*

Al conjunto (0,1) lo llamamos el *continuo* y a la potencia de (0,1), *potencia del continuo*.

Por lo tanto, $I\!R$ no es numerable y tampoco lo es $I\!I = I\!R - \mathbb{Q}$, ya que $\mathbb{Q}$ sí lo es. Por otra parte, es fácil ver que los números irracionales algebraicos constituyen un conjunto numerable, dado que son solución de ecuaciones con coeficientes enteros y $\mathbb{Z}$ es numerable, como hemos visto anteriormente (sección 1.6).

1.12 Postulado de Cantor

Un postulado es un enunciado que admitimos como cierto sin demostración. He aquí el de Cantor:

Una sucesión $[a_n, b_n]$ de intervalos, tales que $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \geq b_{n+1}$ y

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$$

define un único número real r, común a todos ellos.

1.13 Cotas

Definición 1.7 *El número real* α *es cota superior del conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *si se verifica* $x \leq \alpha$, $\forall x \in A$. *Si un conjunto posee cota superior, decimos que está acotado superiormente. Análogamente, definimos cota inferior y acotado inferiormente.*

Definición 1.8 *Si el conjunto A está acotado superior e inferiormente, decimos que está acotado.*

Definición 1.9 *A la menor de las cotas superiores la llamamos supremo. A la mayor de las cotas inferiores, ínfimo. Si el supremo pertenece al conjunto, lo llamamos máximo. Si el ínfimo pertenece al conjunto lo llamamos mínimo.*

Ejemplo 1.6 *Sea el intervalo* $A = (3, 8]$. *Son cotas superiores: 8, 9, 10, 100, ... Son cotas inferiores -5, 1, 2, 3, ... El conjunto A está acotado superior e inferiormente. Por tanto, está acotado. El ínfimo es 3. El supremo es 8. Como* $8 \in A$, *recibe el nombre de máximo.*

1.14 Completitud de $\mathbb{R}$

Hemos visto que $\sqrt{2}$ no pertenece a $\mathbb{Q}$. Por tanto, los números racionales no recubren por completo la recta numérica. Es verdad que se pueden dar sucesiones de aproximaciones a $\sqrt{2}$, como 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,..., pero el conjunto $P = \{x \in \mathbb{Q}/x < \sqrt{2}\}$ no posee supremo en $\mathbb{Q}$. Decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo *incompleto*.

Sin embargo, el conjunto de las cotas superiores de P, admite un mínimo en $\mathbb{R}$, que es precisamente $\sqrt{2}$. Decimos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo *completo*. En general, un cuerpo ordenado K es completo si cualquier subconjunto acotado superiormente (inferiormente) P de K, admite supremo (ínfimo) en K.

Por tanto, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado y completo.

1.15 Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$

Arquímedes consideró esta propiedad como uno de los axiomas de la geometría, aunque en las geometrías no arquimedianas se prescinde de ella. Viene a decir lo siguiente:

Un segmento de $\mathbb{R}$, de longitud arbitraria p, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud igual a x, tan pequeña como se quiera.

Teorema 1.7 *El conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales, no está acotado superiormente.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Suponemos que $\mathbb{N}$ *está acotado y que b es el supremo. Entonces,* $b - 1$ *no es una cota superior por ser menor que b. Existirá un mínimo número natural n, tal que* $n > b-1$. *De aquí,* $n+1 > b$. *Y como* $n+1 \in \mathbb{N}$, *b no es una cota superior. He aquí la contradicción.* $\square$

Corolario *Dado un número real x, existe un número natural n, tal que $n > x$.*

Demostración. De no ser cierto, x sería una cota superior de $\mathbb{N}$, en contradicción con el teorema anterior. □

Corolario *Si $x > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > p$.*

Demostración. Inmediata, cambiando x por p/x en el corolario anterior. □

1.16 Entorno de un punto

Definición 1.10 *Llamamos* entorno del punto x *a todo subconjunto que contiene un intervalo abierto (a, b), que contiene a x.*

En la práctica, se suelen considerar entornos de la forma $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, de centro el punto x y radio $\epsilon > 0$.

Definición 1.11 *Llamamos* entorno reducido *de un punto x a todo entorno de x del que se ha excluido el propio x.*

1.17 Puntos interiores, de acumulación, aislados, adherentes y frontera

Definición 1.12 *Un punto $x \in A$ es* interior *al conjunto A si existe un entorno de x contenido en A.*

El conjunto de los puntos interiores de A se designa por $\mathring{A}$. Evidentemente, $\mathring{A} \subseteq A$.

Definición 1.13 *Decimos que $x \in A$ es un punto* aislado *de A si existe un entorno de x que no contiene más puntos de A que el propio x.*

El conjunto de los puntos aislados de A se representa Iso(A).

Definición 1.14 *Un punto x es de* acumulación *de A si todo entorno de x contiene puntos de A, distintos de x. Dicho de otro modo, un punto de A es de acumulación si no es aislado.*

El conjunto de los puntos de acumulación se representa A' y recibe el nombre de conjunto derivado *de A.*

Evidentemente, $\mathring{A} \subseteq A'$.

Definición 1.15 *Un punto x es* adherente *a A si para todo entorno E de x se verifica que $E \cap A \neq \emptyset$.*

El conjunto de los puntos adherentes recibe el nombre de adherencia *o* clausura, *y lo representamos $\overline{A}$. Evidentemente, $A \subseteq \overline{A}$.*

Definición 1.16 *Decimos que un punto x es* frontera *de A si todo entorno de x contiene puntos de A y de su complementario A^c:*

$$E \cap A \neq \emptyset \qquad E \cap A^c \neq \emptyset.$$

El conjunto de los puntos frontera se representa $F(A)$. El conjunto de los puntos frontera que pertenecen a A recibe el nombre de frontera interna de A y se representa $F_i(A)$. El conjunto de los puntos frontera que no están en A recibe el nombre de frontera externa de A, y se representa $F_e(A)$.

1.18 Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 1.17 *Decimos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si todos sus puntos son interiores, esto es, si para todo x de A existe un entorno de x contenido en A. Dicho de otro modo, A es abierto si $A = \mathring{A}$.*

De acuerdo con esta definición, todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.

Definición 1.18 *Decimos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación. Dicho de otro modo, A es cerrado si $A = \overline{A}$.*

De acuerdo con esta definición, todos los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.

Damos ahora, sin demostración, una interesante proposición que permitirá estudiar los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ como complementarios de los abiertos:

Proposición 1.24 *El complementario de un conjunto cerrado es abierto y viceversa.*

Proposición 1.25 *$\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados.*

Demostración. Es evidente que $\mathbb{R}$ es abierto, ya que todos sus puntos son interiores. Del mismo modo, es cerrado, ya que contiene a todos sus puntos de acumulación. $\emptyset$ es abierto y cerrado por la proposición anterior. □

Hemos de hacer notar que las términos *abierto* y *cerrado* no son antónimos al referirse a subconjuntos de $\mathbb{R}$. Afortunadamente, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abiertos y cerrados a la vez.

Ejercicios resueltos

1.1. Demostrar que $\sqrt[3]{5}$ es algebraico.

Resolución. $x^3 - 5 = 0$; $x^3 = 5$; $x = \sqrt[3]{5}$.

1.2. Calcular $\sqrt{2.\overline{7}}$.

Resolución. Sea $x = 2.\overline{7} = 2.777....$ Multiplicamos x por 10:

$$10\,x = 27.777...$$

Le restamos

$$x = 2.777...$$

y obtenemos

$$9x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{2.\overline{7}} = \frac{5}{3}$$

1.3. Escribir dos decimales periódicos y dos decimales finitos comprendidos entre 1.33333 y 1.33334.

Resolución. Periódicos: $1.33333\overline{2}$ y $1.\overline{3}$. Exactos: 1.333335 y 1.333337

1.4. Demostrar que si $\mathbf{a^2}$ es un número par, también lo es a, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$.

Resolución. Por reducción al absurdo. Si a no es par, existe $n \in \mathbb{N}$ / $a = 2n + 1$. Elevando al cuadrado, $a^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Pero $4n^2 + 4n + 1$ es impar, en contra de la hipótesis. Por tanto, a es un número par.

1.5. Demostrar que la suma de dos números irracionales, de la forma $\sqrt{\mathbf{a}}$ y $\sqrt{\mathbf{b}}$, es irracional.

Resolución. Por reducción al absurdo. Si $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Despejamos a: $a = \dfrac{m^2}{n^2} + b - 2 \cdot \dfrac{m}{n} \cdot \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = \dfrac{n}{2m} \cdot (b - a) + \dfrac{m}{2n}$ y llegamos a un absurdo. El segundo miembro (racional) es igual a $\sqrt{b}$ (irracional).

1.6. Demostrar que la suma, producto y cociente de dos números irracionales no es necesariamente irracional.

Resolución. $(4 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 6$; $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$; $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$

1.7. Se ha visto que siempre es posible encontrar un número racional entre dos números racionales dados. Probar que siempre es posible encontrar un número irracional entre dos números racionales x e y, (x < y).

Resolución. $a = x + \dfrac{y - x}{b}$, siendo b un número irracional cualquiera mayor que 1, por ejemplo, π, e, $\sqrt{2}$,...

1.8. Demostrar que entre dos números irracionales de la forma $\sqrt{\mathbf{a}}$ y $\sqrt{\mathbf{b}}$ siempre es posible encontrar otro número irracional.

Resolución. $c = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ está entre $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ y es irracional, como se demostró en un ejercicio anterior.

1.9. Demostrar que la suma r + i de un número racional r y un número irracional i, es irracional.

Resolución. Si $r + i = s \in \mathbb{Q}$, entonces $i = s - r \in \mathbb{Q}$. Absurdo. Por tanto, $r + i$ es irracional.

1.10. Dos puntos móviles parten simultáneamente, con igual velocidad constante, de un vértice de un hexágono de lado l. Uno recorre el contorno del hexágono y el otro la diagonal d, que une dos vértices opuestos. ¿Volverán a encontrarse?. Resolver el problema si en lugar de un hexágono fuese un cuadrado.

Resolución. Sí, puesto que d y l son conmensurables: $d = 2 \cdot l$. Se encontrarán cuando el primer punto haya completado dos vueltas al contorno del hexágono.

Si fuese un cuadrado de diagonal d, tendrían que existir dos números naturales m y n tales que $m \cdot d = n \cdot l$, para que los dos puntos se encontraran de nuevo. Esto no es posible ya que $d = l \cdot \sqrt{2}$ y ello implica que $m \cdot \sqrt{2} = n$, lo cual es absurdo.

1.11. Demostrar por inducción la fórmula

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

Resolución. Es cierta para n=1:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Suponiendo que es cierta para $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

hemos de demostrar que es cierta para $n = k + 1$. En efecto:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{k+1}{6}\,[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

1.12. Demostrar por inducción la fórmula

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

Resolución. Es cierta para $n = 1$: $1^3 = 1^2$. Suponiendo que es cierta para $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$$

hemos de demostrarla para $n = k + 1$, esto es

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k + k + 1)^2$$

Por la hipótesis de inducción

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{1+k}{2} \cdot k\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$

$$= (k+1)^2\, \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

Por otra parte

$$(1+2+\cdots+k+k+1)^2 = \left[\frac{1+k+1}{2}\cdot(k+1)\right]^2$$

Por último

$$\left(\frac{1+k}{2}\cdot k\right)^2 + (k+1)^3 = \left[\frac{1+k+1}{2}\cdot(k+1)\right]^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

1.13. Resolver las inecuaciones:

$$\textbf{a)}\ |\mathbf{x}-\mathbf{3}| < \mathbf{8} \qquad \textbf{b)}\ |\mathbf{x}+\mathbf{5}| \geq \mathbf{4}.$$

Resolución. a)

$$-8 < x-3 < 8 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -5 < x \\ y \\ x < 11 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-5, 11)$$

b)

$$\left.\begin{array}{c} x+5 \geq 4 \\ \text{ó} \\ x+5 \leq -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x \geq -1 \\ \text{ó} \\ x \leq -9 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty, -9] \cup [-1, \infty).$$

1.14. Resolver la inecuación $\mathbf{x^2 - 5x + 4 > 0}$·

Resolución. Si descomponemos en factores el primer miembro de la inecuación, $(x-1)(x-4) > 0$, tenemos dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{c} x-1 > 0 \\ y \\ x-4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x > 1 \\ y \\ x > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow x \in (4, \infty)$$

$$\left.\begin{array}{c} x-1 < 0 \\ y \\ x-4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x < 1 \\ y \\ x < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow x \in (-\infty, 1)$$

La solución es $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) = I\!R - [1, 4]$.

1.15. Resolver la inecuación $\mathbf{1 - \frac{x}{2} > \frac{1}{1+x}}$·

Resolución. Pasamos $\dfrac{1}{1+x}$ al primer miembro de la inecuación

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x} > 0 \Rightarrow \frac{2(1+x) - x(1+x) - 2}{2(1+x)} > 0 \Rightarrow \frac{x - x^2}{2(1+x)} > 0$$

Tenemos dos posibilidades. La primera:

$$\left.\begin{array}{c} x - x^2 > 0 \\ y \\ 1 + x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x(1-x) > 0 \\ y \\ x > -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x \in (0,1) \\ y \\ x \in (-1,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0,1)$$

La segunda posibilidad:

$$\left.\begin{array}{c} x - x^2 < 0 \\ y \\ 1 + x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x(1-x) < 0 \\ y \\ x < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x \in (-\infty,0) \cap (1,\infty) \\ y \\ x \in (-\infty,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty,-1)$$

Por último, la solución será la unión de ambas, $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

1.16. Resolver la inecuación $\mathbf{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0}$.

Resolución. Utilizando la regla de Ruffini, hallamos las raíces del polinomio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$: 1, 2 y 3. Por tanto

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

Por comodidad, vamos a valernos de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		1		2		3		∞
$x-1$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$(x-1)(x-2)(x-3)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

En efecto, en la tabla anterior vemos que si, por ejemplo, x está en el intervalo $(-\infty,1)$, los valores de $x-1$, $x-2$ y $x-3$ son negativos y, por tanto, su producto en la última fila $(x-1)(x-2)(x-3)$ es negativo.

La solución de la inecuación es $x \in (-\infty,1) \cap (2,3)$.

1.17. Demostrar que todo intervalo $\mathbf{(a,b)}$ de $I\!R$ tiene la potencia del continuo.

Resolución. Al intervalo $(0,1) \subset I\!R$ se le llama *el continuo* (sección 1.11). El intervalo $(a,b) \subset I\!R$ tiene la potencia de $(0,1) \subset I\!R$ ya que es posible establecer una aplicación biyectiva entre ambos (seccin 1.6):

$$f : (0,1) \to (a,b)$$

$$x \to a + (b-a)x$$

La aplicación en inyectiva ya que dados dos elementos cualesquiera $x_1, x_2 \in (0,1)$, si $y_1 = y_2$: $a + (b-a)x_1 = a + (b-a)x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Es sobreyectiva, ya que para todo $y \in (a,b)\ \exists\ x = \dfrac{y-a}{b-a} \in (0,1)$.

Por tanto, (a,b) es coordinable con $(0,1)$ y tiene la misma potencia.

1.18. Sea el conjunto $\mathbf{A = \{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ ...\}}$. Encontrar tres cotas superiores y tres cotas inferiores del conjunto A. ¿Tiene supremo? ¿y máximo? ¿tiene ínfimo? ¿y mínimo?.

Resolución. Cotas inferiores: $-3,\ 0,\ -1$.

Cotas superiores: $1,\ 2,\ 2.5$.

Por lo tanto, está acotado.

El supremo es 1, y como $1 \in A$, recibe el nombre de máximo.

El ínfimo es 0. Como 0 no pertenece a A, el conjunto carece de mínimo.

1.19. Determinar los puntos de acumulación del conjunto

$$\left\{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in I\!N\right\}.$$

¿Pertenecen al conjunto dado?.

Resolución. Dando valores a $n:\ 0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{-2}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{-4}{5},\ \dfrac{7}{6},...$

Los puntos de acumulación son -1 y 1, que no pertenecen al conjunto dado.

1.20. Hallar el interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto $\mathbf{A} = (\mathbf{1},\mathbf{2}] \cup \left\{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in I\!N\right\} \cup \{\mathbf{3}\}$.

Resolución.

Interior de $A = (1,2)$, $A' = \{0\} \cup [1,2]$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $Iso(A) = \left\{\dfrac{1}{n+1},\ n \in I\!N\right\} \cup \{3\}$, $F_i(A) = \left\{\dfrac{1}{n},\ n \in I\!N\right\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, $F_e(A) = \{0\}$.

1.21. Hallar el interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto $\mathbb{Q}$.

Resolución.

$Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $Iso(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = I\!R$, $\overline{\mathbb{Q}} = I\!R$, $F_i(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $F_e(\mathbb{Q}) = I\!I$.

1.22. Hallar el interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto $\mathbf{A} = [\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbb{Q}$. ¿Tiene máximo y mínimo?. ¿Es abierto?. ¿Es cerrado?.

Resolución.

Interior de $A = \emptyset$, $Iso(A) = \emptyset$, $A' = [0,1]$, $\overline{A} = [0,1]$, $F_i(A) = A$, $F_e(A) = [0,1] \cap I\!I$, máximo=1, mínimo=0. No es abierto ni cerrado ya que $A \neq int(A)$ y $A \neq \overline{A}$.

Ejercicios propuestos

1.23. Resolver la ecuación $1.2\overline{3}\ x + 5 = 2.\overline{1}$.

1.24. Representar $\sqrt{7}$ en la recta real.

1.25 Determinar cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales:

a) $-7.828228222822228\ldots$ b) $2.100510051005\ldots$

c) $0.713212321232123212321\ldots$ d) $35.01001000100001\ldots$

e) $\pi - 30$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

i) $\dfrac{3\pi}{2}$ j) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$

1.26. Demostrar que el producto $r \cdot i$, de un número racional r por un número irracional i, es irracional.

1.27. Dado un número irracional $i > 0$, encontrar otro número irracional entre 0 e i.

1.28. Demostrar que $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es irracional.

1.29. Si $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{I}$, demostrar que, en general, $\dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{I}$.

1.30. Demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, son tales que $x \cdot y = 1$, entonces $y = \dfrac{1}{x}$.

1.31. Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$.

1.32. Dos puntos móviles, con igual velocidad constante, parten del vértice A de un triángulo equilátero ABC de altura AH, relativa al lado BC. Uno recorre el contorno del triángulo ABC y el otro recorre el contorno del triángulo ABH, ambos en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. ¿Volverán a encontrarse?.

1.33. Demostrar por inducción la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i, \ \ n \in \mathbb{N}$$

1.34. Demostrar por inducción la fórmula

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

1.35. Hallar la solución de las siguientes inecuaciones

a) $4x + 1 < 2x + 3$ b) $-3x + 1 < 2x + 5$
c) $3x - 5 > 7x + 12$ d) $11x - 7 \leq 4x + 2$
e) $2x^2 - x - 10 > 0$ f) $x^2 - 4x + 5 \geq 0$
g) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ h) $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$
i) $x^2 + x + 1 \leq 0$

1.36. Hallar la solución de las siguientes inecuaciones simultáneas

a) $3x - 2 \leq -x + 5 < 7 - 2x$ b) $-2x + 5 > 7 - x > 1 - 3x$
c) $5x + 4 < 2x + 8 \leq 2 - 7x$ d) $5 - x \geq 7 - x > 3x$

1.37. Hallar la solución de las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{2}{x-1} \leq 0$ b) $\dfrac{3x+1}{x^2+1} < 0$
c) $\dfrac{x-3}{x+5} < -1$ d) $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{1}{x-1}$
e) $\dfrac{(2-x)(x+3)}{x^2-1} > 0$ f) $x^4 \leq 1$
g) $\dfrac{x^3-8}{(3x-2)^2} \geq 0$ h) $\dfrac{3x+2-x^3}{8x-1-15x^2} \leq 0$
i) $\dfrac{6}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x-1} \geq 1$ j) $\dfrac{(x+2)^2(3-x)}{(x^2+x+1)(x+7)} \leq 0$

1.38. Demostrar que

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - 3| \leq 1\} = [2, 4]$
b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x + 2| > 5\} = \mathbb{R} - [-7, 3]$
c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3x - 2 < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,/\, 5x + 4 \geq 0\} = [-4/5, 2/3)$
d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |5 - \frac{1}{x}| < 1\} = (1/6, 1/4)$
e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |3 - 2x| \leq 3\} = [0, 3]$
f) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x^2 < 4\} = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

1.39. Hallar la solución de las siguientes inecuaciones

a) $|x - 2| \geq 10$ b) $|x| > |x + 1|$
c) $|x^2 - 1| \leq 2$ d) $|x^2 - 4| > 3$
e) $|\frac{(x-1)(x+1)}{\leq}1$ f) $|2x - 1| < |x + 1|$
g) $|x(1 - x)| < 2$ h) $2 \leq |x - 5| < 3$

1.40. Determinar si son ciertas o falsas cada una de las igualdades:

a) $\sum_{i=0}^{100} i^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$ b) $\sum_{i=0}^{100} 3 = 300$

c) $\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{100} i^2$ d) $\sum_{i=1}^{100} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$

1.41. Dado el conjunto $\mathbb{N}$, hallar: a) Interior, b) puntos aislados, c) conjunto derivado, d) adherencia, e) frontera interna y frontera externa.

1.42. Idem para el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales.

1.43. Idem para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Determinar el supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos, indicando cuales de ellos coinciden con el máximo o mínimo:

1.44. $A = (1, 2]$

1.45. $B = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ 0 < x < 1\}$

1.46. $C = \left\{\frac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

1.47. $D = \left\{\frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

1.48. $E = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 5x + 6 < 0\}$

1.49. $F = (0, \infty)$

1.50. $G = \{3^{-a} + 5^{-b};\ a, b \in \mathbb{N}\}$

1.51. $H = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0,\ a < b < c < d\}$.

1.52. Se consideran los conjuntos A=[1,3) y B=(2,4]. Hallar el interior, adherencia, frontera y acotación de los conjuntos: a) A∪B, b) A∩B.

1.53. Hallar el interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto $A = (2, 3] \cup \left\{\frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.54. Para redondear un número decimal, se siguen las reglas siguientes:
a. La última cifra permanece invariable si los dígitos siguientes son menores que 5000... Por ejemplo, para redondear a dos cifras decimales el número 421.2348, se toma 421.23
b. Se añade una unidad a la última cifra si los dígitos son mayores que 5000... Por ejemplo, para redondear a dos cifras decimales el número 23.457, se toma 23.46
c. La última cifra permanece invariable o se le añade una unidad, según sea par o impar, si los dígitos siguientes son exactamente 5000... Por ejemplo, el redondeo de 13.265 será 13.26; el redondeo de 43.735 será 43.74
Redondear con dos cifras decimales los números 13.256, 4.485, 56.175 y 24.954

Capítulo 2

El número complejo

Una ecuación de la forma $x^2+4=0$ no tiene solución en el cuerpo $I\!R$ de los números reales. Para poder resolver ecuaciones como la anterior, introducimos el concepto de unidad imaginaria y construimos un superconjunto $\mathbb{C}$ de $I\!R$, llamado conjunto de los números complejos, en el que la anterior ecuación sí tiene solución.

2.1 La unidad imaginaria

Definición 2.1 *Se define la unidad imaginaria i como $i = \sqrt{-1}$.*

Se puede resolver ahora la ecuación $x^2 + 4 = 0$:

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$

Ejemplo 2.1 *Calcular $\sqrt{-16}$.*
Puesto que $i = \sqrt{-1}$, entonces $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \pm 4i$.

Ejemplo 2.2 *Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$.*

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

A continuación vamos a hallar las potencias sucesivas de i.

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Puesto que $i^4 = 1$, tenemos que $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$, etc., repitiéndose los valores de las potencias.

Ejemplo 2.3 *Calcular* i^{274}

Dividimos 274 entre 4: $i^{274} = i^{4\cdot 68+2} = i^{4\cdot 68}\cdot i^2 = (i^4)^{68}\cdot(-1) = -1$

2.2 El número complejo

Definición 2.2 *Llamamos número complejo a la expresión* $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, *donde* a *es la llamada parte real y* b *la parte imaginaria del número complejo. Es decir, un número complejo no es otra cosa que un par ordenado de números reales* $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Si $b = 0$, se tiene un número real. Así, podemos considerar los números reales como un subconjunto de los numeros complejos.

Definición 2.3 *Si* $a = 0$, *el número complejo* $0 + bi = bi$ *recibe el nombre de imaginario puro.*

Definición 2.4 *Llamamos conjugado del número complejo* $z = a + bi$ *al complejo* $\overline{z} = a - bi$.

Definición 2.5 *Dos números complejos* $z_1 = a + bi$ *y* $z_2 = c + di$ *son iguales si, y sólo si,* $a = c$ *y* $b = d$.

2.3 Operaciones con números complejos

Definición 2.6 *Sean los números complejos* $z_1 = a + bi$ *y* $z_2 = c + di$. *Entonces, definimos* $z_1 + z_2$ *y* $z_1 \cdot z_2$ *en la forma*

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

De esta forma, dados tres complejos cualesquiera z_1, z_2 *y* z_3, pertenecientes al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, podemos probar que

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3. $\exists\ 0 \in \mathbb{C}\ /\ z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$
4. $\exists\ (-z_1) \in \mathbb{C}\ /\ z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$
5. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Por cumplir estas cinco propiedades, el par $(\mathbb{C}\ , +)$ tiene estructura de grupo abeliano (sección 1.1). Además, se verifican las propiedades siguientes

6. $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$
7. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
8. $\exists\ 1 \in \mathbb{C}\ /\ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$
9. $\forall\ z \in \mathbb{C}\ (z \neq 0),\ \exists\ z^{-1} \in \mathbb{C}\ /\ z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
10. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Y por cumplir las propiedades 6, 7, 8, 9 y 10, el par $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Por último, tenemos que

11. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Por tanto, la terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de *cuerpo conmutativo* (sección 1.2).

Definición 2.7 *Definimos el producto de un número real r por un número complejo $z = a + bi$ en la forma*

$$r \cdot z = r \cdot (a + bi) = r \cdot a + r \cdot bi$$

Para cualesquiera $r, r' \in I\!R$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumplen las propiedades siguientes

12. $r \cdot (z_1 + z_2) = r \cdot z_1 + r \cdot z_2$
13. $(r + r') \cdot z_1 = r \cdot z_1 + r' \cdot z_1$
14. $r \cdot (r' \cdot z_1) = (r \cdot r') \cdot z_1$
15. $1 \cdot z_1 = z_1$, *con* $1 \in I\!R$

Las propiedades 1 a 5, determinan que el par $(\mathbb{C}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo para la suma y conjuntamente con estas cuatro últimas propiedades determinan que el conjunto $\mathbb{C}$ tiene estructura de *espacio vectorial* sobre el cuerpo $I\!R$.

Ejemplo 2.4 *Dados los complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 + 3i$, hallar: a) $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$, c) $z_1 \cdot z_2$, d) z_1/z_2.*

Resolución.

$z_1 + z_2 = (1 + 2) + (1 + 3)i = 3 + 4i$

$z_1 - z_2 = (1 - 2) + (1 - 3)i = -1 - 2i$

$z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (2 + 3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = -1 + 5i$

$z_1/z_2 = \dfrac{1 + i}{2 + 3i} = \dfrac{(1 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = 5/13 - (1/13)i$

2.4 Representación gráfica de un complejo

Dado que un número complejo $z = a + bi = (a, b) \in I\!R \times I\!R$ es un par ordenado de números reales, se puede representar dicho número complejo z mediante el punto (a, b) en el plano XY, llamado *plano complejo*. El punto (a, b) recibe el nombre de *afijo* del número complejo z.

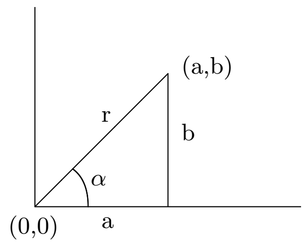

Figura 2.1

2.5 Módulo y argumento de un complejo

Definición 2.8 *Se define el módulo o valor absoluto de un número complejo* $z = a+bi$ *como* $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Definición 2.9 *El valor del ángulo* α *recibe el nombre de argumento (ver figura 2.1).*

Para un número complejo dado, el argumento admite un conjunto infinito de valores, que se diferencian entre sí en $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se llama *valor principal* del argumento α a aquel que cumple $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ejemplo 2.5 *Sea z=3+4i. Entonces,*

$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\alpha = arctg\ 4/3$

2.6 Propiedades del módulo

Sean $z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n \in \mathbf{C}$. Se verifica que

1. $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|$.
2. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, con $|z_2| \neq 0$.
3. $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

2.7 Forma polar y trigonométrica de un complejo

El punto (a,b) es el afijo del número complejo $z = a+bi$. En la figura 2.1 tenemos

$$a = r \cdot cos\alpha$$

$$b = r \cdot sen\alpha$$

siendo r el módulo de z y α su argumento. De aquí deducimos que

$$z = a+bi = r(cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$$

Esta expresión es la llamada *forma trigonométrica* del número complejo. Algunas veces se emplea la abreviatura *cis* α en lugar de *cos* $\alpha + i \cdot$ *sen* α.

Otra forma de representar el complejo z, de módulo r y argumento α, sería

$$z = r_\alpha$$

a la que se llama forma *polar o módulo-argumental*.

Ejemplo 2.6 *Dado el número complejo* $z = 1+\sqrt{3}i$*, escribirlo en forma polar y trigonométrica.*

$$1+\sqrt{3}i = 2_{\pi/3} = 2(cos\ \pi/3 + i \cdot sen\ \pi/3)$$

2.8 Producto y cociente de complejos en forma polar

Sean los complejos $z_1 = r_\alpha = r(cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$ y $z_2 = s_\beta = s(cos\beta + i \cdot sen\beta)$. Su producto

$$z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot s_\beta = rs[cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta + i(sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta)] =$$
$$= rs[cos(\alpha+\beta) + i \cdot sen(\alpha+\beta)] = (rs)_{\alpha+\beta}$$

Por lo tanto, el producto de dos complejos es otro complejo que tiene por módulo el producto de sus módulos y por argumento la suma de los argumentos.

De forma análoga, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, podemos demostrar que el cociente tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos. Esto es

$$z_1/z_2 = r_\alpha/s_\beta = (r/s)_{\alpha-\beta}$$

Ejemplo 2.7 *Dados los complejos* $1+\sqrt{3}\,i$ *y* $\sqrt{3}+i$*, pasarlos a forma polar y efectuar su producto y cociente en dicha forma. Comparar con los resultados obtenidos en forma binómica.*

$$1+\sqrt{3}\,i = 2_{\pi/3}$$
$$\sqrt{3}+i = 2_{\pi/6}$$

Su producto y cociente en forma polar es

$$2_{\pi/3} \cdot 2_{\pi/6} = 4_{\pi/2}$$
$$\frac{2_{\pi/3}}{2_{\pi/6}} = 1_{\pi/6}$$

Su producto y cociente en forma binómica es

$$(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}\,i^2 = 4i = 4_{\pi/2}$$
$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}\,i^2}{3-i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i = 1_{\pi/6}$$

2.9 Potencia de un número complejo en forma polar

Utilizando la sección anterior, tenemos que

$$z^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha ... r_\alpha = (r^n)_{n\alpha}$$

Este resultado se conoce con el nombre de fórmula de Moivre y viene a decir que la potencia $n - sima$ de un número complejo r_α es otro complejo de módulo r^n y argumento n veces el argumento del primero.

Ejemplo 2.8 *Calcular* $(1+i)^{10}$

Resolución. $(1+i)^{10} = (\sqrt{2}_{\pi/4})^{10} = (2^5)_{5\pi/2} = 32\,i$

2.10 Raíces n-simas de un número complejo

Si se supone que $w = s_\beta$ es una raíz $n - sima$ del número complejo $z = r_\alpha$, tenemos que

$$w^n = z \Rightarrow (s_\beta)^n = (s^n)_{n\beta} = r_\alpha \Rightarrow$$

$$s^n = r,\ n\beta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow s = \sqrt[n]{r},\ \beta = (\alpha + 2k\pi)/n$$

con $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$, ya que para $k = n$ se obtiene el mismo valor que para $k = 0$.

Existen, por tanto, n raíces $n - simas$ distintas, si $z \neq 0$.

Ejemplo 2.9 *Calcular las raíces cúbicas de* 2.

Resolución. $r = 2$, $n = 3$ *y* $\alpha = 0$. *Por tanto:* $\sqrt[3]{2}_{2k\pi/3}$, *con* $k = 0, 1, 2$.

2.11 Fórmula de Euler

Anticipando los desarrollos en serie de MacLaurin de las funciones e^x, $sen\ x$ y $cos\ x$ (capítulo 7), tenemos que

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$$

$$sen\ x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$$

$$cos\ x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + ...$$

Entonces

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \alpha^2/2! - i\alpha^3/3! + \alpha^4/4! - ... =$$

$$= (1 - \alpha^2/2! + \alpha^4/4! + ...) + i \cdot (\alpha - \alpha^3/3! + ...) = cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha$$

Por tanto, $z = r_\alpha = r(cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$. Esta última expresión es la llamada forma *canónica o exponencial* del número complejo.

La expresión $e^{i\alpha} = cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha$ es la llamada fórmula de Euler.

Dada $e^{i\alpha} = cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha$, sumando y restando $e^{-i\alpha} = cos\ \alpha - i \cdot sen\ \alpha$, se deducen las fórmulas siguientes

$$sen\ \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \qquad cos\ \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Ejemplo 2.10 *Escribir en forma canónica el número complejo* $z = 1 + i$.

$$|z| = \sqrt{2},\ \alpha = \frac{\pi}{4},\ z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{(\pi/4)i}$$

2.12 Logaritmo de un número complejo

Sea el número complejo $z = r \cdot e^{i\alpha}$. Si suponemos que su logaritmo es el número complejo $x + iy$, tenemos que

$$ln\ z = ln\ r + i\alpha = x + iy$$

Igualamos las partes reales y las partes imaginarias

$$x = ln\ r$$

$$y = \alpha + 2k\pi$$

Por tanto, $ln\ z = ln\ r + (\alpha + 2k\pi)i$.

De lo anterior se desprende que el logaritmo de un complejo $z = re^{i\alpha}$ tiene infinitos valores, todos ellos con parte real igual a $ln\ r$ y partes imaginarias que difieren entre sí en múltiplos de 2π. De un modo gráfico, los afijos de los logaritmos están situados sobre una recta paralela al eje OY.

Para $k = 0$, obtenemos el llamado *valor principal*.

Ejemplo 2.11 *Calcular* $ln(1 + 2i)$.

Resolución. $\alpha = arctg(2/1) = 1.10715$.

$$ln(1 + 2i) = ln\ \sqrt{5} + (1.10715 + 2k\pi)i = 0.80472 + (1.10715 + 2k\pi)i$$

Gráficamente

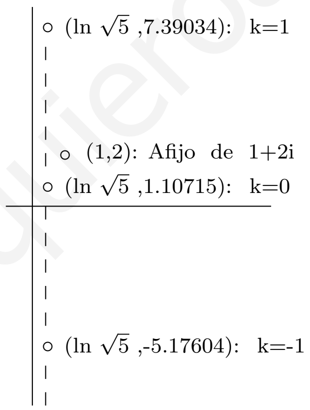

Figura 2.2

Si tenemos los complejos z_1 y z_2 y deseamos calcular $log_{z_1} z_2$. Llamamos $H = log_{z_1} z_2$ y, mediante la definición de logaritmo, $z_2 = z_1^H$. Tomamos logaritmos naturales y obtenemos que $ln\ z_2 = H \cdot ln\ z_1$. Por tanto

$$H = log_{z_1} z_2 = \frac{ln\ z_2}{ln\ z_1}$$

Ejemplo 2.12 *Calcular* $log_i(1 + i)$.

$$log_i(1+i) = \frac{ln\sqrt{2} + (\pi/4 + 2k\pi)i}{(\pi/2 + 2k'\pi)i} = \frac{1+8k}{2+8k'} - \frac{ln\ 2}{\pi + 4k'\pi} \cdot i$$

Ejercicio 2.1 *Calcular* $log_i i$.

$$\frac{1+4k}{1+4k'},\ k, k' \in \mathbb{Z}.$$

2.13 Las funciones hiperbólicas

Las expresiones

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

son frecuentes en problemas de ingeniería y matemática aplicada. Se representan con $sh\ x$ y $ch\ x$, abreviaturas de *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, respectivamente. La razón de estas denominaciones estriba en que están relacionadas con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ de un modo análogo a como las funciones seno y coseno están relacionadas con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En efecto, probamos que

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

Sustituyendo

$$ch^2x - sh^2x = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 = 1$$

que representa una fórmula análoga a $sen^2x + cos^2x = 1$ para las funciones circulares.

La fórmula $ch^2x - sh^2x = 1$ sirve para justificar el adjetivo hiperbólico en las definiciones de $sh\ x$ y $ch\ x$. Las funciones seno y coseno se llaman circulares porque si B es un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y t es la medida en radianes del arco AB, las coordenadas de B son $(cos\ t, sen\ t)$. Del mismo modo, si t recorre los números reales, el punto B, de coordenadas $(ch\ t, sh\ t)$, recorre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Sin embargo, en este caso la variable t no representa un arco sino el doble del área del segmento parabólico AOB. (Ver demostración en [14]).

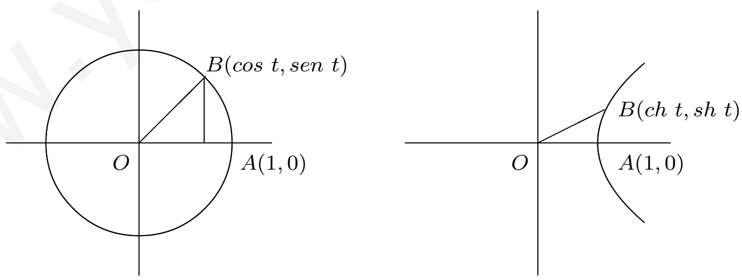

Figura 2.3

Para hacer las gráficas de $y = ch\ x$ e $y = sh\ x$, representamos las funciones $y = (1/2)e^x$ e $y = (1/2)e^{-x}$. Sumando y restando, obtenemos sus gráficas

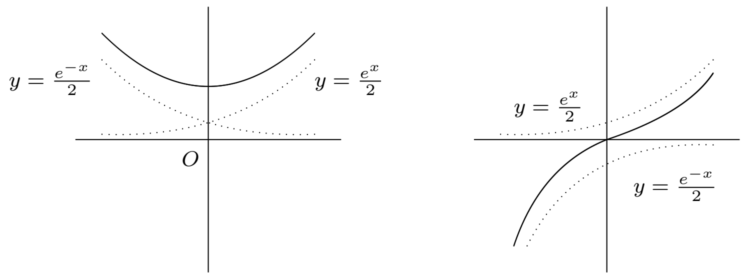

Figura 2.4

Por último, las funciones *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante hiperbólica* las definimos de un modo semejante a las funciones circulares

$$th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x}; \quad cth\ x = \frac{1}{th\ x}$$

$$csch\ x = \frac{1}{sh\ x}; \quad sech\ x = \frac{1}{ch\ x}$$

2.14 Relación entre las funciones circulares y las hiperbólicas

Dado que

$$sen\ x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad cos\ x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

tenemos que

$$cos\ x = ch\ ix, \quad ch\ x = cos\ ix$$

$$sen\ x = (1/i) \cdot sh\ ix, \quad sh\ x = (1/i) \cdot sen\ ix$$

Ejercicios resueltos

2.1. Resolver la ecuación $\mathbf{x^2 + 4x + 5 = 0}$.

Resolución.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm i.$$

2.2. Calcular $\mathbf{i^{743}}$.

Resolución.

$$i^{743} = i^{4\cdot 185+3} = (i^4)^{185} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i.$$

2.3. Dados los números complejos $\mathbf{z_1 = 2 + i}$ y $\mathbf{z_2 = 3 - 2i}$, hallar: a) $\mathbf{z_1 + z_2}$ b) $\mathbf{z_1 - z_2}$ c) $\mathbf{z_1 \cdot z_2}$ d) $\mathbf{z_1/z_2}$.

Resolución.
a) $z_1 + z_2 = (2+i) + (3-2i) = (2+3) + (1-2)i = 5 - i$
b) $z_1 - z_2 = (2-3) + (1+2)i = -1 + 3i$
c) $z_1 \cdot z_2 = (2+i)(3-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$
d) $z_1/z_2 = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}\, i.$

2.4. Dado el número complejo $\mathbf{z = 1 - i}$, escribirlo en forma polar, trigonométrica y exponencial.

Resolución.

$$r = \sqrt{1 + (-1)} = \sqrt{2}$$

$$tg\ \alpha = -1/1 = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

$$1 - i = \sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(cos\ \frac{7\pi}{4} + i.sen\ \frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}\cdot i}$$

2.5. La suma de dos números complejos $\mathbf{z_1}$ y $\mathbf{z_2}$ es $\mathbf{2 + 4i}$. La parte real de $\mathbf{z_2}$ es $\mathbf{-1}$ y el cociente $\mathbf{z_1/z_2}$ es imaginario puro. Hallarlos.

Resolución.
Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Su suma y su cociente

$$(a + bi) + (-1 + di) = (a - 1) + (b + d)i$$

$$\frac{a + bi}{-1 + di} = \frac{(a + bi)(-1 - di)}{(-1 + di)(-1 - di)} = \frac{-a + bd}{1 + d^2} + \frac{-ad - b}{1 + d^2}\ i$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{c} a - 1 = 2 \\ b + d = 4 \\ -a + bd = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3,\ b = 1,\ d = 3 \\ a = 3,\ b = 3,\ d = 1 \end{array}$$

Dos soluciones, $3 + i$, $-1 + 3i$ y $3 + 3i$, $-1 + i$.

2.6. ¿Qué relación debe existir entre a y b para que el cociente $\mathbf{\dfrac{z+1}{z-1}}$ sea imaginario puro, siendo $\mathbf{z = a + bi}$?

Resolución.

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{(a + 1) + bi}{(a + 1) - bi} = \frac{[(a + 1) + bi][(a - 1) - bi]}{[(a - 1) + bi][(a - 1) - bi]} =$$

$$= \frac{a^2-1-2bi+b^2}{(a-1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} - \frac{2bi}{(a-1)^2+b^2}$$

Para que sea imaginario puro ha de tener igual a cero su parte real. Esto es

$$a^2+b^2-1=0 \Rightarrow a^2+b^2=1.$$

2.7. Resolver la ecuación $\mathbf{z^3-1=0}$.

Resolución.

$$z^3-1=0 \Rightarrow z^3=\sqrt[3]{1}$$

En forma polar

$$z=\sqrt[3]{1+0\cdot i}=\sqrt[3]{1_{0^o}}$$

Las raíces son

$$k=0:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^o+360\cdot 0}{3}}=1_{0^o}=1\ (cos\ 0^o+i\cdot sen\ 0^o)=1$$

$$k=1:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^o+360\cdot 1}{3}}=1_{120^o}=1\ (cos\ 120^o+i\cdot sen\ 120^o)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

$$k=2:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^o+360\cdot 2}{3}}=1_{240^o}=1\ (cos\ 240^o+i\cdot sen\ 240^o)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

2.8. Dado $\mathbf{z\in C}$, siendo $\mathbf{x=Re(z)}$, probar que $\left|\mathbf{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}}\right|<\mathbf{\frac{1}{2}}$ si $\mathbf{x>1}$.

Resolución.

Sea $z=x+iy$. Tenemos que

$$\left|\frac{2-z}{2z}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow|2-z|<|z|\Leftrightarrow\sqrt{(2-x)^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2-x)^2<x^2\Rightarrow 4-4x+x^2<x^2\Rightarrow 4-4x<0$$

que se cumple para $x>1$.

2.9. ¿Qué región del plano representa el conjunto

$$\mathbf{A=\{z\in C\ /z\cdot\overline{z}>4\}?.}$$

Resolución.

Sea $z=x+iy$. Entonces $z\cdot\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2>4$, que es el exterior de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

2.10. Dado $\mathbf{z\in C}$, siendo $\mathbf{x=Re(z)}$, ¿qué región del plano representa el conjunto $\mathbf{|z|+x<1}$?.

Resolución.

Sea $z = x + iy$

$$|z| + x = \sqrt{x^2 + y^2} + x = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - x$$

Elevamos al cuadrado

$$y^2 = 1 - 2x$$

Entonces, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x < 1$, es el interior de la anterior parábola, ya que $f(0, 0) < 1$.

2.11. Determinar los números complejos z que cumplen

$$\mathbf{Im}\left(\frac{\mathbf{a + z}}{\mathbf{c + z}}\right) = \mathbf{Im\ z}$$

siendo $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}$. Discutir las posibles soluciones según los valores de a y c .

Resolución.

Sea $z = x + iy$

$$\frac{a + z}{c + z} = \frac{a + x + iy}{c + x + iy} \cdot \frac{c + x - iy}{c + x - iy} =$$

$$= \frac{(a + x)(c + x) + y^2}{(c + x)^2 + y^2} + \frac{(c + x)y - (a + x)y}{(c + x)^2 + y^2}\, i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(c + x)y - (a + x)y}{(c + x)^2 + y^2} = y \Rightarrow (c - a)y = y[(c + x)^2 + y^2]$$

Si $y = 0$, la solución es el eje OX.

Si $c - a = (c + x)^2 + y^2 \Rightarrow (x + c)^2 + y^2 = c - a$:

$c - a > 0$, circunferencia de centro $(-c, 0)$ y radio $\sqrt{c - a}$.

$c - a < 0$, no hay solución.

Hallar el módulo y argumento de los complejos siguientes, tomando el argumento principal:

2.12. $\mathbf{z = i^i}$.

Resolución.

$$ln\ z = i \cdot ln\ i = i \cdot ln\ e^{\frac{\pi}{2} \cdot i} = i \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}.$$

En forma exponencial, $z = e^{\frac{-\pi}{2}} \Rightarrow r = e^{\frac{-\pi}{2}},\ \alpha = 0$.

2.13. $\mathbf{z = i^{1+i}}$.

Resolución.

$$ln\ z = (1 + i) \cdot ln\ i = (1 + i) \cdot ln\ (1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}) = (1 + i) \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot i$$

$$z = e^{\frac{-\pi}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i} \Rightarrow r = e^{\frac{-\pi}{2}},\ \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

2.14. $\mathbf{z = 2^i}$.

Resolución.

$$ln\ z = i \cdot ln\ 2 \Rightarrow z = e^{i \cdot ln\ 2} \Rightarrow r = 1,\ \alpha = ln\ 2.$$

2.15. $\mathbf{z = (1 + \sqrt{3}i)^{1+i}}$.

Resolución.

$$ln\ z = (1+i) \cdot ln\ (1+\sqrt{3}i) = (1+i) \cdot ln(2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}) = (1+i) \cdot \left(ln\ 2 + \frac{\pi}{3} \cdot i\right) =$$

$$= \left(ln\ 2 - \frac{\pi}{3}\right) + \left(ln\ 2 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot i$$

$$z = e^{ln\ 2 - \frac{\pi}{3}} \cdot e^{(ln\ 2 + \frac{\pi}{3}) \cdot i} \Rightarrow r = e^{ln\ 2 - \frac{\pi}{3}},\ \alpha = ln\ 2 + \frac{\pi}{3}.$$

2.16. Calcular $\mathbf{i^{ln\ i}}$.

Resolución.

$$i^{ln\ i} = e^{ln\ i \cdot ln\ i} = e^{(ln\ i)^2}$$

Por otra parte,

$$ln\ i = ln\ 1 + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(ln\ i)^2 = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 \Rightarrow i^{ln\ i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2}$$

2.17. Calcular $\mathbf{\sqrt[i]{2 + ln\ i}}$ **(Utilizar el argumento principal).**

Resolución.

$$z = \sqrt[i]{2 + ln\ i} = (2 + ln\ i)^{1/i}$$

$$ln\ z = \frac{ln(2 + ln\ i)}{i} = \frac{ln(2 + \frac{\pi}{2} \cdot i)}{i} =$$

$$= \frac{ln\left(\sqrt{4 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.e^{(arc\ tg \frac{\pi}{4} + 2k\pi) \cdot i}\right)}{i} = \frac{ln\left(\sqrt{4 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) + (arctg\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi) \cdot i}{i} =$$

$$= arctg\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi - ln\ \sqrt{4 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot i$$

$$z = e^{arctg\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi - ln\ \sqrt{4 + (\frac{\pi}{2})^2} \cdot i},\ con\ k = 0.$$

2.18. Resolver la ecuación sen x=3.

Resolución.

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = 3 \Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 6i \Rightarrow e^{ix} - \frac{1}{e^{ix}} = 6i \Rightarrow$$

$$e^{2ix} - 6ie^{ix} - 1 = 0 \Rightarrow e^{ix} = (3 \pm 2\sqrt{2}) \cdot i$$

$$ix = ln\ [(3 \pm 2\sqrt{2}) \cdot i] = ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + ln\ i = ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot i$$

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i \cdot ln\ (3 \pm 2\sqrt{2})$$

2.19. Resolver la ecuación tg x=i/2.

Resolución.

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} = \frac{i}{2} \Rightarrow \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3e^{2ix} = 1 \Rightarrow$$

$$e^{2ix} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2ix = ln\ \frac{1}{3} + 2k\pi i \Rightarrow x = -\frac{i}{2}\ ln\ \frac{1}{3} + k\pi$$

2.20. Resolver la ecuación $\mathbf{e^{\frac{z+i}{z}} = 1 - i}$.

Resolución.

$$\frac{z+i}{z} = ln(1-i) = ln\sqrt{2} + \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)i$$

$$z + i = z\left[ln\sqrt{2} + \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot i\right] \Rightarrow z\left[1 - ln\sqrt{2} - (2k\pi - \frac{\pi}{4}) \cdot i\right] = -i$$

$$z = \frac{i}{-1 + ln\sqrt{2} + (2k\pi - \frac{\pi}{4}) \cdot i} \cdot \frac{-1 + ln\sqrt{2} - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot i}{-1 + ln\sqrt{2} - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot i} =$$

$$= \frac{2k\pi - \frac{\pi}{4} + i(-1 + ln\sqrt{2})}{(-1 + ln\sqrt{2})^2 + \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

2.21. Si $\mathbf{z + \frac{1}{z} = 2 \cdot cos\ t}$, hallar $\mathbf{z^n + \frac{1}{z^n}}$.

Resolución. Resolviendo $z^2 - 2z \cdot cos\ t + 1 = 0$, se obtiene $z = cos\ t \pm i \cdot sen\ t$.

$$z^n = (cos\ t + i \cdot sen\ t)^n = cos\ nt + i \cdot sen\ nt$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{cos\ t + i \cdot sen\ t} = \frac{cos\ t - i \cdot sen\ t}{cos^2 t + sen^2 t} = cos\ t - i \cdot sen\ t$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = (cos\ t - i \cdot sen\ t)^n = cos\ nt - i \cdot sen\ nt$$

$$z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2 \cdot cos\ nt$$

Del mismo modo, se hace con $cos\ t - i \cdot sen\ t$.

2.22. Demostrar la identidad $\mathbf{sh\ x + ch\ x = e^x}$.

Resolución.

$$sh\ x + ch\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x.$$

Ejercicios propuestos

Expresar en forma polar, trigonométrica y exponencial los números complejos:

2.23. $\mathbf{2+2i}$ **2.24.** $\mathbf{1+\sqrt{3}\cdot i}$ **2.25.** $\mathbf{i}$

Efectuar el producto y el cociente de los complejos $\mathbf{z_1}$ y $\mathbf{z_2}$ en forma binómica. Pasarlos a forma polar y efectuar su producto y cociente en esta forma, comparando los resultados obtenidos:

2.26. $\mathbf{z_1 = 1 + i,\ z_2 = i}$ **2.27.** $\mathbf{z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i}$.

Calcular:

2.28. $\mathbf{\sqrt[3]{1+i}}$ **2.29.** $\mathbf{\sqrt[4]{-i}}$ **2.30.** $\mathbf{\sqrt[3]{-8}}$.

2.31. Las raíces de una ecuación de segundo grado son $\mathbf{2+i}$ y $\mathbf{2-i}$. Escribir dicha ecuación.

2.32. Resolver la ecuación $\mathbf{\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1+i} = 2 + 3i}$.

2.33. Una raíz cúbica de un número complejo es igual a $\mathbf{1+i}$. Hallar dicho número complejo y sus otras dos raíces.

2.34. Hallar dos números complejos tales que el primero es imaginario puro, el módulo del segundo es igual a $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ y que la suma de ambos es igual a su producto.

2.36. Hallar un número complejo tal que su cuadrado sea igual a su conjugado.

2.37. Demostrar que el cociente de dos números complejos tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

Hallar los números complejos que cumplen:

2.38. $\mathbf{a + bi = |a + bi|}$

2.39. $\mathbf{(a + bi)^2 = (a - bi)^2}$

2.40. $\mathbf{|a + bi| = |a - bi|}$.

2.41. Demostrar que si z es una raíz n-sima de 1 ($\mathbf{z \neq 1}$), se cumple que $\mathbf{1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{n-1} = 0}$.

2.42. Hallar el valor de α sabiendo que:

$$(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos 2\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 2\alpha)...(\cos 50\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 50\alpha) = 1.$$

Sugerencia: Escribirlos en forma polar.

Demostrar las identidades:

2.43. $\mathbf{ch\ x - sh\ x = e^{-x}}$

2.44. $\mathbf{sh(x + y) = sh\ x \cdot ch\ y + ch\ x \cdot sh\ y}$

2.45. $\mathbf{ch\ 2x = ch^2 x + sh^2 y}$

2.46. $\mathbf{ch\ 2x = ch^2 x + sh^2 x}$

2.47. $\mathbf{\cos z = ch\ iz}$

2.48. $\mathbf{ch\ z = \cos iz}$

2.49. $\mathbf{sen\ z = \frac{1}{i} \cdot sh\ iz}$

2.50. $\mathbf{sh\ z = \frac{1}{i} \cdot sen\ iz}$

2.51. Escribir en forma binómica $\mathbf{e^{\sqrt{i}}}$.

2.52. Calcular sen i.

Capítulo 3

Sucesiones

En este capítulo introducimos el importante concepto de límite de una sucesión, haciendo hincapié en los diversos tipos de límites indeterminados. Al final se introducen las sucesiones de Cauchy.

3.1 Definiciones

Definición 3.1 *Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ en el conjunto $\mathbb{R}$.*

Los términos de la sucesión los numeramos mediante subíndices: a_1 designa el primer término, a_2 el segundo, etc. Así, pues

$$1 \in \mathbb{N} \to a_1 \in \mathbb{R}$$
$$2 \in \mathbb{N} \to a_2 \in \mathbb{R}$$
$$3 \in \mathbb{N} \to a_3 \in \mathbb{R}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Representamos la sucesión por $\{a_n\}$ y queda determinada de distintas formas:

1. Mediante una expresión llamada *término general* en la que aparece la letra n que, al tomar valores naturales, da lugar a los términos de la sucesión. Por ejemplo, si $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ ...$$

2. Dando algunos de sus términos. Por ejemplo, $1,\ -2,\ 3,\ -4$, etc.
Esta forma es la menos conveniente debido a su ambigüedad.

3. De forma recurrente, expresando cada término en función del término o términos que le preceden. Por ejemplo, la llamada sucesión de Fibonacci, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 3$, esto es, $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ ...$

Definición 3.2 *Si* $a \in \mathbb{R}$, *la sucesión cuyos términos son todos iguales a* a, *recibe el nombre de sucesión constante.*

Definición 3.3 *Una sucesión es* monótona creciente *si* $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Análogamente, definimos sucesión* monótona decreciente.

Ejemplo 3.1 *La sucesión* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ *es monótona decreciente.*

Definición 3.4 *Decimos que la sucesión* $\{a_n\}$ está acotada superiormente *si existe* $k \in \mathbb{R}$ / $a_n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Análogamente, definimos sucesión* acotada inferiormente. *Si una sucesión está acotada superior e inferiormente, decimos que está* acotada.

Ejemplo 3.2 *La sucesión del ejemplo anterior,* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, *está acotada entre 0 y 1.*

3.2 Límite de una sucesión

Definición 3.5 *El número* $a \in \mathbb{R}$ *es el límite de la sucesión* $\{a_n\}$ *si todo entorno de* a *contiene los infinitos términos de dicha sucesión desde uno de ellos en adelante, es decir, en todo entorno de* a *existen infinitos términos, quedando fuera de él un número finito.*

Ejemplo 3.3 *En la sucesión anterior, de término general* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, *el límite es cero, pues si se toma un entorno cualquiera de cero, por ejemplo* $(-0.1, 0.1)$, *los infinitos términos, a partir de* a_{10}, *están todos dentro de dicho entorno, quedando fuera de él los 10 primeros.*

Definición 3.6 *Dicho de otra forma, decimos que* a *es el límite de la sucesión* $\{a_n\}$ *si* $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta$ (δ *función de* ϵ) *tal que si* $n > \delta$ *se verifica* $|a_n - a| < \epsilon$.

Ejemplo 3.4 *En efecto, en la sucesión del ejemplo anterior,* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, *el límite es igual a cero ya que si tomamos* $\epsilon = 0.1$, *tenemos que* $\delta = 10$, *puesto que a partir de* a_{10} *se cumple que* $|a_n - 0| < 0.1$. *Tomando* $\epsilon = 0.01$, *tendríamos que* $\delta = 100$.

Que el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es a, lo representamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

y lo leemos *"el límite cuando* n *tiende a infinito de* a_n *es igual a* a*"*.

Consecuencia de la definición de límite es la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Si una sucesión tiene límite, éste es único.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ *tiene dos límites distintos* a *y* a', $a < a'$. *Si* $d = a' - a$, *tomando dos entornos* E *y* E', *de radios menores que* $d/2$ *y centros respectivos* a *y* a', *cada uno de ellos debe de contener infinitos términos de la sucesión, salvo un número finito. Esto es absurdo y, por tanto,* $a = a'$. $\square$

Ejemplo 3.5 *La sucesión* $\{a_n\} = (-1)^n \, \dfrac{n+1}{n}$ *aparenta poseer dos límites:* 1 *y* -1*. Pero tanto* 1 *como* -1 *no cumplen la definición de límite ya que si tomamos un entorno suficientemente pequeño de uno de ellos, a pesar de que contiene infinitos términos de la sucesión, quedan fuera, en las proximidades del otro, infinitos términos. A* 1 *y* -1 *les llamamos* puntos de acumulación*, ya que no les puede llamar límites.*

Definición 3.7 *A toda sucesión que posee límite le llamamos* sucesión convergente*.*

Proposición 3.2 *Toda sucesión monótona creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente), es convergente.*

Demostración. Sea M *tal que* $a_n \leq M$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Entonces, se cumple que* $a_1 \leq a_n \leq M$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Es decir, en el intervalo* $[a_1, M]$ *están todos los términos de la sucesión. Dividimos dicho intervalo en dos subintervalos* $[a_1, \frac{a_1+M}{2}]$ *y* $[\frac{a_1+M}{2}, M]$ *y tomamos aquel intervalo que contiene infinitos puntos. Repetimos el proceso infinitas veces y obtenemos una sucesión de intervalos que definen un único punto común (postulado de Cantor, sección 1.12) que es el límite de* a_n *ya que cualquier intervalo que contenga a dicho punto contendrá infinitos términos de la sucesión.*

De modo análogo lo demostraríamos para una sucesión decreciente y acotada inferiormente. □

3.3 Sucesiones divergentes

Definición 3.8 *Decimos que una sucesión* $\{a_n\}$ *es* divergente *si, fijado un número real* K*, existe un número natural* δ *(*δ *función de* K*) tal que* $\forall n > \delta$ *se verifica* $|a_n| > K$*.*

Ejemplo 3.6 *Por ejemplo, la sucesión* $\{a_n\} = 2n$ *diverge, ya que si tomamos* $K = 1000$*, entonces* $\delta = 500$*, puesto que a partir de* a_{500} *son todos los términos mayores que* K*. Análogamente, si* $K = 2000$*, entonces* $\delta = 1000$*.*

En la definición hemos tomado a_n en valor absoluto para incluir entre las divergentes a aquellas sucesiones que tienden a $-\infty$ y aquellas otras que tienden simultáneamente a $+\infty$ y a $-\infty$, como la sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \, n$.

3.4 Clasificación de las sucesiones

Toda sucesión pertenece a uno de estos tres grupos:

1. Sucesiones convergentes (que tienen límite).
2. Divergentes (que tienden a infinito).
3. Oscilantes (que no son convergentes ni divergentes).

3.5 Operaciones con sucesiones

Definición 3.9 *Dadas dos sucesiones,* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*, llamamos* suma *de ellas dos a la sucesión* $\{c_n\}$*, cuyos términos se obtienen de la forma* $c_i = a_i + b_i$*,* $\forall i \in \mathbb{N}$*. Análogamente, definimos el producto y el cociente de dos sucesiones. Este último siempre y cuando los términos del denominador sean distintos de cero.*

Ejemplo 3.7 *Sean*

$$\{a_n\} = \frac{n+1}{n} = 2,\ 3/2,\ 4/3,\ 5/4,\ 6/5, ...$$

$$\{b_n\} = \frac{1}{n} = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5, ...$$

Su suma, $\{a_n + b_n\} = \dfrac{n+2}{n} = 3,\ 4/2,\ 5/3,\ 6/4,\ 7/5, ...$

Su producto y cociente

$$\{a_n \cdot b_n\} = \frac{n+1}{n^2} = 2,\ 3/4,\ 4/9,\ 5/16,\ 6/25, ...$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = n+1 = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, ...$$

3.6 Propiedades de los límites

Dadas dos sucesiones convergentes, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, con límites respectivos a y b, se verifica

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

siendo los términos de b_n distintos de cero, presentándose los casos siguientes:

-Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la sucesión cociente es convergente de límite a/b.

-Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la sucesión cociente es convergente de límite cero.

Ejemplo 3.8 *Sea* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ *(convergente de límite igual a cero) y* $\{b_n\} = \dfrac{n+1}{n}$ *(convergente de límite igual a uno). Entonces,* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \dfrac{1}{n+1}$ *es convergente de límite cero.*

-Si $a \neq 0$ y $b = 0$, la sucesión cociente es divergente.

Ejemplo 3.9 *Tomando* $\{a_n\} = \dfrac{n+1}{n}$ *(convergente de límite igual a uno) y* $\{b_n\} = \dfrac{1}{n}$ *(convergente de límite igual a cero), entonces* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = n+1$ *es divergente.*

-Si $a = 0$ y $b = 0$, el límite del cociente es indeterminado y lo simbolizamos $0/0$.

Ejemplo 3.10 *Sean* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ *y* $\{b_n\} = \dfrac{1}{n^2}$*, convergentes a cero. Su cociente es* $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = n$*, que es divergente. Sin embargo, el cociente de* $\{a_n\} = \dfrac{2}{n^2}$ *y* $\{b_n\} = \dfrac{1}{n}$*, convergentes a cero, es* $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \dfrac{2}{n}$*, que converge a cero. Así, el cociente de dos sucesiones convergentes a cero puede ser convergente o divergente y, en principio, indeterminado.*

-Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a cero, el límite de $(a_n)^{b_n}$ es indeterminado. Lo simbolizamos 0^0.

3.7 Operaciones con sucesiones divergentes

1. La suma de dos sucesiones divergentes del mismo signo es otra sucesión divergente del mismo signo que las anteriores.

2. La suma de una sucesión convergente y una sucesión divergente es una sucesión divergente del mismo signo que ésta.

3. El límite de la diferencia de dos sucesiones divergentes del mismo signo, es indeterminado. Lo simbolizamos $\infty - \infty$.

4. El producto de dos sucesiones divergentes es una sucesión divergente.

5. El producto de una sucesión divergente por una convergente (que no tiende a cero), es una sucesión divergente.

6. El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión divergente, es indeterminado. Lo simbolizamos $0.\infty$.

Ejemplo 3.11 *Sean* $\{a_n\} = \dfrac{1}{n^2}$ *(convergente a cero) y* $\{b_n\} = n$ *(divergente). Su producto es* $\{a_n \cdot b_n\} = \dfrac{1}{n}$*, que converge a cero. Sin embargo, el producto de* $\{c_n\} = \dfrac{1}{n}$ *(convergente a cero) y* $\{d_n\} = n^2$ *(divergente) es* $\{c_n \cdot d_n\} = n$*, que es divergente.*

7. El límite del cociente de dos sucesiones divergentes es indeterminado. Se simboliza $\dfrac{\infty}{\infty}$.

8. El cociente de una sucesión convergente y una divergente es una sucesión convergente a cero.

9. Por último, si la sucesión $\{a_n\}$ diverge y la $\{b_n\}$ converge a cero, el límite de $(a_n)^{b_n}$ es una indeterminación, que se simboliza ∞^0.

Existen una serie de procedimientos para salvar todas estas indeterminaciones, como se verá a continuación.

3.8 Cálculo de límites

Vamos a ver ahora un conjunto de procedimientos y técnicas para calcular límites.

1. Límite del cociente de dos polinomios. Sea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + ... + b_1 n + b_0}$$

donde $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $p, q \in I\!N$. El límite es indeterminado, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de n, existiendo tres posibilidades:

a. $p = q$. Dividimos por n^p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p + \frac{a_{p-1}}{n} + \frac{a_{p-2}}{n^2} + ... + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \frac{a_0}{n^p}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{n} + \frac{b_{q-2}}{n^2} + ... + \frac{b_1}{n^{p-1}} + \frac{b_0}{n^p}}$$

El límite del numerador es a_p y el del denominador es b_q. Por tanto, el límite es a_p/b_q.

b. $p > q$. Dividimos por n^p y observamos que el numerador tiene por límite a_p, siendo el límite del denominador igual a cero. Por tanto, el límite es ∞.

c. $p < q$. Procedemos de un modo análogo y el límite es igual a cero.

2. Límites en los que aparecen expresiones irracionales. La forma habitual de hacerlos es multiplicar y dividir por el conjugado o por una expresión adecuada.

3. Límites del tipo ∞^0 y 0^0. Suelen hacerse tomando logaritmos.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

5. Criterio de Stolz-Cesàro. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \quad (I)$$

entonces existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (II)$$

y se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, cuando:

a) b_n es estrictamente creciente y divergente, o bien

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y la sucesión de término general b_n es monótona.

Está claro que aunque no exista el límite de la expresión (I) puede existir el de la expresión (II).

6. Criterio de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a.$$

7. Criterio de la media geométrica. Si $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 ... a_n} = a.$$

8. Criterio del cociente-raíz. Si $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

9. Fórmula de Stirling. Esta fórmula es de utilidad en algunos límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = 1.$$

3.9 Ordenes de infinitud para n $\to \infty$

A veces son de gran utilidad las desigualdades siguientes

$$n^n > n! > a^n > n^\alpha > ln\ n,\ con\ a > 1\ y\ \alpha > 0.$$

Cuando $n \to \infty$, el límite del cociente de una de ellas entre otra menor es infinito. Análogamente, el límite del cociente de una de ellas entre otra mayor es cero.

3.10 El número e

Vamos ahora a estudiar la sucesión

$$\{a_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Damos valores a n y obtenemos

$$a_1 = (1+1)^1 = 2$$
$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$
$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37...$$
$$a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.44...$$
....

La distancia entre los sucesivos términos de la sucesión se va reduciendo, lo que nos hace sospechar que la sucesión debe converger a un número real comprendido entre 2 y 3. Si damos valores más altos

$$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.5937...$$
....

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7048...$$
....
$$a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.7169...$$
....
$$a_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2.71814...$$
....
$$a_{100000} = \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2.7182682...$$

Si observamos las cifras que se repiten para valores altos de n, obtenemos el límite de esta sucesión
$$2.7182818284...$$
que es un número irracional trascendente (sección 1.3) al que designamos con la letra e, en recuerdo de Euler. Por tanto
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284...$$

Además, podemos demostrar que e no sólo es el límite de la sucesión de término general $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sino de $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$, siendo p cualquier expresión real que tienda a ∞.

Por otra parte, es inmediato que
$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$$
tomando $x = 1/n$. En general
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n(a_n-1)}$$
si $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$.

3.11 Aplicaciones del número e

Vamos a calcular el capital final C en que se convierte un capital inicial c, colocado a interés continuo. Su importancia radica en el hecho de que éste razonamiento sirve de modelo para muchas aplicaciones: desintegración radiactiva de una sustancia, demografía, crecimiento de una colonia de bacterias, etc.

Si se coloca, a interés simple y al tanto por cien anual r, un capital de c euros, al cabo de un año, c se ha convertido en $C = c + \frac{cr}{100}$. Sería mejor calcular los intereses semestralmente ya que de este modo los intereses de los primeros seis meses producirían nuevos intereses los seis meses siguientes. O mejor sería que el cálculo de intereses se hiciera mensualmente, ya que los intereses del primer mes producirían nuevos intereses el segundo, tercer, cuarto mes, etc., al igual que los intereses de éstos en meses sucesivos. Y mejor sería que el cómputo de intereses se hiciera cada dia, cada hora, cada minuto, cada segundo, etc., es decir, en intervalos de tiempo infinitamente pequeños. Este tipo de interés se llama *interés continuo*, cuando los intereses se acumulan al capital de modo instantáneo.

Para su cálculo, se va a dividir el año en p partes iguales y se va a utilizar el tanto por uno anual r, en lugar del tanto por ciento del interés simple. Suponiendo que se dispone de un capital c, al finalizar la primera de las p partes, un euro se transformó en $1 + r/p$.

Al final de la segunda parte, el euro ha producido unos intereses iguales a r/p, y los intereses han producido a su vez unos intereses iguales a $(r/p)^2$, como se puede ver fácilmente. Por tanto, al final de la segunda de las p partes, el euro se ha transformado en

$$1 + \frac{r}{p} + \frac{r}{p} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 = \left(1 + \frac{r}{p}\right)^2$$

Al final de la tercera parte, $\left(1 + \frac{r}{p}\right)^3$

Al final del año, esto es, al final de la última de las p partes, $\left(1 + \frac{r}{p}\right)^p$

Si el capital es c, al cabo del año, $c\left(1 + \frac{r}{p}\right)^p$

Si en lugar de un año, fuesen t años: $c\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pt}$

Cuando $p \to \infty$, cada una de las partes en que se ha dividido el año tiende a cero y los intereses se acumulan al capital de un modo instantáneo. Entonces, el capital final C producido por un capital inicial c, al tanto por uno anual r durante t años, es

$$C = \lim_{p\to\infty} c\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pt} = c \cdot e^{rt}$$

El interés del desarrollo anterior está en que el mismo razonamiento es aplicable a problemas de diversas ciencias.

Ejemplo 3.12 *Se coloca un capital de 50000 euros al 0.15 por uno anual y a interés continuo, durante 5 años. ¿Cuál es el capital final C?*

$$C = c \cdot e^{rt} = 50000 \cdot e^{0.15\times 5} = 105850 \; euros$$

Ejemplo 3.13 *Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 1000 años. Dentro de 3000 años, ¿qué cantidad quedará de 2 gramos de dicha sustancia?*

$$C = 2.e^{-0.001\times 3000} = 2.e^{-3} = 0.099 \; gr.$$

3.12 Sucesiones de Cauchy

Aparte de la sucesiones convergentes, cuyos términos están tan próximos al límite como se desee, se puede definir en un cuerpo ordenado K otro tipo de sucesiones cuyos términos están tan próximos entre sí como se quiera.

Definición 3.10 *Dada la sucesión $\{a_n\}$, con elementos de un cuerpo ordenado K, decimos que es regular, fundamental o de Cauchy si, y sólo si*

$$\forall \epsilon \in K^+, \ \exists \delta \in \mathbb{N} \ / \ |a_p - a_q| < \epsilon, \ \forall p, q > \delta, \ p, q \in \mathbb{N}.$$

En la anterior definición, no aparece el concepto de límite. Sin embargo:

Proposición 3.3 *Toda sucesión convergente en un cuerpo ordenado K, es de Cauchy en K.*

Demostración. Sea

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \epsilon \in K^+, \exists \delta \in \mathbb{N} \ / \ |a_n - a| < \epsilon/2, \ \forall n > \delta$$

Tomando $p > \delta$ y $q > \delta$:

$$|a_p - a_q| = |(a_p - a) - (a_q - a)| \le |a_p - a| + |a_q - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \square$$

Si $K = \mathbb{R}$, la proposición recíproca de la anterior también se verifica. Sin embargo, en un cuerpo ordenado cualquiera K, aunque toda sucesión convergente es de Cauchy, pueden existir sucesiones de Cauchy que no sean convergentes. Por ejemplo, en el cuerpo $\mathbb{Q}$, la sucesión $1, \ 1.4, \ 1.41, \ 1.414, ...$, es de Cauchy y no convergente en $\mathbb{Q}$, ya que su límite, $\sqrt{2}$, no pertenece a $\mathbb{Q}$ (sección 1.14).

Ejercicios resueltos

Hallar el término general, límite (si lo tienen) y clasificar las siguientes sucesiones:

3.1. $\mathbf{1/2, \ 4/3, \ 9/4, \ 16/5, \ ...}$ **3.2.** $\mathbf{4/5, \ 7/9, \ 10/13, \ 13/17, \ ...}$
3.3. $\mathbf{-1, \ 1, \ -1, \ 1, \ -1, \ 1, \ ...}$ **3.4.** $\mathbf{1, \ 2, \ 1, \ 4, \ 1, \ 6, \ 1, \ 8, \ 1, \ ...}$

Resolución. 1. $\{a_n\} = \dfrac{n^2}{n+1}$. Su límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$ (*indeterminado*)

Dividiendo numerador y denominador por n^2: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{0} = \infty$

Por tanto, la sucesión es divergente.

2. El numerador y denominador son dos progresiones aritméticas. Por tanto, $\{a_n\} = \dfrac{3n+1}{4n+1}$. Su límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n}{4+1/n} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$.

La sucesión es convergente de límite $\dfrac{3}{4}$.

3. $\{a_n\} = (-1)^n$. No es convergente ya que 1 y -1 no son límites sino puntos de acumulación. Si se toma un entorno conveniente de 1, fuera de dicho entorno quedan infinitos términos iguales a -1. La sucesión es oscilante.

4. Su término general

$$\{a_n\} = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } n \text{ } es \text{ } impar \\ n \text{ } si \text{ } n \text{ } es \text{ } par \end{cases}$$

Es oscilante, ya que 1 no es límite. Tomando un entorno de 1, los infinitos términos pares quedan fuera de dicho entorno. Tampoco es divergente ya que, fijado $k \in I\!R$, $k > 1$, los infinitos términos impares son menores que k.

3.5. Dada la sucesión 3/2, 5/4, 7/6, 9/8, 11/10,..., hallar
a. Término que ocupa el lugar 123.
b. Su límite.
c. El término de la sucesión a partir del cual la diferencia con el límite es, en valor absoluto, menor que 1/100.

Resolución. $\{a_n\} = \dfrac{2n+1}{2n}$.

a. $a_{123} = \dfrac{247}{246}$.

b. Su límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{2} = 1$

c. $|a_n - 1| < \dfrac{1}{100} \Rightarrow \left|\dfrac{2n+1}{2n} - 1\right| < \dfrac{1}{100} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2n}\right| < \dfrac{1}{100} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2n > 100 \Rightarrow n > 50$$

Apartir de a_{50}, la diferencia con el límite es menor que $\dfrac{1}{100}$.

3.6. La sucesión $\mathbf{a_1 = \sqrt{3}}$, $\mathbf{a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}}$, ¿es convergente?. Si la respuesta es afirmativa, hallar su límite.

Resolución. Está definida de forma recurrente (sección 3.1). La sucesión es monótona creciente y acotada y, por tanto, convergente (proposición 3.2). Para demostrar que es monótona creciente, se procede por inducción (sección 1.5). Para n=1

$$a_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3 + \sqrt{3}} = a_2$$

Se supone que la hipótesis es cierta para $n = k$: $a_k < a_{k+1}$. Se ha de demostrar para $n = k + 1$: $a_{k+1} < a_{k+2}$. En efecto

$$a_k < a_{k+1} \Rightarrow 3 + a_k < 3 + a_{k+1} \Rightarrow \sqrt{3 + a_k} < \sqrt{3 + a_{k+1}} \Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2}$$

La sucesión está acotada. Por ejemplo, 3 es una cota superior. En efecto, procediendo por inducción

$$a_1 = \sqrt{3} < 3$$

Si $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3+3} < 3$.

Por ser monótona creciente y acotada es convergente.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \Rightarrow a = \sqrt{3+a} \Rightarrow a^2 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

3.7. Empleando la definición de límite, demostrar que

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{n}} = \mathbf{1}.$$

Resolución. Recordando la definición de límite (sección 3.2), tomando un $\epsilon > 0$ cualquiera

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

Entonces, se verifica la definición para cualquier número natural $\delta > \frac{1}{\epsilon}$.

Por ejemplo, si $\epsilon = 0.1$, entonces $\delta > \frac{1}{\epsilon} = 10$. A partir de a_{10}, la distancia de los términos a 1 es menor que $\epsilon = 0.1$.

3.8. Hallar el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \frac{\mathbf{1+2+3+...+n}}{\mathbf{n^2}}.$$

Resolución. El numerador es la suma de una progresión aritmética

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

3.9. Hallar el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \frac{\mathbf{2^n - 1}}{\mathbf{3^n + 1}}.$$

Resolución. Es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos numerador y denominador por 3^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}} = \frac{0}{1} = 0$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, por ser $\frac{2}{3} < 1$.

3.10. Calcular el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \sqrt{\mathbf{n} + \sqrt{\mathbf{n}}} - \sqrt{\mathbf{n} - \sqrt{\mathbf{n}}}.$$

Resolución. Si multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

3.11. Calcular el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \frac{\mathbf{ln(3n^2+6n+1)}}{\mathbf{ln(4n+2)}}.$$

Resolución. Es indeterminado de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Sacamos factor común

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\left[n^2\left(3+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]}{ln\left[n\left(4+\frac{2}{n}\right)\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ ln\ n + ln\left(3+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{ln\ n + ln\left(4+\frac{2}{n}\right)}$$

Dividimos numerador y denominador por $ln\ n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{ln\left(3+\frac{6}{n}+\frac{1}{n}\right)}{ln\ n}}{1+\dfrac{ln\left(4+\frac{2}{n}\right)}{ln\ n}} = \frac{2+\dfrac{ln\ 3}{\infty}}{1+\dfrac{ln\ 4}{\infty}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

3.12. Calcular el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{1!+2!+3!+..+n!}}.$$

Resolución. Mediante el criterio de Stolz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!-(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{(n-1)!}{n!}}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

3.13. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}}{\mathbf{ln\ n}}.$$

Resolución. Aplicamos el criterio de Stolz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{ln\ n - ln\ (n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{ln\ e} = 1.$$

3.14. Hallar el límite de la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\} = \sqrt[n]{\mathbf{n}}.$$

Resolución. Mediante el criterio del cociente-raíz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3.15. Hallar el límite de la sucesión $\{\mathbf{a_n}\} = \dfrac{\mathbf{n}}{\sqrt[n]{\mathbf{n!}}}$.

Resolución.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

Aplicamos el criterio del cociente-raíz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

3.16. Idem $\{\mathbf{a_n}\} = \dfrac{\mathbf{n^n}}{\mathbf{n! \cdot e^n}}$.

Resolución. Aplicamos la fórmula de Stirling (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n! \cdot e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$$

3.17. Idem

$$\{\mathbf{a_n}\} = \sqrt[n]{\left(\frac{\mathbf{n+2}}{\mathbf{n+1}}\right)^{\mathbf{n^2+1}}}.$$

Resolución.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = 1^\infty$$

Es una indeterminación del tipo del número e. Se resuelve mediante la fórmula (sección 3.10)

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} (a_n - 1).b_n}$$

Por tanto

$$e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) \cdot \frac{n^2+1}{n}} = e$$

3.18. Idem

$$\{\mathbf{a_n}\} = \frac{\mathbf{ln\ n!}}{\mathbf{ln\ n^n}}.$$

Resolución. Aplicamos el criterio de Stolz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\ n! - ln\ (n-1)!}{ln\ n^n - ln\ (n-1)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\ n}{ln\ \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ln\ n}{ln\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\ n}{ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + ln\ n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ln\ n}{ln\ e + ln\ n} = 1$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando la fórmula de Stirling.

3.19. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \sqrt[n^2]{\mathbf{2 \cdot 4 \cdot 6\ ...\ 2n}}.$

Resolución. Mediante el criterio de la media geométrica (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2^o \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2 \cdot 4 \cdot 6\ ...\ 2n} = 1$$

(Ver ejercicio 3.14: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

3.20. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1 + 16 + ... + n^4}}{\mathbf{n^4}}\right)$

Resolución. Hacemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 16 + ... + n^4}{n^5}$ y aplicamos el criterio de Stolz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^5 - (n-1)^5} = \frac{1}{5}$$

3.21. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+2}}\right)^{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}}.$

Resolución. Tomamos logaritmos naturales

$$ln\ A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot ln\ \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2 \cdot ln\ (n+2)}{n}$$

Aplicamos el criterio de Stolz (sección 3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2 \cdot ln\ (n+2) + 2 \cdot ln\ (n+1)}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot ln\ \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 0$$

Por tanto, $A = e^o = 1$.

3.22. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \left(\mathbf{\frac{1}{1\cdot 2}} + \mathbf{\frac{1}{2\cdot 3}} + ... + \mathbf{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$.

Resolución. $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

3.23. Hallar el límite de la sucesión $\sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}},\ \sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}}, ...$

Resolución. El término general es $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}},\ n \geq 2$, siendo $a_1 = \sqrt{2}$. Si $n \to \infty$, tenemos

$$a = \sqrt{2a}$$

siendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Elevando al cuadrado, $a^2 = 2a$, que tiene soluciones iguales a 0 y 2. Evidentemente, $a = 2$.

Otra forma de hacerlo sería

$$a = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 2.$$

ya que el exponente es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente, $S = \dfrac{a_1}{1-r}$.

3.24. Demostrar que la sucesión $\mathbf{0.9},\ \mathbf{0.99},\ \mathbf{0.999},$ **... es de Cauchy. ¿Cuál es su límite?.**

Resolución. $\{a_n\} = 1 - \dfrac{1}{10^n}$. Tomamos $p = q + n$

$$|a_p - a_q| = |a_{q+n} - a_q| = \left|1 - \frac{1}{10^{q+n}} - 1 + \frac{1}{10^q}\right| = \left|\frac{1}{10^q} - \frac{1}{10^{q+n}}\right| =$$

$$\left|\frac{10^n - 1}{10^{q+n}}\right| = \left|\frac{1}{10^q} \cdot \frac{10^n - 1}{10^n}\right| < \frac{1}{10^q} < \epsilon$$

ya que $\left|\dfrac{10^n-1}{10^n}\right| < 1$.

Despejamos $q > \dfrac{-ln\ \epsilon}{ln\ 10} = -log\ \epsilon$. Por tanto, $\delta = -log\ \epsilon$.

Por ejemplo, si $\epsilon = 10^{-5}$, $\delta = -log\ 10^{-5} = 5$. A partir de a_5, la distancia entre dos términos cualesquiera es menor que $\epsilon = 10^{-5}$.

Ejercicios propuestos

Hallar el término general, límite (si lo tienen) y clasificar las siguientes sucesiones

$$\mathbf{3.25.}\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}, \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{13}}, \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{16}}, \ldots$$

$$\mathbf{3.26.}\ \mathbf{1},\ \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{6}}, \ \ldots$$

3.27. Dada la sucesión 6, $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{5}}$, ..., hallar: a) su término general. b) El término que ocupa el lugar 72. c) ¿Qué lugar ocupa el término igual a $\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}}$? d) ¿Posee límite?

3.28. Encontrar ejemplos de sucesiones tales que

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{b_n} = \mathbf{0}$$

y que cumplan

$$\text{a) } \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}} = \infty.$$

$$\text{b) } \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}} = \mathbf{0}.$$

$$\text{c) } \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}} = \mathbf{1}.$$

3.29. Demostrar que $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \dfrac{(\mathbf{-1})^{\mathbf{n+1}}}{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$.

3.30. Hallar el límite de la sucesión definida mediante la fórmula recurrente $\mathbf{a_n} = \sqrt{\mathbf{3} \cdot \mathbf{a_{n-1}}}$.

3.31. Demostrar que $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r^n}} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{r > 1}$. ¿Es cero el límite si $\mathbf{r < 1}$?.

3.32. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n + sen\ n}}$.

3.33. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3n^2+1)}{\ln\ n}$.

3.34. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\ \text{sen}\ n$.

3.35. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (1+2n^3)^{\frac{1}{1+3\ \ln\ n}}$.

3.36. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n(2n-\sqrt{n^2+2})$.

3.37. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(2n+1)}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$.

3.38. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3.39. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^a+2^a+...+n^a}{n^{a+1}}$.

3.40. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ n}{n}$.

3.41. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{a}-1)$.

3.42. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+a^{\frac{3}{n}}+...+a^{\frac{n}{n}}}{n}$**, con** $a>0$.

3.43. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^n$.

3.44. Calcular

$$\sqrt{3},\ \sqrt{\sqrt{3}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}},\ ...$$

Capítulo 4

Series numéricas

En este capítulo se introduce el concepto de serie numérica. Dicho concepto surge al estudiar la suma de los términos de una sucesión indefinida. Además de la suma de una serie, es del mayor interés el estudio de su convergencia, como ocurre con las sucesiones.

4.1 Concepto de serie

Definición 4.1 *Dada la sucesión $\{a_n\}$, cuyos términos pertenecen a $\mathbb{R}$, se forma la sucesión $\{A_n\}$, cuyos términos son las sumas parciales*

$$\begin{array}{l} A_1 = a_1 \\ A_2 = a_1 + a_2 \\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

esto es

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Al par ordenado de sucesiones $(\{a_n\}, \{A_n\})$ lo llamamos serie numérica *y lo representamos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. En la práctica, se suelen omitir las llaves, (a_n, A_n).*

Basta con tener una de las dos, a_n ó A_n, para obtener la otra ya que $a_n = A_n - A_{n-1}$.

Ejemplo 4.1 *De la sucesión $a_n = n$ obtenemos*

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 1 + 2 = 3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 4.2 *Sea la serie* $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots$*, donde* $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$*. Hacemos una descomposición en fracciones simples*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

con lo que

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ejemplo 4.3 *Dada la serie* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$*, es evidente que* $a_n = 2^{n-1}$*, y la suma parcial n-sima es la de una progresión geométrica*

$$A_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

4.2 Series convergentes

Definición 4.2 *Decimos que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si existe el límite finito* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

Al número A lo llamamos *suma* de la serie.

Ejemplo 4.4 *En la serie de un ejemplo anterior* $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots$*:*

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

4.3 Series divergentes

Definición 4.3 *Decimos que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente si la sucesión* A_1*,* A_2*, ...,* A_n*, es divergente.*

Ejemplo 4.5 *La serie* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ *es divergente ya que*

$$\lim_{n \to \infty} (2^n - 1) = \infty$$

Definición 4.4 *A una serie que no es ni convergente ni divergente se le llama oscilante.*

Ejemplo 4.6 *La serie* $a - a + a - a + a - a + \dots$ *es oscilante.*

4.4 Criterio general de convergencia

Proposición 4.1 *La condición necesaria para la convergencia de una serie es que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Como $a_n = A_n - A_{n-1}$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0. \quad \square$$

Dicho de otro modo, la condición necesaria pero no suficiente para que una serie sea convergente es que su término n-simo tienda a cero. Por ser condición necesaria y no suficiente, permite decidir los casos de no convergencia pero no los de convergencia. Es fácil obtener series no convergentes cuyo término general tiende a cero. Por ejemplo, la llamada serie *armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (sección 4.5).

4.5 Serie armónica

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, llamada *armónica*, es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

4.6 Serie geométrica

Definición 4.5 *Llamamos serie geométrica a aquella cuyos términos son la suma de una progresión geométrica:* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

Proposición 4.2 *Sea la serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ *en la que* r *es un número real.*

Si $|r| < 1$, *la serie es convergente y su suma es* $A = \frac{a}{1-r}$.

Si $|r| > 1$, *la serie es divergente.*

Si $r = 1$, *es divergente. Si* $r = -1$, *es oscilante.*

4.7 Series de términos positivos

Definición 4.6 *Decimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es de términos positivos si* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in I\!N$.

Estas series pueden ser convergentes o divergentes, pero en ningún caso oscilantes.

Por otra parte, las series de términos negativos se tratan del mismo modo que éstas, sin más que cambiar de signo.

Proposición 4.3 *La serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si, y sólo si, la sucesión de sumas parciales* A_n *está acotada.*

Demostración. La sucesión A_n es creciente, ya que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por estar acotada superiormente, es convergente, según un teorema anterior (sección 3.2). Recíprocamente, por ser convergente, está acotada. □

Criterio de comparación (I)

Sea $0 \leq a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Análogamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Demostración. Sean $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ y $B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Tenemos que $0 \leq A_n \leq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición anterior, B_n está acotada por ser $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente. Por lo tanto, también está acotada A_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, por la proposición anterior.

Del mismo modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la sucesión A_n no está acotada. Como $0 \leq A_n \leq B_n$, tampoco lo está B_n y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. □

Ejemplo 4.7 *Sea la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$. *Como* $\frac{3}{n} > \frac{1}{n}$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente (serie armónica, sección 4.5), también lo es la serie propuesta.*

Criterio de comparación (II)

Si $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$, entonces

a) Si $r \neq 0$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.

b) Si $r = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

c) Si $r = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

d) Si $r = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplo 4.8 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *converge, ya que dividiendo por la serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *(convergente, sección 4.5), el límite es igual a 1.*

Criterio de la raíz de Cauchy

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$.
Si $r < 1$, la serie converge.
Si $r > 1$, la serie diverge.
Si $r = 1$, caso dudoso.

Ejemplo 4.9 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ *es convergente, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Criterio de D'Alembert o del cociente

Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica
Si $r < 1$, converge.
Si $r > 1$, diverge.
Si $r = 1$, caso dudoso.

Ejemplo 4.10 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)\cdot n^3} = 0 < 1$$

Criterio de Raabe-Duhamel

Si $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica
Si $r > 1$, converge.
Si $r < 1$, diverge.
Si $r = 1$, caso dudoso.

Ejemplo 4.11 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+3} = 3 > 1.$$

Criterio del logaritmo de Cauchy

Si $a_n > 0$, para todo $n \in I\!\!N$, y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{ln\ n} = r$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica

Si $r > 1$, converge.
Si $r < 1$, diverge.
Si $r = 1$, caso dudoso.

Ejemplo 4.12 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cdot 5^{ln\ n}}$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n^3 \cdot 5^{ln\ n})}{ln\ n} = 3 + ln\ 5 > 1.$$

Criterio de Pringsheim

Si $a_n > 0$, para todo $n \in I\!\!N$, y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = r$, con $\alpha, r \in I\!\!R$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica

Si r es finito y $\alpha > 1$, la serie converge.
Si $r \neq 0$ y $\alpha \leq 1$, la serie diverge.

Ejemplo 4.13 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^3 + 5n}$ *diverge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} n\ \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^3 + 5n} = 3 \neq 0, \ \textit{con}\ \alpha = 1.$$

Criterio de la integral

Sea $f(x)$ una función positiva decreciente (ver tema 6), definida para todo $x \geq 1$, y tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in I\!\!N$. Entonces, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si existe (ver tema 9)

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx.$$

Ejemplo 4.14 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ *converge, ya que* $f(x) = xe^{-x^2}$ *es positiva y decreciente para* $x \geq 1$, *y existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n xe^{-x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{2e^{n^2}} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}.$$

4.8 Suma de una serie

Dada la sucesión de sumas parciales $A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2$, ..., $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, si existe un número real A, tal que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

decimos que la serie es convergente de *suma* igual a A.

A continuación, vamos a sumar algunas series notables.

Serie geométrica. Es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$, con $|r| < 1$, y su suma es $A = \dfrac{a}{1-r}$.

Ejemplo 4.15 *La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *es* $\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2}} = 6$.

Serie cociente de dos polinomios. Para hallar su suma, descomponemos la serie en fracciones simples y eliminamos términos.

Ejemplo 4.16 *Hallar la suma de la serie* $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ...$

Se descompone en fracciones simples $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, *con lo que:*

$$A_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La suma $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Serie hipergeométrica. Es aquella que verifica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma},$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$. Su suma es:

$$A = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Ejemplo 4.17 *Sea* $\dfrac{2}{4\cdot 5} + \dfrac{2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} + \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + ... + \dfrac{2\cdot 3\cdot 4\ ...\ (n+1)}{4\cdot 5\cdot 6\ ...\ (n+4)} + ...$

Abreviadamente, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+4)!}}{3!}$.

Es hipergeométrica, ya que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+2}{n+5}$, *con* $\alpha = 1$, $\beta = 2$ *y* $\gamma = 5$.

Su suma es $A = \dfrac{5\cdot\left(\dfrac{2}{4\cdot 5}\right)}{5-1-2} = \dfrac{1}{4}$.

Serie aritmético-geométrica. Es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, donde a_n es una progresión aritmética de diferencia d y b_n una progresión geométrica de razón r. Su suma es igual a

$$A = \frac{r}{b_1(r-1)} \left(a_1 + \frac{d}{r-1} \right).$$

Ejemplo 4.18 *La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2^n}$ *es* $A = \frac{2}{2(2-1)} \left(3 + \frac{4}{2-1} \right) = 7.$

Serie del tipo del número e. Es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \in I\!R$. Su suma es $A = e^a$.

4.9 Convergencia de series alternadas

Una serie es *alternada* si sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Criterio de Leibnitz. Si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$ converge.

Además, en las anteriores condiciones, las sumas parciales A_n de orden impar son valores aproximados por exceso de la suma A de la serie y las sumas pares son aproximaciones de A por defecto. Por otra parte, el error cometido no supera al primer término omitido en dicha suma. Esto es

$$0 \leq (-1)^n \cdot (A - A_n) \leq a_{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 4.19 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *es convergente, ya que* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...$ *y* $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ejemplo 4.20 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ln\ n}{n}$ *es convergente, ya que* $f(x) = \frac{ln\ x}{x}$ *es decreciente. En efecto*

$$f'(x) = \frac{1 - ln\ x}{x^2} < 0, \ para\ x > e.$$

Además, $\lim_{n \to \infty} \frac{ln\ n}{n} = 0.$

Ejemplo 4.21 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)(2n+3)}$ *es convergente, pues*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)(2n+3)} = 0$$

y es decreciente

$$a_{n+1} = \frac{1}{[3(n+1)+1][2(n+1)+3]} < \frac{1}{(3n+1)(2n+3)} = a_n$$

Como $a_4 = \frac{1}{13 \cdot 11} < 10^{-2}$, *se tiene que* $(-1)^4(A - A_3) \leq a_4 < 10^{-2} \Rightarrow A \approx A_3$, *con un error menor que* 10^{-2}. *El valor de* A_3

$$A_3 = \frac{1}{20} - \frac{1}{49} + \frac{1}{90} = 0.04$$

Por tanto, $A = 0.04$, *con un error menor que* 10^{-2}.

4.10 Suma de dos series

Definición 4.7 *Definimos el producto de un número real* k *por la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$.

Proposición 4.4 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a* A, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ *converge a* kA.

Demostración. Inmediata, ya que las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ son kA_n, de límite kA. □

Definición 4.8 *Definimos la suma de las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Proposición 4.5 *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergen a* A *y a* B, *respectivamente, la suma* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge a* $A + B$.

Demostración. Inmediata. Las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ son $A_n + B_n$, de límite $A + B$. □

Ejercicios resueltos

Estudiar la convergencia de las series

4.1. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n^2+1}}{\mathbf{n\ a^n}}, \ \mathbf{a>0}.$

Resolución. Aplicamos el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)a^{n+1}}}{\dfrac{n^2+1}{na^n}} = \frac{1}{a}$$

Si $a>1$, converge.
Si $a<1$, diverge.
Si $a=1$, diverge, ya que el límite del término general es distinto de cero (sección 4.4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty \neq 0.$$

4.2. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n^2}}{\mathbf{(n+1)!}}.$

Resolución. Aplicamos el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} = 0 < 1. \textit{ Converge.}$$

4.3. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n^2-1}}.$

Resolución. Comparamos con la serie armónica (sección 4.5)

$$\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}. \textit{ Divergente.}$$

4.4. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}.$

Resolución. Aplicamos el criterio de Pringsheim ($\alpha=1$) (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} n\ \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 1. \textit{ Divergente.}$$

4.5. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{(n-2)(n-3)}}.$

Resolución. No converge, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (criterio general de convergencia, sección 4.4).

4.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3n-5}}\right)^{\mathbf{n}}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de la raíz de Cauchy (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-5} = \frac{1}{3} < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n^4-3}}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de Pringsheim (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \frac{n}{n^4-3} = 1 \neq \infty$$

Como $\alpha = 3$, la serie converge. También se podría hacer mediante el criterio de Raabe (sección 4.7).

4.8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{3+n^{\frac{3}{2}}}}$.

Resolución. Mediante el criterio de Pringsheim (sección 4.7),

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n+1}{3+n^{\frac{3}{2}}} = 1 \neq 0$$

Como $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la serie diverge.

4.9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\mathbf{2n-1}} - \sqrt{\mathbf{n}})$.

Resolución. El límite de a_n es igual a

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n-1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}} = \infty \neq 0.$$

Por tanto, la serie diverge (sección 4.4).

4.10. Analizar si son falsas o ciertas las afirmaciones siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$ **no convergente** $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_n}}$ **convergente.**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$ **convergente,** $\mathbf{a_n \neq 0} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+a_n}}$ **convergente.**

c) $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ **convergente,** $\mathbf{a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n}$ **convergente.**

Resolución. a) Falso, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica, sección 4.5) y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ también lo es.

b) Falso, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie armónica, sección 4.5) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ no es convergente ya que su límite es $1 \neq 0$ (sección 4.4).

c) Cierto, ya que el límite del cociente de ambas es $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{n+1}{n} \cdot a_n} = 1$. Por tanto, las dos han de tener el mismo carácter (criterio de comparación (II), sección 4.7).

4.11. Estudiar el carácter de la serie $\mathbf{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^k}{(n-1)!}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{n!}}{\frac{n^k}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{n^{k+1}} = 0 < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.12. Estudiar el carácter de la serie $\mathbf{\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n}{n-1}\right]^{-n}}$**.**

Resolución. Aplicamos el criterio de la raíz de Cauchy (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n}{n-1}\right]^{-1} = \frac{1}{e+2} < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.13. Estudiar el carácter de la serie $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{4^n}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+1)!}{4^{n+1}}}{\frac{(n+1)\cdot n!}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{4} = \infty. \textit{ Divergente.}$$

4.14. Idem $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1. \ \textit{Convergente.}$$

4.15. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \left(\mathbf{1+\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{n}}$**.**

Resolución. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. *Divergente.* (*crit. gen. conv.*)

4.16. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \frac{\mathbf{n+3}}{\mathbf{n-1}}$**.**

Resolución. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n-1} = 1 \neq 0$. *Divergente.* (*crit. gen. conv.*)

4.17. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{ln\ 2})^{\mathbf{n}}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln\ 2} > 1. \ \textit{Divergente.}$$

4.18. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n! \cdot 2^n}}{\mathbf{n^n}}$**.**

Resolución. Utilizando el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n! \cdot 2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1. \ \textit{Converge.}$$

4.19. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{4 \cdot 7 \cdot 10 ... (3n+1)}}{\mathbf{2 \cdot 6 \cdot 10 ... (4n-2)}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 ... (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 ... (4n+2)}}{\dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 ... (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 ... (4n-2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1. \ \textit{Convergente.}$$

4.20. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n+1})^{\mathbf{3}}}$**.**

Resolución. Comparamos con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (sección 4.5),

$$\frac{n}{(n+1)^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \text{ (}\textit{crit. de comp. (I)}\text{)}$$

Es convergente, puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

4.21. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{n^2}}{\mathbf{(n+1)!}}$**.**

Resolución. Utilizamos el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}}{\frac{n^2}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot n^2} = 0 < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.22. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{\cos^2 n}}{\mathbf{3^n}}$**.**

Resolución. Comparamos con la serie geométrica (sección 4.6)

$$\frac{cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

puesto que $cos^2 n \leq 1$.

Es convergente, por serlo $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ya que $\frac{1}{3} < 1$.

4.23. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{n^n}}{\mathbf{3^n \cdot n!}}$**.**

Resolución. Mediante el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{e}{3} < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.24. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{n^n}}{\mathbf{n!}}$**.**

Resolución. Utilizamos el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1. \textit{ Divergente.}$$

4.25. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$.

Resolución. Comparamos con la serie armónica (sección 4.5)

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

como la serie armónica es convergente, también lo es la serie propuesta (criterio de comparación (I), sección 4.7).

4.26. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Resolución. Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.27. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Resolución. Utilizamos el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.28. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Resolución. Mediante el criterio de D'Alembert (sección 4.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{1}{4} < 1. \textit{ Convergente.}$$

4.29. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Resolución. $A_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$

Se trata de una serie geométrica (sección 4.6). Su suma

$$A = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

4.30. Sumar la serie $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n(n+2)}}$.

Resolución. Hacemos una descomposición en fracciones simples

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

La suma parcial A_n es

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$$

La suma es $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)} = \dfrac{3}{2}$.

Es una serie convergente de suma igual a $\dfrac{3}{2}$.

4.31. Sumar la serie $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(n+2)(n+3)}}$.

Resolución. Procedemos como en el ejercicio anterior

$$A_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \Rightarrow A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{3}.$$

Otra forma de hacerlo sería considerando que es una serie hipergeométrica (sección 4.8).

4.32. Sumar la serie $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n+12}}{\mathbf{n^3+5n^2+6n}}$.

Resolución. Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n} = \frac{2}{n} - \frac{5}{n+2} + \frac{3}{n+3}$$

Llamamos $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ...$ y tenemos que

$$A_n = 2H_n - 5H_n + 3H_n + 5\cdot 1 + 5\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot 1 - 3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{3} = 2.$$

4.33. Idem $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \binom{\mathbf{n+3}}{\mathbf{3}}^{\mathbf{-1}}$.

Resolución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{3}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n+1} - \frac{6}{n+2} + \frac{3}{n+3}\right)$$

Procedemos como en el problema anterior

$$A_n = 3H_n - 6H_n + 3H_n - 3 + 6 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

4.34. Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n}$.

Resolución. Se trata de una serie aritmético-geométrica (sección 4.8), ya que el numerador es una progresión aritmética de diferencia 2, y el denominador es una progresión geométrica de razón 7. Su suma será:

$$A = \frac{7}{7(7-1)} \cdot \left(3 + \frac{2}{7-1}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}.$$

4.35. Hallar la suma parcial A_n de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ y demostrar que es divergente.

Resolución. $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = (ln\ 2 - ln\ 1) + ... + [ln\ (n+1) - ln\ n)] =$

$$= ln\ (n+1) - ln\ 1 = ln\ (n+1).$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} ln(n+1) = \infty$. Divergente.

4.36. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(n+4)(n+5)}$.

Resolución. Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{7}{(n+4)(n+5)} = 7 \cdot \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$$

La suma parcial A_n es

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n =$$

$$= \left(\frac{7}{5} - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6} - \frac{7}{7}\right) + ... + \left(\frac{7}{n+4} - \frac{7}{n+5}\right) = \frac{7}{5} - \frac{7}{n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5} - \frac{7}{n+5}\right) = \frac{7}{5}$$

La suma de la serie es igual a $\frac{7}{5}$.

4.37. Sumar la serie $\mathbf{\frac{5}{2}+\frac{8}{4}+\frac{11}{8}+\frac{14}{16}+...}$

Resolución. Es una serie aritmético-geométrica (sección 4.8), con $d=3$, $r=2$, $a_1=5$ y $b_1=2$. Su suma,

$$A=\frac{r}{b_1(r-1)}\cdot\left(a_1+\frac{d}{r-1}\right)=\frac{2}{2(2-1)}\cdot\left(5+\frac{3}{2-1}\right)=8.$$

4.38. Sumar la serie $\mathbf{\frac{2}{4}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+...}$

Resolución. Es una serie hipergeométrica (sección 4.8), ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n+4}$$

siendo $\alpha=1$, $\beta=2$ y $\gamma=4$. Su suma: $A=\dfrac{\gamma a_1}{\gamma-\alpha-\beta}=\dfrac{4\cdot\frac{2}{4}}{4-1-2}=2.$

4.39. Sumar la serie $\mathbf{\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$.

Resolución. $ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)=ln\,\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}.$

Por tanto

$$\begin{gathered}A_n=ln\,\frac{3\cdot 1}{2^2}+ln\,\frac{4\cdot 2}{3^2}+ln\,\frac{5\cdot 3}{4^2}+...+ln\,\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}=\\=ln\,3+ln\,1-2\cdot ln\,2+ln\,4+ln\,2-2\cdot ln\,3+ln\,5+ln\,3-2\cdot ln\,4+\\+...+ln(n+1)+ln(n-1)-2\cdot ln\,n=\\=-ln\,2+ln\,(n+1)-ln\,n=-ln\,2+ln\,\left(\frac{n+1}{n}\right).\end{gathered}$$

Su suma es $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-ln\,2+ln\,\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right]=-ln\,2.$

4.40. Demostrar que la serie alternada

$$\mathbf{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}+...}$$

es convergente y averiguar el número de términos preciso para calcular su suma con un error menor que 0.001.

Resolución. Utilizamos el criterio de Leibnitz (sección 4.9). Para ello, es preciso verificar que la sucesión de término general $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ es decreciente.

En efecto

$$a_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)-1}=\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n-1}=a_n.$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Por tanto, la serie converge. Además,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} < 0.001 \Rightarrow n = 499.5$$

Habrá que tomar 500 términos para obtener la suma de la serie con un error menor que 0.001.

4.41. Dada la serie $-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}+...$, demostrar que es convergente y hallar su suma con un error menor que 0.01.

Resolución. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} = a_n$$

Es convergente. Por otra parte

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0.5,\ a_3 = 0.16,\ a_4 = 0.04...,\ a_5 = 0.008... < 0.01$$

Será preciso tomar cuatro términos, ya que el error cometido al hallar la suma es menor que el primer término omitido $a_5 = 0.008...$. Por tanto, la suma A, por defecto, será $A = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = \frac{-5}{8}$.

Ejercicios propuestos

Estudiar la convergencia de las series siguientes:

4.42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$

4.43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n}$

4.44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

4.45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

4.46. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{2^n}}{\mathbf{n^2+n}}$

4.47. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{2^n}}$

4.48. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n\sqrt{n}}}$

4.49. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{(n^2-1)\cdot \ln\ n}}$

Dadas las series siguientes, se pide: a) Su término general. b) Demostrar que son convergentes. c) Su suma.

4.50. $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$

4.51. $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

4.52. Sumar la serie $\mathbf{0.045+0.015+0.005+\ldots}$

4.53. Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{n}}.$

4.54. Hallar, con un error menor que 0.001, la suma de la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\mathbf{n}}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n\cdot 10^n}}.$

Capítulo 5

Límite y continuidad de una función

El estudio de las funciones es uno de los temas fundamentales del Cálculo. En este capítulo se hace una introducción a las funciones reales de una variable real y a los conceptos de límite y continuidad en un punto.

5.1 Introducción

Definición 5.1 *Dados dos subconjuntos* $A, B \subseteq \mathbb{R}$, *llamamos función a toda aplicación (ver nota sección 1.6) de* A *en* B, $f : A \to B$, *es decir, a toda correspondencia entre* A *y* B *que asigna a cada valor de* $x \in A$ *un único valor* $y = f(x) \in B$.

A la variable y, cuyo valor depende del valor dado a x, se le llama *variable dependiente*. A x se le llama *variable independiente*. Se representa la función por $y = f(x)$.

Ejemplo 5.1

$$y = 3x + 1$$

$$y = sen x$$

$$y = \frac{x+1}{x+3}$$

Definición 5.2 *Decimos que la función* $y = f(x)$ *está definida en un punto* $x = c$ *si existe* $f(c)$. *Análogamente, decimos que* $f(x)$ *está definida en un intervalo* (a, b) *si está definida para todo valor* $x \in (a, b)$.

Definición 5.3 *Llamamos dominio de definición o campo de existencia de una función* $y = f(x)$ *al conjunto de valores de* x *para los que* $f(x)$ *está definida. Lo representamos por Dom* f.

Definición 5.4 *Llamamos imagen o recorrido de una función* $y = f(x)$ *al conjunto de valores de* y *para los que existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $y = f(x)$. *Lo representamos Im* f.

Ejemplo 5.2 .

$$f(x) = 3x + 2; \quad Dom\ f = \mathbb{R}; \quad Im\ f = \mathbb{R}.$$
$$f(x) = sen\ x; \quad Dom\ f = \mathbb{R}; \quad Im\ f = [-1, 1].$$
$$f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad Dom\ f = \mathbb{R} - \{1\}; \quad Im\ f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

5.2 Tipos de funciones

Definición 5.5 *Función* algebraica *es aquella en que las operaciones que se realizan con la variable independiente son suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.*

Ejemplo 5.3 *La función* $y = \dfrac{4-5x^2}{3x+1}$ *es algebraica.*

Definición 5.6 *Funciones* trascendentes *son las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.*

Definición 5.7 *Función* explícita *es aquella en la que la variable dependiente está despejada. Si la variable no está despejada, la función recibe el nombre de* implícita*. En funciones implícitas sencillas, es posible despejar la variable y escribir la función en su forma explícita.*

Definición 5.8 *Funciones* irracionales *son aquellas en las que la variable aparece bajo el signo radical o con exponente fraccionario. En caso contrario se llaman* racionales.

Definición 5.9 *Función* fraccionaria *es aquella en la que la variable independiente aparece en el denominador o con exponente negativo. En caso contrario, la función se llama* entera.

5.3 Suma, producto y cociente de dos funciones

Definición 5.10 *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones y $D \subseteq \mathbb{R}$ es la intersección de sus dominios de definición, definimos la* suma *de $f(x)$ y $g(x)$ como la función $h(x) = f(x) + g(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$.*

Ejemplo 5.4 *Sean $f(x) = ln\ x$ y $g(x) = \sqrt{3-x}$, de dominios respectivos* $(0, \infty)$ *y* $(-\infty, 3]$*. La función $h(x) = f(x) + g(x) = ln\ x + \sqrt{3-x}$ tiene por dominio* $(0, 3] = (0, \infty) \cap (-\infty, 3]$.

Análogamente, definimos la función *producto* $f(x) \cdot g(x)$ y *cociente* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, esta última con $g(x) \neq 0$.

5.4 Composición de funciones

Definición 5.11 *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Llamamos función compuesta $(g \circ f)(x)$ a la función definida en la forma*

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Ejemplo 5.5 *Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 4$.*

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = 3(2x+1) - 4 = 6x - 1$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x-4) = 2(3x-4) + 1 = 6x - 7$$

En el anterior ejemplo se observa que, en general, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

5.5 Función inversa

Definición 5.12 *Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, esto es, tal que todo elemento $y \in B$ es imagen de un único elemento $x \in A$ (ver nota sección 1.6), definimos la función inversa $f^{-1} : B \to A$, como aquella que verifica*

$$f^{-1}[f(x)] = x, \ \forall x \in A$$
$$f[f^{-1}(y)] = y, \ \forall y \in B$$

Nota. Conviene no confundir $f^{-1}(x)$ con $\dfrac{1}{f(x)}$.

Ejemplo 5.6 *Sea la función $f(x) = 3x - 1$. Para hallar la función inversa de $f(x)$ se intercambian las variables x e y: $x = 3y - 1$. Se despeja $y = \dfrac{x+1}{3}$. La función inversa de $f(x) = 3x - 1$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.*

Evidentemente, las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que si el punto (a, b) pertenece a una de las gráficas, el punto (b, a) pertenece a la otra. En este hecho se basa el cálculo de la función inversa $f^{-1}(x)$ (ver ejemplo anterior).

5.6 Límite de una función

Definición 5.13 *Decimos que la función $f(x)$ tiene por límite a la derecha del punto $x = x_0$ el número real l si a toda sucesión de valores de x, que tiende a x_0 por la derecha, le corresponde una sucesión de valores de $f(x)$ que tiene por límite l. Lo representamos $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.*

Análogamente, definimos límite por la izquierda. Lo representamos en la forma $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Para que exista el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es necesario y suficiente que se verifique $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Definición 5.14 *También podemos decir que l es el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 si* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta\ (func.\ de\ \epsilon) > 0\ /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

Ejemplo 5.7 *Sea la función* $f(x) = \begin{cases} x+1 \ si\ x \geq 1 \\ x+2 \ si\ x < 1 \end{cases}$

Considerando una sucesión de valores de x que tienda a 1 por la derecha y sus correspondientes imágenes

$$\begin{array}{rl} x: & 1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ ... \\ f(x): & 2.1,\ 2.01,\ 2.001,\ ... \end{array}$$

Las imágenes constituyen una sucesión que tiene por límite 2. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Por la izquierda

$$\begin{array}{rl} x: & 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ ... \\ f(x): & 2.9,\ 2.99,\ 2.999,\ ... \end{array}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$.

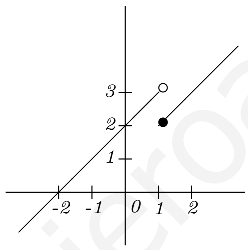

Figura 5.1

Como los límites a derecha e izquierda no coinciden, la función no posee límite en $x = 1$.

En la práctica, los cálculos se disponen de la siguiente forma

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0}\ (1+h) + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0}\ (1-h) + 2 = 3$$

puesto que si los valores de h son positivos y tienden a cero, i.e.: 0.1, 0.01, 0.001,..., *es evidente que los valores de $1+h$ tienden a 1 por la derecha y, análogamente, los de $1-h$ tienden a 1 por la izquierda.*

5.7 Propiedades de los límites

1. El límite de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$, si existe, es único.

2. El límite del producto de un número real k por una función, en un punto $x = x_0$, es igual al producto de k por el límite de la función

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

3. El límite de la suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual a la suma de los límites respectivos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

4. El límite del producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual al producto de los límites respectivos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

5. El límite del cociente de dos funciones es $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual al cociente de los límites respectivos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \quad \textit{siendo} \ \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

5.8 Función continua

Definición 5.15 *Decimos que la función $f(x)$ es continua en un punto $x = x_0$ si y sólo si:*

1) $f(x)$ está definida en $x = x_0$.

2) Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, esto es, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ejemplo 5.8 *Estudiar en $x = 1$ la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 \ \textit{si} \ x \leq 1 \\ x + 3 \ \textit{si} \ x > 1 \end{cases}$$

Sol.: 1) $f(1) = 6$.

2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} (1+h) + 3 = 4.$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (1-h)^2 + 5 = 6.$

La función carece de límite en $x = 1$ ya que no coinciden los límites a derecha e izquierda. Por lo tanto, no es continua en dicho punto.

Otra forma de definir función continua en un punto $x = a$ es:

Definición 5.16 *La función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si y sólo si se verifica que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0\ /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*

La expresión $\delta(\epsilon, x_0)$ simboliza que δ es función de ϵ y x_0.

Esta definición equivale a decir que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Es decir, que existe el límite en el punto $x = x_0$ y coincide con $f(x_0)$.

Definición 5.17 *Decimos que la función $f(x)$ es continua por la derecha en un punto $x = x_0$ si satisface la definición anterior de función continua reemplazando el límite en dicha definición por el límite por la derecha en el punto x_0. Análogamente, definimos función continua por la izquierda. Una función es continua en un punto x_0 si, y sólo si, es continua por la derecha y por la izquierda en x_0.*

Definición 5.18 *Una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) y además es continua por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.*

5.9 Tipos de discontinuidades

1. *Discontinuidad evitable.* Se presenta cuando la función posee límite en un punto $x = x_0$ (coinciden los límites laterales) y, sin embargo, dicho límite no coincide con el valor de la función en ese punto, como ocurre en la función de la figura 5.2

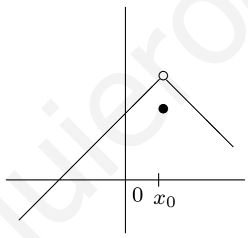

Figura 5.2

2. *Discontinuidad de primera especie.* Ocurre cuando existen los límites a derecha e izquierda en el punto $x = x_0$, pero no coinciden sus valores. La función presenta un *salto* igual a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Ver figura 5.3.

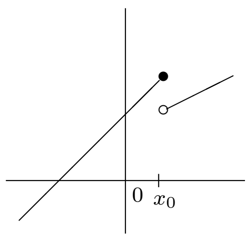

Figura 5.3

3. *Discontinuidad de segunda especie o esencial.* Ocurre cuando en un punto no existen o son infinito uno o los dos límites laterales. La función de la figura 5.4 presenta discontinuidades de este tipo en los puntos x_1, x_2 y x_3

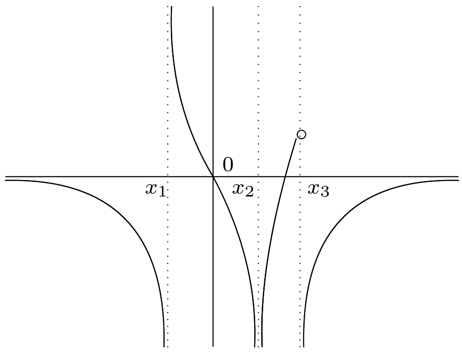

Figura 5.4

Por otra parte, si se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el punto $x = x_0$, su suma, producto, composición y cociente (si $g(x_0) \neq 0$) son continuas en $x = x_0$.

Asimismo, las funciones elementales, sen x, cos x, arcsen x, arccos x, log x, polinómicas y exponenciales, son continuas en sus dominios respectivos.

5.10 Crecimiento y decrecimiento

Definición 5.19 *Decimos que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, es creciente en el intervalo $(a, b) \subseteq D$ si $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Gráficamente

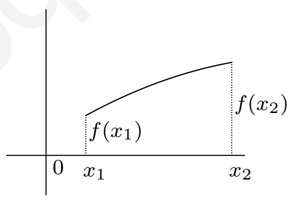

Figura 5.5

Análogamente, definimos *función decreciente.*

Definición 5.20 *Decimos que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, es decreciente en el intervalo $(a, b) \subseteq D$ si $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

5.11 Máximo y mínimo de una función. Acotación

Definición 5.21 *Decimos que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, está* acotada superiormente *si $\exists k \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in D,\ f(x) \leq k$.*

Análogamente, definimos función *acotada inferiormente.*

Definición 5.22 *Decimos que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, está* acotada inferiormente *si $\exists k \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in D,\ f(x) \geq k$.*

Definición 5.23 *Si una función $f(x)$ está acotada superiormente e inferiormente, decimos que está* acotada.

Definición 5.24 *Decimos que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, presenta un* máximo absoluto *en un punto $x_0 \in D$ si $\forall x \in D,\ f(x) \leq f(x_0)$. Análogamente, se define* mínimo absoluto.

Definición 5.25 *Si existe un intervalo $(a,b) \subset D$ / $\forall x \in (a,b),\ f(x) \leq f(x_0)$, decimos que la función $f(x)$ presenta un* máximo relativo *en el punto $x_0 \in (a,b)$. Análogamente, definimos* mínimo relativo.

Proposición 5.1 *Toda función $f(x)$, continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, está acotada en él.*

Demostración. Si $f(x)$ no está acotada, existirán valores en $[a,b]$ para los que $f(x) > k$, siendo k un número real cualquiera. Si se divide $[a,b]$ en dos partes iguales, al menos en una de ellas habrá valores para los que $f(x) > k$. Dividiendo dicha parte en dos partes iguales, habrá valores para los que $f(x) > k$ en una de las dos. Reiterando el proceso, se obtiene una sucesión de intervalos encajados, cuya amplitud tiende a cero, en los que existen valores para los que $f(x) > k$.

Según el postulado de Cantor, existe un valor α, común a todos los intervalos, para el que es posible encontrar un entorno en el que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$, por ser la función continua en $\alpha \in [a,b]$. Pero en este entorno hay valores para los que $f(x) > k$, lo que contradice que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$. Por tanto, la función ha de estar acotada en contra de lo supuesto al comienzo. $\square$

Ejemplo 5.9 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, continua en $(3,7]$, no está acotada en dicho intervalo, ya que para valores de x mayores que 3 y arbitrariamente próximos a él, toma valores mayores que cualquier número positivo. Ello es debido a que no es continua en $x = 3$. Ver figura 5.6.*

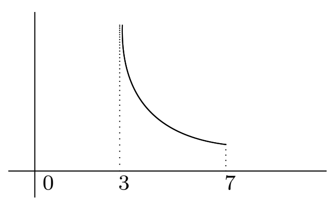

Figura 5.6

Ejemplo 5.10 *La proposición recíproca de la anterior, no es cierta. Por ejemplo, la función $f(x) = x - E(x)$, donde $E(x)$ es la "parte entera de x", está acotada en el intervalo $[0,2]$ y, sin embargo, es discontinua en $1 \in [0,2]$. Ver figura 5.7.*

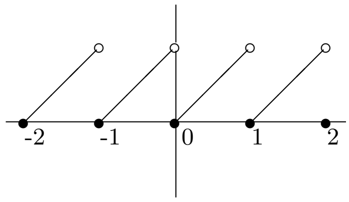

Figura 5.7

Teorema 5.1 *(Weierstrass) Toda función $f(x)$, continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, admite un máximo y un mínimo en [a,b].*

Demostración. *La haremos para el máximo. Según la proposición anterior, $f(x)$ está acotada en $[a,b]$, por ser continua en un intervalo cerrado. Sea k la menor de las cotas superiores. Si existe $x_0 \in [a,b]$ / $f(x_0) = k$, ya está demostrado. De no ser así, ha de cumplirse que $k - f(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$. Entonces, por la proposición anterior, $\exists k' \in I\!R$ / $\dfrac{1}{k - f(x)} < k'$, por ser $g(x) = \dfrac{1}{k - f(x)}$ continua en $[a,b]$. Por tanto, $\dfrac{1}{k - f(x)} < k' \Rightarrow k - f(x) > \dfrac{1}{k'} \Rightarrow f(x) < k - \dfrac{1}{k'}$, lo que indica que k no es la menor de las cotas superiores, en contra de lo supuesto. Hay que rechazar la hipótesis de que el máximo no es alcanzado por la función.*

Análogamente lo demostraríamos para el mínimo. $\square$

Proposición 5.2 *Si la función $f(x)$ es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno de x_0 en el que la función tiene el mismo signo que en el punto x_0.*

Demostración. *Por ser $f(x)$ continua en x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Siendo $f(x_0) = l > 0$ y tomando $\epsilon = l > 0$, existe un entorno de x_0 para el que $|f(x) - f(x_0)| < l$. De aquí se deduce que $f(x) - f(x_0) > -l \Rightarrow f(x) > 0$, pues $f(x_0) = l$.* $\square$

Teorema 5.2 *(Bolzano) Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y toma valores de signo opuesto en a y en b, la función se anula al menos en un punto interior de $[a,b]$.*

Demostración. *Se supone que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, sin perder generalidad. Se considera el punto medio del intervalo $[a,b]$: $\dfrac{a+b}{2}$. Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, el teorema está demostrado. De no ser así, por ejemplo si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, se considera el intervalo $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, en los extremos del cual la función toma valores de signo opuesto. Se repite el proceso, considerando el punto medio de este intervalo: $\dfrac{a + \frac{a+b}{2}}{2}$. Si la función se* *anula es este punto, ya está demostrado. De no ser así, se sigue adelante. Según el postulado de Cantor, existe un punto α, perteneciente a todos los intervalos, en el que la función se anula ya que, de no ser así, $f(x)$ ha de ser positiva en un entorno de α, si $f(\alpha) > 0$, o negativa si $f(\alpha) < 0$, según la proposición anterior. Esto contradice el hecho de que $f(x)$ toma valores de signo opuesto en los extremos de cada intervalo.* □

Ejemplo 5.11 *La ecuación cos $x - 2x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Sol: La función $f(x) = \cos x - 2x + 1$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ por ser suma de funciones continuas en dicho intervalo. Además:

$$f(0) = 2 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 1 < 0$$

Según el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ / \ f(\alpha) = 0$.

5.12 Continuidad uniforme

Recordando la sección 5.8, dada una función $f(x)$, de dominio de definición D, decimos que es continua en $x_0 \in D \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon, x_0) > 0 \ / \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

En la anterior definición observamos que el valor de δ no depende solamente del valor tomado para ϵ, sino que depende también del punto en cuestión x_0. En general, no será posible encontrar un único δ para un valor dado de ϵ, ya que δ variará al variar x_0.

Si imponemos la condición de que δ dependa únicamente de ϵ en el intervalo (a, b), estamos estableciendo una condición más fuerte que la de simple continuidad en (a, b) e introducimos el concepto de continuidad uniforme en dicho intervalo.

Definición 5.26 *Dada una función $f(x)$, de dominio D, decimos que es uniformemente continua en $(a, b) \subseteq D \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) \ / \ \forall x_1, x_2 \in (a, b),\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.*

Obviamente, si $f(x)$ es uniformemente continua en (a, b), es continua en (a, b). La afirmación recíproca, en general, no es cierta. Sin embargo, si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, es uniformemente continua en dicho intervalo (Cantor-Heine).

Ejemplo 5.12 *La función $f(x) = x$ es uniformemente continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Se comprueba tomando $\delta = \epsilon$.*

Ejemplo 5.13 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es continua en $(0, 1)$, pero no es uniformemente continua en dicho intervalo. Se comprueba tomando valores cada vez más próximos a 1.*

5.13 Infinitésimos

Definición 5.27 *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo o infinitamente pequeña, cuando $x \to x_0$, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

Definición 5.28 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 son del mismo orden si se verifica que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in I\!R - \{0\}$.*

Definición 5.29 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitésimos en x_0. Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $g(x)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Definición 5.30 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$, cuando $x \to x_0$, son equivalentes si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Se representa: $f(x) \approx g(x)$.*

Observación *La importancia de la definición anterior radica en el hecho siguiente. Si los infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes, el límite de una expresión en la que figura $f(x)$ como factor o divisor no se altera al sustituir $f(x)$ por $g(x)$.*

Cuando $x \to 0$, son equivalentes los infinitésimos siguientes:

$$\begin{array}{l}
sen\ x \approx x \\
tg\ x \approx x \\
arc\ sen\ x \approx x \\
arc\ tg\ x \approx x \\
ln(1 \pm x) \approx \pm x \\
e^x - 1 \approx x \\
a^x - 1 \approx x \cdot ln\ a,\ a > 0 \\
1 - cos\ x \approx \dfrac{x^2}{2} \\
(1+x)^p \approx 1 + px \\
\sqrt[n]{x} - 1 \approx ln \sqrt[n]{x}
\end{array}$$

Ejercicios resueltos

Hallar el dominio de las siguientes funciones

5.1. $\mathbf{f(x) = \sqrt[3]{2x+1}}$

5.2. $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{9 - x^2}}$

5.3. $\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 4}}$

5.4. $\mathbf{f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}}$

5.5. $\mathbf{f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}$

5.6. $\mathbf{f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}}$

5.7. $\mathbf{f(x) = \ln\ (x^2 - 9)}$

5.8. $\mathbf{f(x) = \sqrt{2 - |x|}}$.

Resolución.

1. *Dom* $f(x) = I\!R$. La raíz existe para todo valor de $x \in I\!R$, por ser una raíz cúbica.

2. La función no existe para los valores de x que anulan el denominador: $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow$ *Dom* $f(x) = I\!R - \{-3, 3\}$.

3. El radicando ha de ser mayor o igual que cero para que exista la raíz cuadrada: $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \Rightarrow$ *Dom* $f(x) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

4. Del mismo modo, $2 + x - x^2 \geq 0 \Rightarrow (2 - x)(1 + x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 2] \Rightarrow$ *Dom* $f(x) = [-1, 2]$.

5. El radicando de la primera raíz ha de ser mayor o igual que cero y el de la segunda mayor estrictamente que cero, por estar en el denominador. Por tanto: $x \leq 0$ y $1 + x > 0 \Rightarrow x \leq 0$ y $x > -1 \Rightarrow x \in (-1, 0] \Rightarrow$ *Dom* $f(x) = (-1, 0]$.

6. Puesto que los números negativos carecen de logaritmo, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$. Caben dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x < 0 \\ 1 - x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Por tanto, *Dom* $f(x) = (-1, 1)$.

7. $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Por tanto, *Dom* $f(x) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

8. $2 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ *Dom* $f(x) = [-2, 2]$.

5.9. Dada la función $\mathbf{f(x+1) = x^2 - 3x + 1}$, hallar $\mathbf{f(x-1)}$.

Resolución. Hacemos $x + 1 = y$ y resulta

$$f(y) = (y - 1)^2 - 3(y - 1) + 1 = y^2 - 5y + 5$$

Por tanto, $f(x - 1) = (x - 1)^2 - 5(x - 1) + 5 = x^2 - 7x + 11$.

5.10. Hallar las funciones inversas de

a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{3}{2 - x}}$

b) $\mathbf{f(x) = 4 + ln(x-3)}$

Resolución. a) $y = \dfrac{3}{2-x} \Rightarrow 2y - xy = 3 \Rightarrow x = \dfrac{2y-3}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{x}$.

b) $y = 4 + ln\ (x-3) \Rightarrow y - 4 = ln\ (x-3) \Rightarrow x - 3 = e^{y-4} \Rightarrow x = 3 + e^{y-4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 + e^{x-4}$.

5.11. Expresar y como función de x, siendo

a) $\mathbf{y = z^2 + 1,\ z = x + 2}$

b) $\mathbf{y = \sqrt{z+1},\ z = sen^2 x.}$

Resolución. a) $y = z^2 + 1 = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$

b) $y = \sqrt{z+1} = \sqrt{sen^2 x + 1}$.

5.12. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x \to 0}} \dfrac{\mathbf{1 - \sqrt[5]{x+1}}}{\mathbf{1 - \sqrt{x+1}}}$**.**

Resolución. Es indeterminado, de la forma $\dfrac{0}{0}$. Hacemos el cambio $x + 1 = t^{10}$, donde 10 es el m.c.m. de los índices de las raíces, resultando

$$\lim_{t \to 1} \frac{1-t^2}{1-t^5} = \lim_{t \to 1} \frac{(1+t)(1-t)}{(1-t)(t^4+t^3+t^2+t+1)} = \lim_{t \to 1} \frac{1+t}{t^4+t^3+t^2+t+1} = \frac{2}{5}$$

ya que si $x \to 0$, entonces $t \to 1$, puesto que $x + 1 = t^{10}$.

5.13. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x \to 1}} \dfrac{\mathbf{\sqrt[a]{x} - 1}}{\mathbf{\sqrt[b]{x} - 1}}$, $\mathbf{a, b \in \mathbb{N}}$**.**

Resolución. Hacemos el cambio $x = z^{ab}$, $z \to 1$, ya que $x \to 1$

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^b - 1}{z^a - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)(z^{b-1} + z^{b-2} + ... + z + 1)}{(z-1)(z^{a-1} + z^{a-2} + ... + z + 1)} = \frac{b}{a}$$

5.14. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x \to 0}} \dfrac{\mathbf{1 - cos\ x}}{\mathbf{arcsen\ 3x^2}}$**.**

Resolución. Es indeterminado, de la forma $\dfrac{0}{0}$. Sustituimos infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{arcsen\ 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

5.15. Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x \to 0}} \dfrac{\mathbf{x^3 \cdot sen\ x}}{\mathbf{(1 - cos\ x)^2}}$**.**

Resolución. Es de la forma $\frac{0}{0}$. Sustituimos infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot sen\ x}{(1-cos\ x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = 4.$$

5.16. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{sen(1-cos\ 3x)}}{\mathbf{x \cdot tg\ \frac{x}{4} \cdot cos\ x}}$.

Resolución. Es de la forma $\frac{0}{0}$. Sustituimos infinitésimos equivalentes

$$sen^2\ \frac{3x}{2} \approx \left(\frac{3x}{2}\right)^2$$

y teniendo en cuenta que

$$1 - cos\ x = 2\ sen^2\ \frac{x}{2}$$

tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\left(2 \cdot sen^2\ \frac{3x}{2}\right)}{x \cdot tg\ \frac{x}{4} \cdot cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ \left[\ 2\left(\frac{3x}{2}\right)^2\right]}{x \cdot \frac{x}{4} \cdot cos\ x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen\ \frac{9x^2}{2}}{\frac{x^2}{4} \cdot cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{\frac{x^2}{4}} = 18$$

ya que $\lim\limits_{x\to 0} cos\ x = 1$.

5.17. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{ln\ (1+x) \cdot arctg\ \frac{x}{2}}}{\mathbf{x \cdot (1+tg^2x)}}$.

Resolución. Es de la forma $\frac{0}{0}$. Teniendo en cuenta que

$$1 + tg^2x = sec^2x$$

y que

$$ln(1+x) \approx x$$

tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{x \cdot sec^2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot cos^2x}{2} = 0$$

ya que $\lim\limits_{x\to 0} cos^2x = 1$.

5.18. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{(sen\ 3x - sen\ x)^3}}{\mathbf{(1-cos\ 3x)\ ln\ (1+x)}}$.

Resolución. Usamos las fórmulas de transformación de suma de ángulos en producto y las del ángulo mitad

$$sen\ 3x - sen\ x = 2\ sen\ x\ cos\ 2x$$

$$1 - cos\ 3x = 2\ sen^2\ \frac{3x}{2}$$

y tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2\ sen\ x\ cos\ 2x)^3}{2\ sen^2\ \dfrac{3x}{2}\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^3\cdot cos^3 2x}{2\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x^3}{\dfrac{9x^3}{2}} = \frac{16}{9}$$

5.19. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2+1 \text{ si } x<1} \\ \mathbf{3 \text{ si } x=1} \\ \mathbf{x+1 \text{ si } x>1} \end{cases}$ en el punto $\mathbf{x=1}$.

Resolución.

a) $f(1) = 3$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\ (1+h)+1 = 2$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\ (1-h^2)+1 = 2$

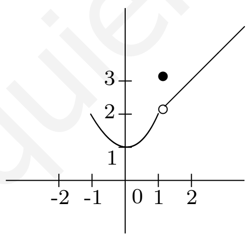

Figura 5.8

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Dicho límite no coincide con $f(1) = 3$ y la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

5.20. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x) = E(x)}$ (parte entera de x), para los valores enteros de x.

Resolución.

1) $f(a) = a,\ a \in \mathbb{Z}$.

2) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} E(a+h) = a.$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h \to 0} E(a-h) = a - 1.$

En los valores enteros presenta una discontinuidad de salto igual a 1.

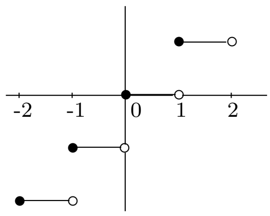

Figura 5.9

5.21. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x) = x - E(x)}$, para los valores enteros de x.

Resolución. (ver figura 5.7)

1) $f(a) = a - E(a) = a - a = 0,\ a \in \mathbb{Z}.$

2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} a + h - E(a+h) = a - a = 0.$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h \to 0} a - h - E(a-h) = a - (a-1) = 1.$

En los valores enteros presenta una discontinuidad de salto igual a -1.

5.22. Estudiar la continuidad en $\mathbf{x = 2}$ de la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x^2 - 4}}{\mathbf{x - 2}} \ \textbf{si } \mathbf{x \neq 2} \\ \mathbf{a} \textbf{ si } \mathbf{x = 2} \end{cases}$$

Resolución. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Es continua en $x = 2$ si $a = 4$. Si $a \neq 4$, presenta una discontinuidad evitable.

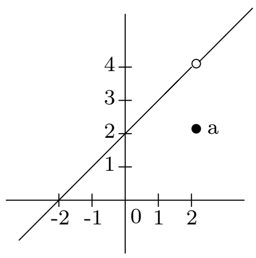

Figura 5.10

5.23. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{|x|}} \ \textbf{si } \mathbf{x \neq 0} \\ \mathbf{0} \textbf{ si } \mathbf{x = 0} \end{cases}$

Resolución.

1) $f(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(0+h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0+h}{|0+h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(0-h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0-h}{|0-h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$.

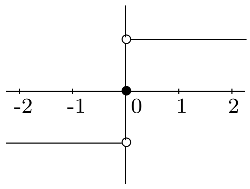

Figura 5.11

No tiene límite en $x = 0$. No es continua en dicho punto.

5.24. La función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}}$ no está definida en $\mathbf{x = -1}$. ¿Cuál debe ser el valor de $\mathbf{f(-1)}$ para que sea continua en ese punto?

Resolución.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, $f(-1)$ ha de ser igual a $\dfrac{-1}{2}$.

5.25. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}}$ en $\mathbf{x = 0}$. Estudiar su comportamiento en el infinito.

Resolución. No está definida en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{-h}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 1$$

Presenta una discontinuidad de salto -1 en $x = 0$.

En el infinito

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

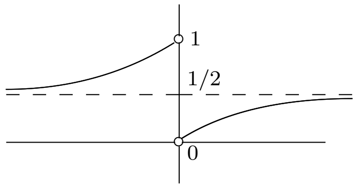

Figura 5.12

5.26. Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}}$ y construir su gráfica.

Resolución. *Dom* $f(x) = I\!R - \{x \ / \ x \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{x+1} \quad si \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x} \quad si \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} \quad si \quad 1 < x < 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

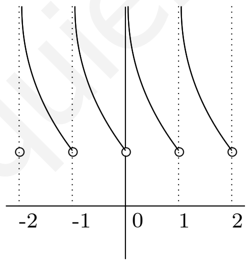

Figura 5.13

Es discontinua para los valores enteros de x

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{a+h-E(a+h)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a-h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{a-h-E(a-h)} = \frac{1}{a-(a-1)} = 1$$

5.27. Estudiar la continuidad en x=0 de $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{e^{\frac{1}{x}}\ si\ x \neq 0} \\ \mathbf{0\ si\ x = 0} \end{cases}$

Resolución.

1) $f(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0+h) = \lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}} = \infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0-h) = \lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{1}{-h}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{h}}} = 0$.

Presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$.

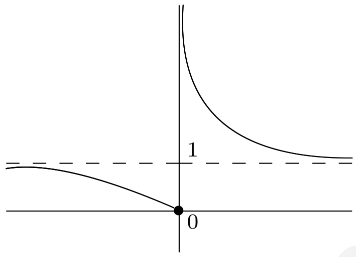

Figura 5.14

5.28. Sea $\mathbf{f} : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to I\!R$ **la función** $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{tg\ x\ si\ x \neq \frac{\pi}{2}} \\ \mathbf{1\ si\ x = \frac{\pi}{2}} \end{cases}$ **, que verifica** $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0}$ **y** $\mathbf{f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 < 0}$**. Sin embargo, se cumple que** $\mathbf{f(x) \neq 0,\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$**. ¿Contradice este hecho el teorema de Bolzano?.**

Resolución. No, ya que $f(x)$ no es continua en el punto $\dfrac{\pi}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

5.29. Verificar que la ecuación $\mathbf{x \cdot 3^x - 1 = 0}$ **tiene al menos una raíz en el intervalo** $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**.**

Resolución. La función $f(x) = x \cdot 3^x - 1$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ por ser combinación de funciones elementales continuas. Además

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 2 > 0$$

Por tanto, según el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

5.30. Demostrar que la ecuación $\mathbf{x = a \cdot sen\ x + b}$**,** $\mathbf{0 < a < 1}$**,** $\mathbf{b > 0}$**, tiene, al menos, una raíz positiva menor o igual que** $\mathbf{a + b}$**.**

Resolución. La función $f(x) = x - a \cdot sen\ x - b$ es continua por ser continuas las funciones que la componen. Además, $f(0) = -b < 0$, ya que $b > 0$.

Por otra parte, $f(a+b) = (a+b) - a \cdot sen\ (a+b) - b = a - a \cdot sen\ (a+b) = a \cdot [1 - sen\ (a+b)] \geq 0$, ya que $-1 \leq sen\ (a+b) \leq 1$ y $a > 0$.

Por lo tanto, ha de existir una raíz real positiva menor que $a+b$.

Si $sen\ (a+b) = 1$, $f(a+b) = 0$.

5.31. Demostrar que la ecuación $\mathbf{x^{123} + \dfrac{250}{25 + \cos x + x^2} = 300}$ tiene, al menos, una raíz real positiva.

Resolución. La función $f(x) = x^{123} + \dfrac{250}{25 + cos\ x + x^2} - 300$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas, y además $25 + cos\ x + x^2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte

$$f(1) = 1 + \frac{250}{25 + cos\ 1 + 1} - 300 < 0$$

ya que $-1 \leq cos\ x \leq 1$.

Para $x = 2$

$$f(2) = 2^{123} + \frac{250}{25 + cos\ 2 + 4} - 300 > 0$$

Según el teorema de Bolzano, ha de existir una raíz en el intervalo $(1, 2)$.

5.32. Comprobar que la ecuación $\mathbf{x^3 - 2x - 5 = 0}$ tiene una raíz en el intervalo $\mathbf{(2, 3)}$ y aproximar dicha raíz con un error menor que $\mathbf{10^{-2}}$.

Resolución. La función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 16 > 0$. Según el teorema de Bolzano, ha de tener una raíz en el intervalo $(2, 3)$.

Para hallar dicha raíz, se considera el punto medio del intervalo $(2, 3)$ y se observa el signo de $f(x)$ en ese punto

$$f(2.5) = 2.5^3 - 5 - 5 = 5.625 > 0$$

Como $f(2) < 0$ y $f(2.5) > 0$, en el intervalo $(2, 2.5)$ ha de existir una raíz de $f(x)$, según el teorema de Bolzano.

Reiterando este procedimiento y tomando siempre intervalos en los que $f(x)$ tiene signos opuestos en los extremos, se acorta la longitud de los intervalos y se obtiene una mayor aproximación de la raíz de $f(x)$. Así se llega a obtener el intervalo $(2.09375, 2.109)$, y el punto medio $\alpha = 2.101375$ será la raíz buscada, con un error menor que 10^{-2}, puesto que la distancia de α a los extremos del intervalo es menor que 10^{-2}.

Ejercicios propuestos

Hallar el dominio de definición de las funciones siguientes

5.33. $\mathbf{f(x) = \sqrt[3]{x - 1}}$ **5.34**. $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}}$

5.35. $\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 2}}$ **5.36**. $\mathbf{f(x) = \sqrt{1 - x^2}}$

5.37. $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ **5.38.** $f(x) = \log \dfrac{2+x}{2-x}$

5.39. $f(x) = \log\ (x^2 - 4)$ **5.40.** $f(x) = \text{arcsen}\ \log \dfrac{x}{10}$

5.41. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\text{sen}\ \pi x}$ **5.42.** $f(x) = \sqrt{\log\ (\text{tg}\ x)}$

5.43. $f(x) = \sqrt{|x| - x}$ **5.44.** $f(x) = \sqrt{\text{sen}\ x - 1}$

5.45. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ **5.46.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$

5.47. $f(x) = \text{arcsen}\ \sqrt{2x}$

5.48. Construir las gráficas de las funciones siguientes
a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $f(x) = 2^x$ d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

5.49. Construir la gráfica de las funciones
a) $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$ b) $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ c) $f(x) = \{x\}$, siendo $\{x\}$ = distancia al entero más próximo.

5.50. Hallar $f(x+1)$ **dada la función** $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 3x^2 - 2x + 5$.

5.51. Hallar las funciones inversas de
a) $f(x) = 3 \cdot \text{arccos}\ x^2$, b) $f(x) = 4 \cdot \text{sen}\ 5x$.

Expresar y como función de z, siendo

5.52. $y = 2x^2$, $x = 3z + 2$

5.53. $y = \sqrt{4x - 2}$, $x = e^t$, $t = \ln z$

5.54. Siendo $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ **y** $g(x) = x^2 - 5$, **hallar: a)** $f \circ g$ **b)** $g \circ f$.

5.55. Expresar el área de un trapecio isósceles, de bases a y b, en función del ángulo x de la base a. Construir la gráfica de la función para $a = 2$ **y** $b = 1$.

5.56. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

5.57. Hallar n para que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+n}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 6$.

5.58. Estudiar la continuidad, para los valores enteros de x, de la función $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

5.59. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$.

5.60. Estudiar la continuidad y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Estudiar su comportamiento en el infinito.

5.61. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x-3}} - 1}{2^{\frac{1}{x-3}} + 1}$$

Estudiar su comportamiento en el infinito.

5.62. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-x}}.$$

5.63. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}.$$

5.64. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

5.65. Encontrar una función $f(x)$ discontinua en todos los puntos de su dominio y que, sin embargo, $|f(x)|$ sea continua en todos ellos.

5.66. Hallar n para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 \text{ si } x < 0 \\ n + x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

5.67. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{I} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

5.68. Demostrar que la ecuación $x^{23} - \dfrac{54}{x^2 - \operatorname{sen} x + 2} = 50$ tiene, al menos, una raíz real.

5.69. Hallar una raíz real de la ecuación $x^3 - 3x + 3 = 0$, con un error menor que 10^{-1}.

Capítulo 6

Derivada de una función

El concepto de derivada surgió en el siglo XVII con el problema de hallar la tangente a una función en uno de sus puntos y fue desarrollado por Newton y Leibnitz a partir de las ideas de Fermat.

6.1 Concepto de derivada

Sea la función $f(x)$, definida en $D \subseteq I\!R$. Sea el punto $x \in D$ en el que deseamos hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$. Para ello será preciso hallar la pendiente de dicha recta tangente.

Sea $A(x, f(x))$ el punto en cuestión. Consideremos un punto B, próximo a A, $B(x+h, f(x+h))$, la pendiente de la cuerda AB será (ver figura 6.1)

$$m_{\ cuerda} = tg\ \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

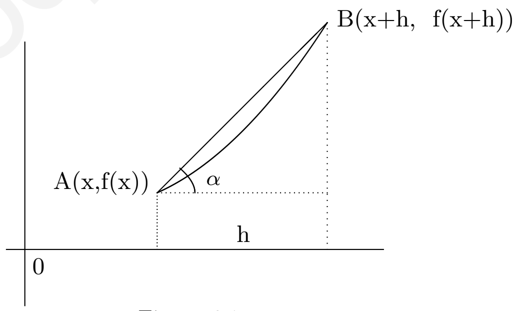

Figura 6.1

Pero lo que deseamos es hallar la pendiente de la recta tangente en el punto A. Si $h \to 0$, el punto B tiende a confundirse con el punto A, y la cuerda AB tiende a confundirse con la tangente en A. Por tanto

$$m_{\ tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si existe, el límite anterior recibe el nombre de derivada de $f(x)$ en el punto $x \in D$ y lo representamos $f'(x)$ o también $\dfrac{dy}{dx}$.

Ejemplo 6.1 *Sea la función $f(x) = x^2$. Se desea hallar la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.*

La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\ (2x+h) = 2x$$

Para $x = 1$, $m_{\ tangente} = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente será

$$y - 1 = 2(x-1)$$

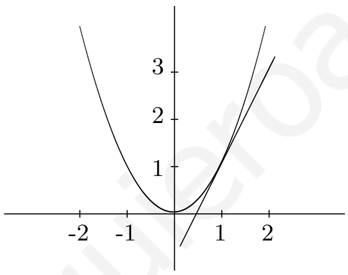

Figura 6.2

Ejemplo 6.2 *Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.*

La derivada de la función es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\ \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\ \frac{\dfrac{-h}{x^2+xh}}{h} = \lim_{h\to 0}\ \frac{-1}{x^2+xh} = -\frac{1}{x^2}$$

La derivada en $x = -1$ es igual a $f'(-1) = -1$.

Por último, la ecuación de la recta tangente en $(-1,-1)$ es $y + 1 = -(x+1)$.

El cálculo de la derivada de una función mediante la definición (como hicimos en los dos ejemplos anteriores) es largo y dificultoso. A continuación vamos a construir una tabla de derivadas que permita hacer dicha operación de un modo sencillo y rápido.

6.2 Derivada de una función constante

Si $f(x) = k$, con $k \in I\!R$, su derivada es igual a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

6.3 Derivada de la función $\mathbf{f(x) = x^n}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot h + ... + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot h + ... + \binom{n}{n}h^{n-1} \right] = n \cdot x^{n-1}$$

6.4 Derivada de la suma de dos funciones

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la derivada de su suma es

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de la suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a la suma de las derivadas respectivas $f'(x)$ y $g'(x)$.

6.5 Derivada del producto de dos funciones

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la derivada de su producto es

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Sumamos y restamos la expresión $f(x+h)\cdot g(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)=$$

$$=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$$

6.6 Derivada de $\mathbf{k\cdot f(x)}$

Es igual a $k\cdot f'(x)$, consecuencia inmediata de la derivada de un producto.

6.7 Derivada de $\mathbf{\dfrac{1}{g(x)}}$

Si representamos la función $g(x)$ por g, tenemos que

$$g\cdot\frac{1}{g}=1\Rightarrow g\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'+g'\cdot\frac{1}{g}=0\Rightarrow\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$$

6.8 Derivada del cociente de dos funciones

Si utilizamos el resultado anterior

$$\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'=f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'}{g}-\frac{f\cdot g'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

6.9 Derivada de $\mathbf{f^n}$

$$(f^2)'=(f\cdot f)'=f\cdot f'+f'\cdot f=2ff'$$
$$(f^3)'=(f^2\cdot f)'=(f^2)'\cdot f+f^2\cdot f'=2f^2f'+f^2f'=3f^2f'$$
$$(f^4)'=(f^2\cdot f^2)'=2\cdot(f^2)'\cdot f^2=2\cdot 2ff'\cdot f^2=4f^3f'$$

....

En general, la derivada de f^n será $n\cdot f^{n-1}f'$.

Demostración (por inducción). Suponemos que es cierto para $n=k$: $(f^k)'=k\cdot f^{k-1}\cdot f'$, y tenemos que demostrarla para $n=k+1$:

$$(f^{k+1})'=(f^k\cdot f)'=(f^k)'\cdot f+f^k\cdot f'=(k\cdot f^{k-1}\cdot f')\cdot f+f^k\cdot f'=(k+1)\cdot f^k\cdot f'$$

6.10 Derivada de las funciones hiperbólicas

$$(sh\ x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\ x$$
$$(ch\ x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x$$

Del mismo modo se procedería con distintas funciones hasta completar la siguiente tabla de derivadas con la que podremos derivar con comodidad.

$$\begin{array}{ll}
(sen\ f)' = f' \cdot cos\ f & (ln\ f)' = \dfrac{f'}{f} \\
(cos\ f)' = -f' \cdot sen\ f & (log_a f)' = \dfrac{f'}{f \cdot ln\ a} \\
(tg\ f)' = \dfrac{f'}{cos^2 f} & (a^f)' = f' \cdot a^f \cdot ln\ a \\
(e^f)' = f' \cdot e^f & (arcsen\ f)' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \\
(arccos\ f)' = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} & (arctg f)' = \dfrac{f'}{1+f^2} \\
(th\ x)' = \dfrac{1}{ch^2 x} & (cth\ x)' = \dfrac{-1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0)
\end{array}$$

6.11 Regla de la cadena

Si es $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$, es decir $y = f[g(x)]$, la derivada de "y" con respecto a "x", $\frac{dy}{dx}$, es igual a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 6.3 *Sean $y = 2u^2 - 2$ y $u = 3x + 1$. Aplicando la regla anterior*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u \cdot 3 = 12(3x+1) = 36x + 12$$

Podemos hacer una comprobación escribiendo y en función de x y derivando a continuación

$$y = 2(3x+1)^2 - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 36x + 12$$

6.12 Derivación implícita

Si la relación entre las variables "x" e "y" viene dada por una función en la que la variable "y" no está despejada, decimos que la función es implícita. Por ejemplo, $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$.

Suele ocurrir que no interesa o no es posible, despejar "y" para obtenerla como función explícita de "x". En este caso, derivamos término a término, considerando "y" como función de "x".

Ejemplo 6.4 *Dada la función anterior* $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$*, si derivamos implícitamente*

$$6xy + 3x^2y' - 6y^3 - 18xy^2y' = 0$$

6.13 Derivadas laterales

Definición 6.1 *Definimos las derivadas laterales de* $f(x)$ *(o derivadas a derecha e izquierda) del punto* $x = a$*, como los límites respectivos*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad y \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

donde $h > 0$.

La condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada $f'(a)$ es que $f'_+(a) = f'_-(a)$ y entonces decimos que la función $f(x)$ es derivable en $x = a$.

Ejemplo 6.5 *Hallar las derivadas laterales en* $x = 0$ *de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x \geq 0 \\ x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales son

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0-h) - 0}{-h} = 1$$

En la gráfica podemos observar que, a la derecha de $x = 0$*, la semirrecta tangente es horizontal y la derivada (pendiente de dicha semirrecta) es igual a cero. A la izquierda, el ángulo de la semirrecta tangente con el eje OX es de* 45^o *y, por tanto, la derivada es igual a 1 (tg* 45^o*=1). La función no es derivable en* $x = 0$*, ya que no coinciden las derivadas a derecha e izquierda en dicho punto.*

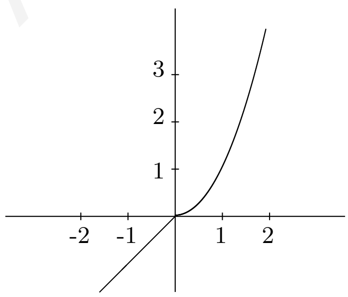

Figura 6.3

Ejemplo 6.6 *Hallar las derivadas laterales en $x = 0$ de la función $f(x) = |x|$.*

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - 0}{h} = 1$$
$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0-h| - 0}{-h} = -1$$

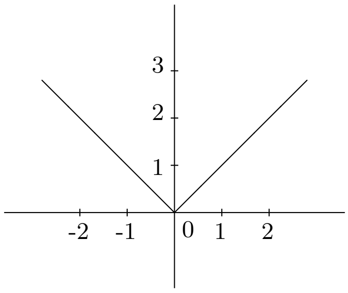

Figura 6.4

Por tanto, en un punto "anguloso" falla la derivabilidad de una función, al no coincidir las rectas tangentes a derecha e izquierda.

6.14 Relación entre derivabilidad y continuidad

Proposición 6.1 *Si la función $f : D \to I\!R$ es derivable en el punto $a \in D$, es continua en dicho punto.*

Demostración. Consideramos el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \Big[f(a+h) - f(a)\Big] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h\right] = f'(a) \cdot \lim_{h\to 0} h =$$
$$= f'(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

que es la condición para que $f(x)$ sea continua en $x = a$. $\square$

En general, la proposición recíproca no es cierta, como se puede apreciar en la función $f(x) = |x|$, continua y no derivable en $x = 0$.

La proposición anterior y su contrarrecíproca ($f(x)$ no es continua en $x = a \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = a$) van a resultar de gran utilidad en la práctica, a la hora de estudiar la derivabilidad y continuidad de una función en un punto.

Ejemplo 6.7 *Estudiar, en el punto $x = 0$, la derivabilidad y continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \ si \ x \geq 0 \\ 1 \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales son

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{-h} = 0$$

La función es derivable en $x = 0$. Por la proposición anterior, la función es continua en dicho punto.

6.15 Diferencial de una función

Definición 6.2 *Sea $y = f(x)$ una función derivable en un punto $x = a$. Llamamos diferencial dy de la función en dicho punto al producto $f'(a) \cdot dx$, siendo dx el incremento de la variable x. Esto es*

$$dy = f'(a) \cdot dx$$

En la figura 6.5, vemos que la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $x = a$ es igual a

$$f'(a) = tg\ \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{dx} \Rightarrow CD = f'(a) \cdot dx$$

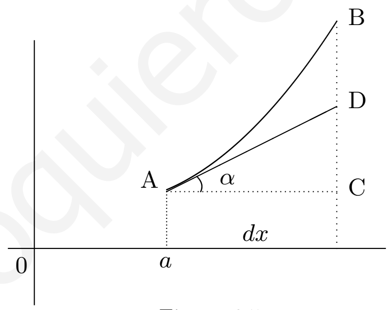

Figura 6.5

Cuando dx tiende a cero, $CD \approx CB = dy = f'(a) \cdot dx$, pues la recta tangente tiende a confundirse con la función, siendo dy el incremento que experimenta la variable dependiente para un pequeño incremento dx de la variable independiente x.

Ejemplo 6.8 *El radio de un círculo es igual a 10 cm. ¿Qué variación experimenta su superficie cuando dicho radio aumenta en 2 mm.?*

La superficie S es función del radio r: $S = \pi \cdot r^2$. La diferencial es

$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

Si $r = 10$ cm. y $dr = 2$ mm. $= 0.2$ cm., tenemos que

$$dS = 2\pi \,.\, 10 \,.\, 0.2 = 4\pi = 12.56 \ cm^2$$

Es fácil de comprobar restando las superficies

$$\pi \cdot (10.2)^2 - \pi \cdot 10^2 = 12.68 \ cm^2.$$

Este último es el valor exacto, $12.68\ cm^2$, mientras que el anteriormente obtenido, $12.56\ cm^2$, es el valor aproximado utilizando la diferencial, esto es, la recta tangente en lugar de la función.

6.16 Teoremas sobre derivabilidad

Teorema 6.1 *(Rolle). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.*

Demostración. Si $f(x)$ es constante, su derivada es cero, y el teorema es evidente. Si $f(x)$ no es constante, tomará valores mayores que $f(a)$, menores que $f(a)$ o ambas cosas. Si toma valores mayores que $f(a)$, alcanzará su máximo k al menos una vez en el intervalo (a,b) (Weierstrass). Sea $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = k$. Las derivadas a derecha e izquierda en α

$$f'_+(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}; \quad f'_-(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha-h) - f(\alpha)}{-h}$$

Puesto que en $x = \alpha$ la función alcanza un máximo, si h tiende a cero, $f(\alpha+h) - f(\alpha) \le 0 \Rightarrow f'_+(\alpha) \le 0$.

Razonando de igual modo, $f'_-(\alpha) \ge 0$. Al ser la función derivable en el punto $\alpha \in (a,b)$, $f'_+(\alpha) = f'_-(\alpha) \Rightarrow f'(\alpha) = 0$. $\square$

Ejemplo 6.9 *La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ toma en los extremos del intervalo $[0,2]$ el mismo valor, $f(0) = f(2) = 1$. Sin embargo, no es aplicable el teorema de Rolle, ya que $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ no existe en $1 \in [0,2]$.*

Ejemplo 6.10 *La función $f(x) = |x|$ no verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$ ya que, a pesar de ser continua en dicho intervalo y $f(-1) = f(1)$, no es derivable en $x = 0$, como se vió con anterioridad.*

La razón por la que en el teorema de Rolle se impone que $f(x)$ ha de ser continua en $[a,b]$, en lugar de (a,b), podemos verla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.11 *Sea la función* $f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ tg\ x \ si \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \ si \ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Es continua y derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ *y* $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$. *Sin embargo, no existe ningún punto* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ *tal que* $f'(\alpha) = 1/cos^2\alpha = 0$, *ya que no es continua en el intervalo cerrado* $[-\pi/2, \pi/2]$, *aunque sí lo es en* $(-\pi/2, \pi/2)$.

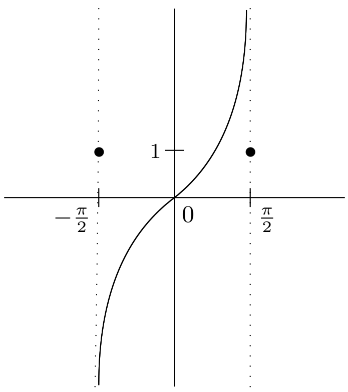

Figura 6.6

Teorema 6.2 *(del valor medio de Cauchy) Si las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b), *existe al menos un* $\alpha \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Demostración. Consideramos la función

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [g(b) - g(a)]\ f(x) - [f(b) - f(a)]\ g(x) + f(b)\ g(a) - f(a)\ g(b)$$

La función $F(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b) *por ser combinación lineal de las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$, *continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b). *Además,* $F(a) = F(b) = 0$. *Por tanto, según el teorema de Rolle, existe* $\alpha \in (a, b)$ *tal que* $F'(\alpha) = 0$. *Derivando:*

$$F'(x) = [g(b) - g(a)]\ f'(x) - [f(b) - f(a)]\ g'(x)$$

Hacemos $F'(\alpha) = 0$*:*

$$[g(b) - g(a)]\ f'(\alpha) - [f(b) - f(a)]\ g'(\alpha) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}. \ \square$$

Ejemplo 6.12 *Sean* $f(x) = 6x - 2$ *y* $g(x) = x^2 + 5$, *continuas en* $[0, 1]$ *y derivables en* $(0, 1)$. *Aplicamos el teorema anterior*

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \Rightarrow \frac{4 - (-2)}{6 - 5} = \frac{6}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Teorema 6.3 *(del valor medio de Lagrange o de los incrementos finitos) Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b), *existe al menos un punto* $\alpha \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior, si tomamos $g(x) = x$, *ya que* $g(a) = a$, $g(b) = b$ *y* $g'(x) = 1$. □

Es posible dar una sencilla interpretación geométrica del anterior teorema si observamos que el primer miembro es la pendiente de la cuerda que une los puntos A y B y que el segundo miembro es la pendiente de la recta tangente en $x = \alpha$. El teorema viene a decir que existe un punto α en el que la recta tangente es paralela a la cuerda $\overline{AB}$ (ver figura 6.7).

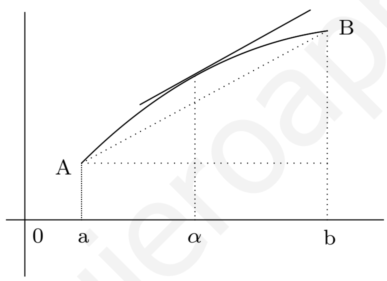

Figura 6.7

Teorema 6.4 *(L'Hopital) Sean las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$, *derivables en un entorno del punto* x_0 *y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto de dicho entorno, salvo en* x_0. *Si ambas tienden simultáneamente a cero (o a infinito) cuando* x *tiende a* x_0, *se verifica que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración. Vamos a hacerla para el caso de que ambas tiendan a cero simultáneamente. Según el teorema del valor medio de Cauchy $\exists \alpha \in (x_0, x)$ *tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Puesto que α *está entre* x_0 *y* x, $\alpha \to x_0$ *cuando* $x \to x_0$, *resulta que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \square$$

Ejemplo 6.13

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

Ejemplo 6.14

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot sen\ x}{1 - cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x + x \cdot cos\ x}{sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot cos\ x - x \cdot sen\ x}{cos\ x} = 2$$

6.17 Crecimiento y decrecimiento

Podemos estudiar el crecimiento (capítulo 5) de una función derivable de un modo sencillo mediante la derivada. Si $f'(x_0) > 0$, la función es creciente en x_0 puesto que $f'(x_0)$ es la pendiente m de la tangente a la función en dicho punto ($m = tg\ \alpha$). Como la pendiente es positiva, el ángulo α, que forma la recta tangente con el eje OX, es $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y, por tanto, $f(x)$ es creciente en x_0. Análogamente, si $f'(x_0) < 0$, la función es decreciente en x_0.

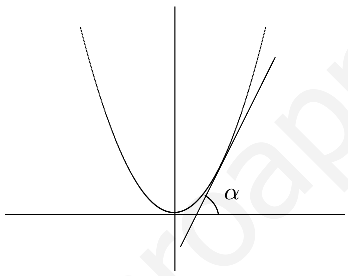

Figura 6.8

Teorema 6.5 *Sea $f(x)$ derivable en (a, b). La función $f(x)$ es creciente en $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. De modo análogo, la función $f(x)$ es decreciente en $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.*

Teorema 6.6 *Sea $f(x)$ derivable en (a, b). Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en (a, b). De modo análogo, $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).*

En general, el recíproco no es cierto.

6.18 Máximos y mínimos

Al igual que el estudio del crecimiento y decrecimiento, la búsqueda de máximos y mínimos (capítulo 5) de una función derivable podemos realizarlo mediante la derivada.

Si en un punto x_0 se verifica que $f'(x_0) = 0$, la tangente a $f(x)$ es horizontal en dicho punto. Para averiguar si en x_0 la función presenta un máximo o un mínimo, se calcula $f''(x_0)$: si $f''(x_0) < 0$, en x_0 hay un máximo; si $f''(x_0) > 0$, en x_0 hay un mínimo. Pero el problema se plantea cuando en x_0 se anulan la primera y segunda derivadas simultáneamente. En general

Teorema 6.7 *Sea $f(x)$ derivable n veces en x_0 y $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n}(x_0) \neq 0$. Entonces, si n es par y $f^{(n}(x_0) < 0$, la función presenta un máximo en x_0. Si n es par y $f^{(n}(x_0) > 0$, la función presenta un mínimo en x_0.*

6.19 Concavidad y convexidad

Definición 6.3 *Decimos que la función $f(x)$ es cóncava en el intervalo (a,b) si $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ el segmento rectilíneo que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de $f(x)$.*

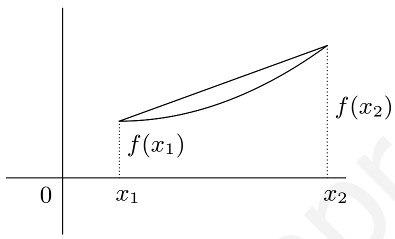

Figura 6.9. Función cóncava.

De modo análogo se define función *convexa* (algunos autores intercambian las definiciones de cóncava y convexa).

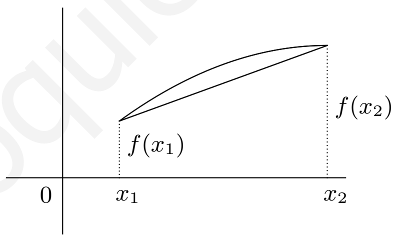

Figura 6.10. Función convexa.

Si $f(x)$ es cóncava en un intervalo (a,b) y si $x_1, x_2 \in (a,b)$ / $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$, suponiendo que $f(x)$ es derivable en (a,b). Esto es, el ángulo que forma la recta tangente en x_1 es menor que en x_2, debido a la concavidad de $f(x)$.

Si $f''(x) > 0$ en (a,b), $f'(x)$ es estrictamente creciente en (a,b) y $f(x)$ es cóncava.

Del mismo modo, si $f''(x) < 0$ en (a,b), $f'(x)$ es estrictamente decreciente en (a,b) y $f(x)$ es convexa.

6.20 Puntos de inflexión

Decimos que la función $f(x)$ presenta un *punto de inflexión* en x_0 si en dicho punto la función cambia de convexa a cóncava o viceversa.

La condición necesaria para la existencia de inflexión en un punto x_0 es que $f''(x_0) = 0$. Sin embargo, no es condición suficiente. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ verifica $f''(0) = 0$ y no presenta inflexión en $x = 0$. La condición suficiente la da el siguiente teorema.

Teorema 6.8 *Sea $f(x)$ derivable n veces en x_0 y $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n}(x_0) \neq 0$. Entonces, si n es impar, $f(x)$ presenta un punto de inflexión en x_0.*

Ejemplo 6.15 *Sea $f(x) = x^3$. Haciendo $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La segunda derivada: $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$. La tercera derivada: $f'''(x) = 6 \neq 0$. Por tanto, en $x = 0$ presenta un punto de inflexión.*

Ejemplo 6.16 *Sea $f(x) = x^4$. La derivada: $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. La segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$. Se acude a la tercera derivada: $f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$. Por último, la cuarta derivada: $f^{IV}(x) = 24 > 0$. La función presenta un mínimo en $x = 0$.*

6.21 Representación gráfica de $\mathbf{y = f(x)}$

El estudio y representación gráfica de una función explícita $y = f(x)$ se suele realizar siguiendo este orden:

1. Se determina su dominio de definición o campo de existencia.

2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.

3. Simetrías. Si la función es simétrica respecto al eje OY, entonces se verifica que $f(x) = f(-x)$, como se aprecia en la figura. Entonces, $f(x)$ recibe el nombre de función *par* (figura 6.11).

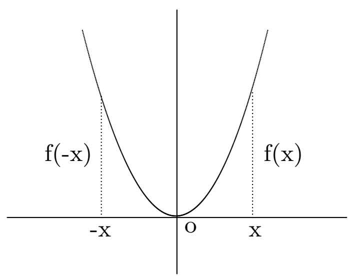

Figura 6.11

Si la función presenta simetría respecto al origen de coordenadas, entonces $f(x) = -f(-x)$ y recibe el nombre de función *impar* (figura 6.12).

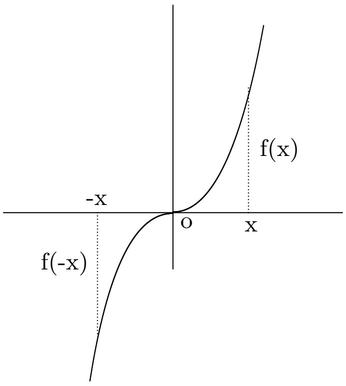

Figura 6.12

4. Crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Concavidad y convexidad.
7. Puntos de inflexión.
8. Asíntotas. Se definen como las tangentes a la curva en el infinito. Pueden ser horizontales, verticales y oblícuas.

Las *asíntotas horizontales* tienen por ecuación $y = n$, siendo

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Las *asíntotas verticales* son de la forma $x = n$, siendo

$$\lim_{x\to n} f(x) = \pm\infty$$

Si la función $f(x)$ es un cociente irreducible de dos polinomios, las asíntotas verticales están situadas en los ceros del denominador.

Las asíntotas oblícuas tienen por ecuación $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

ya que dividiendo por x los dos miembros de $y = mx + n$ resulta

$$\frac{y}{x} = m + \frac{n}{x}$$

y cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = m$$

Despejando $n = y - mx$

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx)$$

Ejercicios resueltos

6.1. Hallar $\mathbf{y'}$ en: a) $\mathbf{x^2y + xy^2 - y = 7}$ b) $\mathbf{3xy^3 - y \cdot sen\ x = 0}$.

Resolución. a) Derivamos implícitamente

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' - y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy - 1}$$

b) $3y^3 + 9xy^2y' - y' \cdot sen\ x - y \cdot cos\ x = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y \cdot cos\ x - 3y^3}{9xy^2 - sen\ x}$

6.2. Comprobar que $\mathbf{y = x \cdot e^x}$ satisface a la ecuación diferencial $\mathbf{y'' - y' - e^x = 0}$.

Resolución. Calculamos la primera y segunda derivada de y

$$y' = e^x + x \cdot e^x; \quad y'' = 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$2e^x + x \cdot e^x - (e^x + x \cdot e^x) - e^x = 0$$

6.3. Derivar $\mathbf{x^y = y^{sen\ x}}$.

Resolución. Tomamos logaritmos

$$y \cdot ln\ x = sen\ x \cdot ln\ y$$

y derivamos

$$y' \cdot ln\ x + \frac{y}{x} = cos\ x \cdot ln\ y + sen\ x \cdot \frac{y'}{y}$$

$$y' = \frac{xy \cdot cos\ x \cdot ln\ y - y^2}{xy \cdot ln\ x - x \cdot sen\ x}$$

6.4. Dada la función $\mathbf{f(x) = e^{x+3}}$, comprobar que $\mathbf{\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1}$.

Resolución.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+3}$$

Despejamos x en la función

$$x = ln\ y - 3$$

Y derivamos x con respecto a y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^{x+3}}$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{e^{x+3}}{e^{x+3}} = 1$$

6.5. Dada $\mathbf{f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}}$, verificar que $\mathbf{\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1}$.

Resolución. Derivamos y con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$$

Derivamos x con respecto a y

$$1 = \frac{x'(x^2-1) - 2xx'(x+2)}{(x^2-1)^2}$$

Despejamos x'

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{(x^2-1)^2}{-x^2-4x-1}$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

6.6. Hallar la derivada n-sima de las funciones: a) $\mathbf{y = \cos x}$ b) $\mathbf{y = \dfrac{1}{x-5}}$.

Resolución. Derivamos sucesivamente

$$\begin{array}{l} y' = -sen\ x \\ y'' = -cos\ x \\ y''' = sen\ x \\ y^{IV} = cos\ x \\ y^{V} = -sen\ x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En general $y^{(n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot sen\ x\ si\ n\ es\ impar \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot cos\ x\ si\ n\ es\ par \end{cases}$

b) Derivamos sucesivamente

$$y' = \frac{-1}{(x-5)^2}$$
$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3}$$
$$y''' = \frac{-2 \cdot 3}{(x-5)^4}$$
$$y^{IV} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-5)^5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En general, $y^{(n} = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{(x-5)^{n+1}}$.

6.7. Hallar la derivada n-sima de la función $\mathbf{y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12}}$.

Resolución. Antes de derivar, es conveniente hacer una descomposición en fracciones simples

$$y = \frac{1}{x^2 - 8x + 12} = \frac{1}{(x-2)(x-6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-6} = \frac{(A+B)x - 6A - 2B}{(x-2)(x-6)}$$

Entonces, $1 \equiv (A+B)x - 6A - 2B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ -6A - 2B = 1 \end{array}\right\}$.

Resolvemos el sistema, $A = \dfrac{-1}{4}$; $B = \dfrac{1}{4}$.

Por tanto, $y = \dfrac{-1}{4(x-2)} + \dfrac{1}{4(x-6)}$.

Derivamos sucesivamente

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{4(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-6)^2} \\ y'' &= \frac{-2}{4(x-2)^3} + \frac{2}{4(x-6)^3} \\ y''' &= \frac{2.3}{4(x-2)^4} - \frac{2.3}{4(x-6)^4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En general,

$$y^{(n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{4} \cdot \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-6)^{n+1}}\right].$$

6.8. Usando derivación implícita, hallar la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0}$**, en el punto de abscisa** $\mathbf{x = 2}$ **y ordenada positiva.**

Resolución. La ordenada para $x = 2$

$$2^2 + y^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot y - 11 = 0 \Rightarrow y_1 = 3, \; y_2 = -5.$$

El punto en cuestión es el $(2, 3)$. Derivamos implícitamente

$$2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0$$

Sustituimos el punto $(2, 3)$ en la derivada

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot y' - 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = 0$$

La ecuación de la recta tangente será

$$y - 3 = 0(x - 2) \Rightarrow y = 3$$

que es una recta paralela al eje de abscisas.

6.9. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $\mathbf{x \cdot sen(xy) + 4y^2 = 16 + x}$ en el punto de abscisa $\mathbf{x = 0}$ y ordenada positiva.

Resolución. Para $x = 0$, $0 \cdot sen(0 \cdot y) + 4y^2 = 16 + 0 \Rightarrow y = \pm 2$.

Derivamos

$$sen(xy) + x(y + xy') \cdot cos(xy) + 8yy' = 1$$

Sustituimos el punto $(0, 2)$

$$16y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{16}$$

La ecuación de la recta tangente es $y - 2 = \frac{1}{16} \cdot (x - 0)$.

La ecuación de la recta normal es $y - 2 = -16(x - 0)$.

6.10. Hallar la ecuación de una parábola de la forma $\mathbf{y = x^2 + bx + c}$ que sea tangente a la curva $\mathbf{y = (x-1)^3}$ en el punto de abscisa $\mathbf{x = 1}$.

Resolución. Para $x = 1$, la función $y = (x-1)^3$ toma el valor cero. Por tanto, el punto de tangencia de ambas curvas es el $(1, 0)$, en el que tienen tangente común.

Las derivadas de ambas funciones en $x = 1$ son

$$y' = 2x + b \Rightarrow y'(1) = 2 + b$$

$$y' = 3(x-1)^2 \Rightarrow y'(1) = 0$$

Igualando, $2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$.

Y como la función $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 0)$, se ha de verificar que $0 = 1 + b + c$, con lo que $c = 1$.

6.11. Determinar los puntos en los que la curva $\mathbf{y = x^3 + x^2 - 6x + 1}$ tiene tangente paralela a la recta $\mathbf{y = 2x + 1}$.

Resolución. La pendiente de la recta $y = 2x - 1$ es $m = 2$. Derivamos la función

$$y' = 3x^2 + 2x - 6$$

Dicha derivada ha de ser igual a $m = 2$

$$3x^2 + 2x - 6 = 2 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = \frac{4}{3}.$$

Los puntos son $(-2, 9)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{77}{27}\right)$.

6.12. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $\mathbf{y = \ln \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$, paralelas a la recta $\mathbf{x - 4y + 1 = 0}$.

Resolución. La derivada primera de la función

$$y' = \frac{1}{2x(x+1)}$$

ha de ser igual a la pendiente de la recta $x-4y+1=0$. En forma explícita: $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}$. La pendiente es $m=\dfrac{1}{4}$. Por tanto

$$\frac{1}{2x(x+1)}=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1,\ x=-2$$

Para $x=1$, $y=ln\ \sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\ ln\ 2$

Para $x=-2$, $y=ln\ \sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\ ln\ 2$

Las rectas tangentes

$$y+\frac{1}{2}\ ln\ 2=\frac{1}{4}\ (x-1)$$

$$y-\frac{1}{2}\ ln\ 2=\frac{1}{4}\ (x+2)$$

6.13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\mathbf{y=x^x}$ en el punto de abscisa $\mathbf{x=1}$.

Resolución.

$$y=x^x\Rightarrow ln\ y=x\ ln\ x\Rightarrow\frac{y'}{y}=ln\ x+x\ \frac{1}{x}\Rightarrow y'=x^x(ln\ x+1)$$

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es

$$m=1\ (ln\ 1+1)=1$$

La recta tangente

$$y-1=1\ (x-1)\Rightarrow y=x$$

6.14. ¿Bajo qué ángulo se cortan las curvas de ecuaciones $\mathbf{y=sen\ x}$ e $\mathbf{y=cos\ x}$?.

Resolución. Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen resolviendo la ecuación

$$sen\ x=cos\ x\Rightarrow tg\ x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

El ángulo de corte de las dos curvas en $x=\dfrac{\pi}{4}$ es el de las rectas tangentes respectivas en dicho punto. Las pendientes en $x=\dfrac{\pi}{4}$ son

$$y'=cos\ x\Rightarrow m_1=cos\ \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'=-sen\ x\Rightarrow m_2=-sen\ \frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por último:

$$tg\ \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\ 2\sqrt{2} = 70^o 31' 43'' 6$$

6.15. El lado de un triángulo equilátero crece a razón de 5 cm. por minuto. ¿Con qué velocidad crece su área cuando el lado mide 26 cm.?

Resolución. El área A de un triángulo equilátero en función de su lado l es

$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Se desea saber con que velocidad $v = \frac{dA}{dt}$ crece A en el instante en que $l = 26\ cm.$. Mediante la regla de la cadena:

$$v = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = 2l \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{dl}{dt}$$

Si $\frac{dl}{dt} = 5$: $v = 2 \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = 65\sqrt{3}\ \frac{cm^2}{min}$.

6.16. Las dimensiones de un depósito en forma de paralelepípedo son: 8 m. de largo, 2 m. de ancho y 4 m. de profundidad. Se está llenando de agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua respecto al tiempo, en el instante en que la profundidad del líquido es de 1 m.

Resolución. Si la profundidad del agua es igual a x, el volumen de agua contenido en el depósito es $V = 2 \cdot 8 \cdot x = 16x \Rightarrow x = \frac{V}{16} \Rightarrow \frac{dx}{dV} = \frac{1}{16}$.

Según la regla de la cadena

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}\ \frac{m}{min}.$$

El nivel del agua aumenta de un modo constante, debido a la forma del depósito. Por otra parte, la profundidad del agua (4 m.) es un dato innecesario.

6.17. ¿Con qué velocidad aumenta el área de un círculo en el instante en que su radio vale 10 cm., sabiendo que dicho radio crece uniformemente con velocidad igual a 2 cm. por segundo?.

Resolución.

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 2 = 4\pi r$$

Cuando $r = 10$ cm.
$$\frac{dA}{dt} = 4\pi \cdot 10 = 40\pi \ \frac{cm^2}{s}.$$

6.18. Desde un mismo puerto salen simultáneamente dos barcos. El barco A, en dirección Norte, y el barco B, en dirección Este. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos si la velocidad del barco A es de 30 km/h. y la del barco B es de 40 km/h.?.

Sol.:
$$D = \sqrt{(30\ t)^2 + (40\ t)^2} = 50\ t$$
$$\frac{dD}{dt} = 50\ km/h.$$

6.19. Calcular $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{sen^2 x}}{\mathbf{1} - \mathbf{cos\ x}}$**.**

Sol.: Sustituyendo infinitésimos equivalentes y aplicando L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + sen^2 x}{1 - cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + sen^2 x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2sen\ x \cdot cos\ x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

6.20. Calcular $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} - \mathbf{ctg\ x}\right)$**.**

Sol.: Es una indeterminación de la forma $\infty - \infty$. Pasando a la forma $\frac{0}{0}$, sustituyendo infinitésimos equivalentes y aplicando L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{tg\ x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x \cdot tg\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{cos^2 x} - 1}{2x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x}{cos^4 x}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{cos^3 x} = 0$$

6.21. Calcular $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{x^x}$**.**

Sol.: $A = \lim_{x\to 0} x^x$. Tomando logaritmos:
$$ln\ A = \lim_{x\to 0}\ x \cdot ln\ x = 0 \cdot (-\infty)$$

Se transforma en una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y se aplica L'Hopital:
$$ln\ A = \lim_{x\to 0} \frac{ln\ x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

Nota. Comprobarlo con la calculadora, dando a x valores próximos a cero: x=0.01, x=0.001, etc.

6.22. Calcular $\lim_{x\to 0} (1-x)^{ctg\ x}$.

Sol.: Es una indeterminación de la forma 1^∞. Tomando logaritmos naturales:

$$A = \lim_{x\to 0} (1-x)^{ctg\ x} \Rightarrow ln\ A = \lim_{x\to 0} ctg\ x \cdot ln(1-x) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1-x)}{tg\ x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital:

$$ln\ A = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{cos^2 x}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

6.23. Calcular $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\ln(\cos x)}{1+tg\ x}$.

Sol.:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+ln(cos\ x)}{1+tg\ x} = \frac{1+ln\ 0}{1+tg\ \frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital:

$$ln\ A = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-sen\ x}{cos\ x}}{\frac{1}{cos^2 x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -sen\ x\ cos\ x = -1 \cdot 0 = 0$$

6.24. Calcular $\lim_{x\to \infty} \frac{\cos x + e^x}{\text{sen } x + e^x}$.

Sol.: Es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-sen\ x + e^x}{cos\ x + e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital reiteradamente, permanece la indeterminación. L'Hopital no es aplicable en este caso. Dividiendo por e^x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{cos\ x}{e^x} + 1}{\frac{sen\ x}{e^x} + 1} = 1$$

ya que *sen x* y *cos x* son funciones acotadas y $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

6.25. Representar la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen x si } \frac{-\pi}{2} \le x \le \pi \\ x - \pi \text{ si } \pi < x \le 6 \end{cases}$. Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = \pi$.

Sol.: Las derivadas laterales en $x = \pi$:

$$f'_+(\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\pi+h)-\pi-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(\pi-h)-0}{-h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen\ h}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

No es derivable en $x = \pi$. Las derivadas laterales no coinciden.

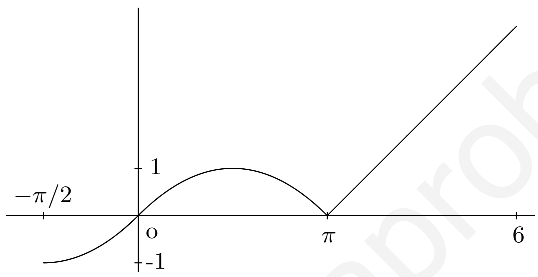

Figura 6.13

Continuidad en $x = \pi$:

1) $f(\pi) = sen\ \pi = 0$.

2) $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\pi+h) = \lim_{h\to 0} (\pi+h-\pi) = 0$.

$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\pi-h) = \lim_{h\to 0}\ sen\ (\pi-h) = 0$.

Por tanto, $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0 = f(\pi)$, lo que implica que $f(x)$ es continua en $x = \pi$.

6.26. Estudiar la derivabilidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x \text{ si } x \le 0} \\ \mathbf{ln\ x \text{ si } x > 0} \end{cases}$ en el punto de abscisa $\mathbf{x = 0}$.

Sol.: Continuidad de la función en $x = 0$:

1) $f(0) = 0$

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0}\ f(0+h) = \lim_{h\to 0}\ ln\ (0+h) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0}\ f(0-h) = \lim_{h\to 0}\ (0-h) = 0$

La función presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$. Por tanto, no es derivable en dicho punto.

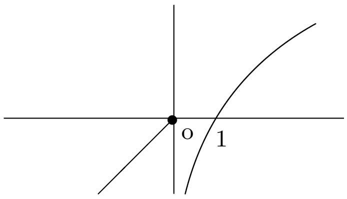

Figura 6.14

6.27. Escribir sin valores absolutos la función $\mathbf{f(x) = |3^x - 3|}$, representarla gráficamente y estudiar su derivabilidad y continuidad en $\mathbf{x = 1}$.

Sol.: $3^x - 3 \geq 0 \Rightarrow 3^x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$. Por tanto, $x \geq 1 \Rightarrow |3^x - 3| = 3^x - 3$. Si $x < 1$, $|3^x - 3| = -(3^x - 3) = -3^x + 3$.

La función puede reescribirse así:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 3 \; si \; x \geq 1 \\ -3^x + 3 \; si \; x < 1 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3^{1+h} - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(3^h - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(h \cdot ln\ 3)}{h} = 3 \cdot ln\ 3$$

ya que $3^h - 1 \approx h \cdot ln\ 3$.

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3^{1-h} + 3}{-h} = -3 \cdot ln\ 3$$

No es derivable en $x = 1$, ya que $f'_+(1) \neq f'_-(1)$.

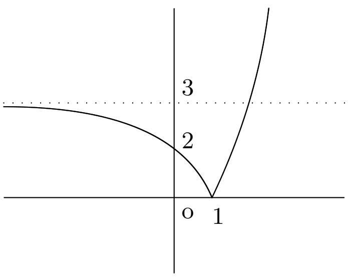

Figura 6.15

Continuidad en $x = 1$:

1) $f(1) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1+h) = \lim\limits_{h \to 0} (3^{1+h} - 3) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1-h) = \lim\limits_{h \to 0} (-3^{1-h} + 3) = 0$.

La función posee límite en $x = 1$.

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

6.28. Estudiar la derivabilidad y continuidad de $\mathbf{f(x) = x - E(x)}$ para los valores enteros de x.

Sol.: Sea $a \in \mathbb{Z}$:

1) $f(a) = a - E(a) = a - a = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} (a+h) - E(a+h) = a - a = 0$.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h \to 0} (a-h) - E(a-h) = a - (a-1) = 1$.

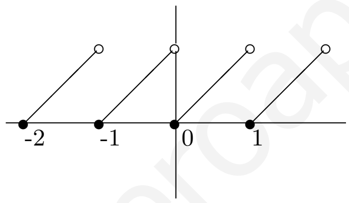

Figura 6.16

Es discontinua de una unidad de salto para $a \in \mathbb{Z}$. Como no es continua, tampoco es derivable en $a \in \mathbb{Z}$.

6.29. Estudiar la continuidad y derivabilidad en $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = -1}$ de la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{sen\ x\ si\ 0 \leq x < \pi} \\ \mathbf{-x^3\ si\ 0 > x > -1} \\ \mathbf{-3x - 2\ si\ \ -1 \geq x} \end{cases}$$

Sol.: Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\ (0+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(0-h)^3 - 0}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{-h} = 0$$

No es derivable en $x = 0$.

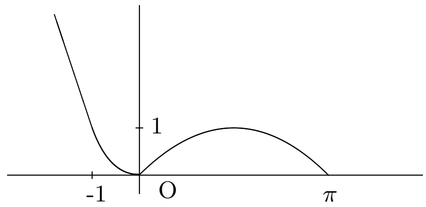

Figura 6.17

Continuidad en $x = 0$:
1) $f(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0+h) = \lim\limits_{h\to 0} sen\ (0+h) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0-h) = \lim\limits_{h\to 0} -(0-h)^3 = 0$.

La función posee límite en $x = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$f'_+(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(-1+h)^3 - 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h + 3h^2 - h^3}{h} = -3$$
$$f'_-(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3(-1-h) - 2 - 1}{-h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{-h} = -3$$

Es derivable en $x = -1$. Es continua por ser derivable en $x = -1$.

6.30. Sabiendo que ln 13 = 2.565, calcular el valor aproximado de ln 13.1.

Sol.: Sea $y = ln\ x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} \cdot dx$.

En $x = 13$: $dy = \frac{1}{13}\ 0.1 = 0.0077$

$$ln\ 13.1 = ln\ 13 + 0.0077 = 2.565 + 0.0077 = 2.5727$$

6.31. Sabiendo que arcsen 0.7 = 0.7754, calcular arcsen 0.72.

Sol.: Se considera la función $y = arcsen\ x$. Su diferencial:

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

En $x = 0.7$: $dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-(0.7)^2}}\,0.02 = 0.028$

$$arcsen\ 0.72 = arcsen\ 0.7 + 0.028 = 0.7754 + 0.028 = 0.8034.$$

6.32. El radio de una esfera mide 10 cm.. Si dicho radio aumenta 1 mm., ¿cuánto aumenta su volumen?.

Sol.: $V = f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

$$dV = 4\pi \cdot 10^2 \cdot\ 0.1 = 125.66\ cm^3.$$

6.33. Hallar el valor de n para que la función $\mathbf{y = \dfrac{nx-1}{x-2}}$ sea creciente.

Sol.: Para que la función sea creciente, la derivada primera ha de ser positiva:

$$y' = \frac{n(x-2)-(nx-1)}{(x-2)^2} = \frac{-2n+1}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow -2n > -1 \Rightarrow 2n < 1 \Rightarrow n < \frac{1}{2}$$

ya que $(x-2)^2 > 0$ para todo valor de x, $x \neq 2$.

6.34. Estudiar y representar gráficamente la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}}$.

Sol.: 1. Dominio. No está definida en $x = 1$ ya que se anula el denominador. El dominio es $I\!R - \{1\}$.

2. Puntos de corte con los ejes. Si $x = 0$, $f(x) = 0$. Si $f(x) = 0$, se tiene $x^2 = 0$, siendo $x = 0$ una raíz doble.

3. Simetrías: $f(-x) = \dfrac{x^2}{-x-1}$. Ya que $f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$, no es ni par ni impar.

4. Crecimiento y decrecimiento. Si la primera derivada es positiva, la función es estrictamente creciente:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x^2 - 2x > 0$$

ya que el denominador es siempre positivo. Resolviendo la anterior inecuación, resulta que $f(x)$ es estrictamente creciente para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Decrece en el intervalo $(0, 2) - \{1\}$.

5. Máximos y mínimos. La primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$$

La segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Se tiene que $f''(0) < 0$, $f''(2) > 0$. La función presenta un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$. Sustituyendo estos valores en $f(x)$: máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $(2, 4)$.

6. Concavidad y convexidad. Si la segunda derivada es mayor que cero, la función es convexa:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Es convexa para $x \in (1, \infty)$ y cóncava para $x \in (-\infty, 1)$.

7. Puntos de inflexión. Carece de ellos, puesto que:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

8. Asíntotas. En $x = 1$ la función presenta una asíntota vertical, ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Por otra parte: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

La función presenta una asíntota oblícua en $y = x + 1$.

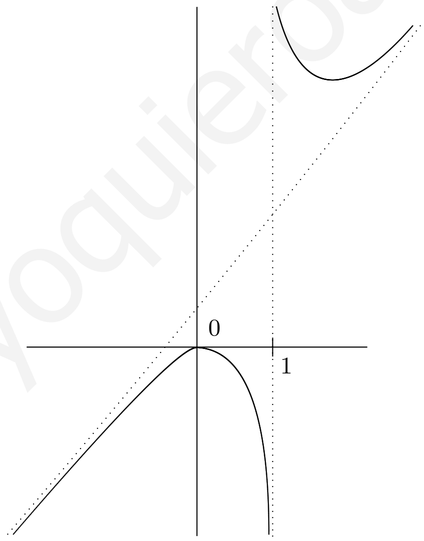

Figura 6.18

6.35. Estudiar y representar la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}}$.

Sol.:

1. Dominio de definición. La función no existe si $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Por tanto, el dominio es $I\!R - \{0\}$.

2. Puntos de corte con los ejes. No hay puntos de corte.

3. Simetrías. $f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} - 1} \Rightarrow f(x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$. Ni par ni impar.

4. Crecimiento y decrecimiento. La primera derivada de la función: $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$. El denominador está elevado al cuadrado y es siempre positivo. El numerador es negativo para todo valor de x. Por tanto, es decreciente $\forall x \in I\!R - \{0\}$.

5. Máximos y mínimos. No hay máximos ni mínimos ya que la primera derivada no se anula para ningún valor de x.

6. Concavidad y convexidad. La segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-e^x(e^x - 1)^2 + 2e^{2x}(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^{2x} + e^x}{(e^x - 1)^3}$$

El numerador es positivo y el denominador lo es si $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$. Por tanto, es convexa en el intervalo $(0, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.

7. No hay puntos de inflexión ya que $f''(x) \neq 0$ para todo valor de x.

8. Asíntota vertical en $x = 0$ ya que para $x = 0$ se anula el denominador.
Asíntota horizontal en $y = 0$ e $y = -1$ ya que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

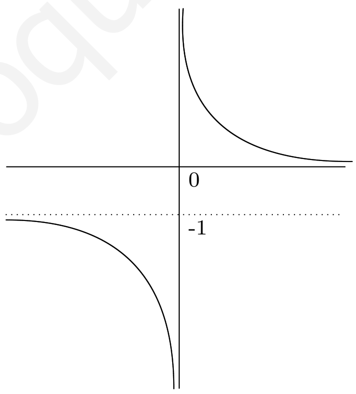

Figura 6.19

6.36. Hallar los catetos del triángulo rectángulo de área máxima, entre

todos aquellos que tienen hipotenusa igual a 20 cm.

Sol.: El área de un triángulo rectángulo de catetos a y b es igual a:

$$S = \frac{ab}{2}$$

y como $a^2 + b^2 = 20^2 \Rightarrow S = \dfrac{a\sqrt{20^2 - a^2}}{2}$.

Se ha obtenido S en función de a. Se ha de hallar el valor de a para el que S alcanza su valor máximo. Para ello, se halla S' y se iguala a cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{20^2 - a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2 \cdot \sqrt{20^2 - a^2}} \right) = 0$$

$$20^2 - a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{200}\ cm.$$
$$b = \sqrt{20^2 - 200} = \sqrt{200}\ cm.$$

Para comprobar que se trata de un máximo, se puede acudir a la segunda derivada y ver que efectivamente $S'(\sqrt{200}) < 0$.

6.37. La base menor de un trapecio rectángulo mide 3 cm. y el lado oblícuo 6 cm. Hallar el ángulo que debe formar dicho lado con la base mayor para que el área sea máxima.

Sol.: El área del trapecio:

$$S = \frac{x + 3 + 3}{2} \cdot h = \frac{x + 6}{2} \cdot h$$

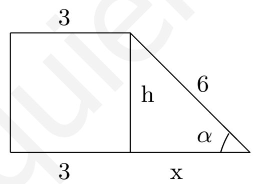

Figura 6.20

Escribiendo x y h en función del ángulo α:

$$S = \frac{6\ cos\ \alpha + 6}{2}\ 6\ sen\ \alpha$$

ya que $h = 6\ sen\ \alpha$ y $x = 6\ cos\ \alpha$.

Derivando e igualando a cero:

$$S' = 18\ [-sen^2\alpha + cos^2\alpha + cos\ \alpha] = 18(2\ cos^2\alpha + cos\ \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 60^o$$

Para verificar el resultado se acude a la segunda derivada:

$$S'' = 18(-4 \cdot cos\ \alpha \cdot sen\ \alpha - sen\ \alpha)$$

$$S''(60^o) < 0$$

6.38. Una estatua de 4 m. de alto está situada sobre una base de 3 m. de altura. ¿A qué distancia, desde el suelo horizontal, se verá dicha estatua bajo un ángulo máximo?.

Sol.:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{tg\ \alpha + \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{3}{x} \cdot tg\ \alpha}$$

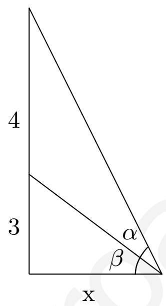

Figura 6.21

Despejando α, derivando e igualando a cero:

$$\alpha = arctg\ \frac{4x}{21 + x^2} \Rightarrow \alpha' = \frac{\dfrac{4(21 + x^2) - 8x^2}{(21 + x^2)^2}}{1 + \left(\dfrac{4x}{21 + x^2}\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$4(21 + x^2) - 8x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{21}\ m.$$

6.39. Un canal de agua tiene una desviación en ángulo recto. El ancho del canal es de 5 metros y el de la desviación es de 3 metros. Hallar la longitud máxima de un tronco que, flotando en el canal, pueda tomar la desviación.

Sol.: Sea $l = a + b$ la longitud total del tronco. Por semejanza de triángulos (ver figura):

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 5^2}}$$

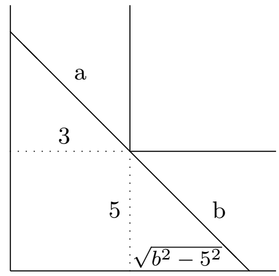

Figura 6.22

$$l = a + b = \frac{3b}{\sqrt{b^2-5^2}} + b$$

$$l' = \frac{3\cdot\sqrt{b^2-5^2} - 3b\,\dfrac{b}{\sqrt{b^2-5^2}}}{b^2-5^2} + 1 = \frac{3\cdot(b^2-5^2)-3b^2}{(b^2-5^2)\cdot\sqrt{b^2-5^2}} + 1 = 0$$

$$-75 + (b^2-5^2)\cdot\sqrt{b^2-5^2} = 0 \Rightarrow (b^2-5^2)^3 = 75^2 \Rightarrow b = \sqrt{25+\sqrt[3]{75^2}} = 6.54\ m.$$

$$a = 4.65\ m.$$

$$l = a + b = 11.19\ m.$$

6.40. Dos ciudades A y B distan 4 y 7 km. de una línea de ferrocarril rectilínea, respectivamente. Sabiendo que la distancia entre ambas es de 5 km., hallar el lugar de la línea en dónde debe situarse una estación para que la longitud de las carreteras a construir sea mínima.

Sol.: El lugar estará situado a x km. del pie de la perpendicular trazada desde la ciudad A a la línea férrea (ver figura).

La longitud de la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre la línea férrea es igual a 4 km:

$$\sqrt{5^2-3^2} = 4$$

La longitud total de las dos carreteras:

$$l = \sqrt{4^2+x^2} + \sqrt{7^2+(4-x)^2}$$

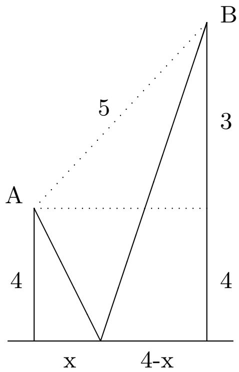

Figura 6.23

Derivando e igualando a cero:

$$l' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{16 + x^2}} - \frac{2(4-x)}{2 \cdot \sqrt{7^2 + (4-x)^2}} = 0$$

Despejando x:

$$x = 1.45\ km.$$

Ejercicios propuestos

6.41. Hallar, mediante límite de cociente de incrementos, la derivada de las funciones: a) $\mathbf{f(x) = \sqrt{2x-1}}$. b) $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}}$.

6.42. Derivada de: a) $\mathbf{y = sen\ x^2}$, b) $\mathbf{y = sen^2 x}$, c) $\mathbf{y = sen^2 x^2}$.

6.43. Hallar la derivada de $\mathbf{y = (sen\ x)^{tg\ x}}$.

6.44. Hallar la derivada de $\mathbf{x^y - y^x = 0}$.

6.45. Hallar la derivada n-sima de $\mathbf{y = \dfrac{1}{x+2}}$.

6.46. Hallar la derivada n-sima de $\mathbf{y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}}$.

6.47. Hallar la derivada n-sima de $\mathbf{y = \dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}}$.

6.48. Hallar la derivada n-sima de $y = \text{sen } 4x$.

6.49. Derivar implícitamente $y^2 \cdot x = x^2 \cdot y$.

6.50. Derivar implícitamente $xy^2 = x \cdot \text{arcsen } y$.

6.51. Derivar implícitamente $(xy)^{\text{sen } x} = y^x$.

6.52. Comprobar si la función $y = e^{ax}$ satisface a la ecuación diferencial $y'' - 2ay' + a^2y = 0$.

6.53. Comprobar si la función $y = \sqrt{(1+x^2)^n}$ satisface a la ecuación diferencial $(1+x^2)y'' + xy' - n^2y = 0$.

6.54. Idem $y = \text{sen}(\ln x)$ a la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + y = 0$.

6.55. Hallar a y b en la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, sabiendo que $y = e^{-x} + 2e^{-2x}$ verifica dicha ecuación.

6.56. Hallar la derivada de $y = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$ con respecto a la variable $u = e^{\text{tg } x}$.

6.57. Dadas $x = \arccos \dfrac{b + a \cdot \cos t}{a + b \cdot \cos t}$ e $y = \text{arctg } \dfrac{\sqrt{a^2-b^2} \cdot \text{sen } t}{b + a \cdot \cos t}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

6.58. Dada la función $y = 4.\ln(x^2+1)$, comprobar que $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1$.

6.59. Hallar el ángulo que forman las curvas de ecuaciones $y^2 - 4x = 0$ y $2x^2 + 5y = 12$ en el punto $(1, 2)$.

6.60. Demostrar que la parábola

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \; a > 0, \; x_1 < x_2$$

corta al eje OX bajo ángulos α y β $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \; 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ que son suplementarios.

6.61. ¿Cómo debe elegirse el parámetro n para que la curva de ecuación $y = \text{arctg } nx$, $n > 0$, corte al eje OX bajo un ángulo mayor que 89^o?.

6.62. Hallar el límite, cuando $n \to \infty$, de la ordenada de la función $y = x^n$, correspondiente al punto de intersección de la tangente en $A(1, 1)$ con el eje de abscisas.

6.63. Hallar los puntos en los que las tangentes a las funciones $y = 2x^2$ e $y = x^4$ son paralelas.

6.64. Hallar las longitudes de la subtangente y subnormal a la función $f(x) = 2x^2$ en $x = 1$.

6.65. Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 5$, que pasa por el origen de coordenadas.

6.66. Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

6.67. Demostrar que la función $f(x) = m \cdot e^{nx}$ tiene subtangente constante.

6.68. En un triángulo rectángulo, el cateto b mide 50 cm. El cateto c disminuye con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad decrece la hipotenusa en el instante en que c=24 cm.?.

6.69. De un globo esférico escapa el aire con una velocidad de 10 cm^3/s.. Cuando el radio del globo es de 50 cm.: a) ¿Con qué rapidez está disminuyendo dicho radio? b) ¿Con qué rapidez está disminuyendo la superficie del globo?.

6.70. Una escalera de mano de 4 m. de largo está apoyada en el suelo horizontal y en un muro vertical. Suponiendo que el pie de la escalera se separa del muro vertical a razón de 20 m. por minuto. a) ¿Con qué velocidad desciende el extremo superior cuando el pie está a 3 m. del muro vertical? b) ¿En qué instante el pie y el extremo superior se están desplazando con la misma velocidad? c) ¿En que instante el extremo superior desciende con una velocidad de 40 m. por minuto?.

6.71. Un punto se mueve con velocidad constante sobre la curva

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

Cuando $x = 1$, la abscisa del punto está variando a razón de 0.6 unidades por segundo. ¿Con qué velocidad varía la ordenada en ese instante?.

6.72. Un punto se mueve con velocidad constante sobre la curva

$$y = 6x^2 - 3x + 2$$

¿En qué punto de la curva la abscisa y la ordenada del punto están variando con la misma rapidez?.

6.73. Un punto se mueve sobre la curva $y = \frac{3}{x+1}$, desplazándose su abscisa con una velocidad constante de 2 unidades por segundo. ¿Con qué

velocidad se está moviendo su ordenada al pasar por el punto $(2,1)$?.

6.74. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^2$, con velocidad constante. ¿En qué lugar de la curva están aumentando con igual velocidad la abscisa y la ordenada de dicho punto?.

6.75. Calcular a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ ax + b \text{ si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

6.76. Estudiar la derivabilidad y continuidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ x^3 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

6.77. Idem en $x = 0$ para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \text{ si } x \geq 0 \\ 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

6.78. Utilizando el concepto de diferencial, hallar aproximadamente $\sqrt{10}$.

6.79. Hallar aproximadamente, utilizando el concepto de diferencial, el incremento del volumen de una esfera de 10 dm. de radio, cuando dicho radio aumenta 3 mm..

6.80. Dada la función $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$, ¿es aplicable el teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$?. Es caso afirmativo, hallar el valor de α.

6.81. Comprobar el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[2,3]$.

Calcular los siguientes límites:

6.82. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

6.83. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \operatorname{sen} x}$.

6.84. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x \cdot e^{2x} - e^{2x} - x + 1}$.

6.85. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

6.86. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos \frac{x}{2} - 1}{x - \ln(1 + x)}$.

6.87. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$.

6.88. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

6.89. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{\text{sen}^2 x}}{\dfrac{1}{1-\cos x}}$.

6.90. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$.

6.91. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \text{tg } x)$.

6.92. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

6.93. $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x-x^3)^{\frac{1}{x}}$.

6.94. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\text{sen } x)^{\text{cosec } \frac{x}{2}}$.

6.95. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

6.96. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2-1}\right)$.

6.97. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

6.98. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-3x-5}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2+5}{x+2}}$.

Estudiar y representar las funciones:

6.99. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.

6.100. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.

6.101. $f(x) = x + \text{sen } x$.

6.102. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$.

6.103. $f(x) = x + e^x$.

6.104. $f(x) = \ln (\text{sen } x)$.

6.105. $f(x) = 2x^2 + |x| + 1$.

6.106. $\mathbf{f(x) = |x^2 - 9| + |x|}$.

6.107. Determinar los valores de a para los que $\mathbf{f(x) = \dfrac{1 - ax}{2 - x}}$ **es decreciente.**

6.108. ¿Es cóncava o convexa la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x + a}{x - a}}$ **en** $\mathbf{x = 2a}$**?.**

6.109. Determinar el punto de la función $\mathbf{f(x) = 2x^2}$ **más próximo al punto** $\mathbf{(0, 6)}$**.**

6.110. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\mathbf{(3, 2)}$ **y determina con los ejes de coordenadas un triángulo de area mínima en el primer cuadrante.**

6.111. Dado un semicírculo de 6 cm. de radio, hallar las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en él.

6.112. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en un cono de 3 m. de radio y 7 m. de altura.

6.113. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor superficie lateral que se puede inscribir en una esfera de 10 cm. de radio.

6.114. En un triángulo se conoce el ángulo α**. Se sabe que los lados contiguos a dicho ángulo suman 20 cm. Hallar la longitud de estos lados de forma que el área del triángulo sea máxima.**

6.115. Determinar un punto de la recta $\mathbf{y = 2x}$ **tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los puntos** $\mathbf{A(-5, 0)}$**,** $\mathbf{B(5, 0)}$ **y** $\mathbf{C(0, c)}$ **sea mínima.**

6.116. Determinar un punto de la recta $\mathbf{y = 2x + 1}$ **tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a las rectas** $\mathbf{y = x + 3}$ **e** $\mathbf{y = 3x - 5}$ **sea mínima.**

6.117. Se tiene un rectángulo de 12 cm. de perímetro. Sobre sus lados se trazan cuatro semicircunferencias exteriores a él. Hallar la superficie total mínima de la figura obtenida.

6.118. Hallar los máximos y mínimos de la función

$$\mathbf{f(x) = \frac{(x - m)(x - n)}{x}}.$$

6.119. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de 10 cm. de radio.

6.120. Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área entre todos los de perímetro igual a L.

6.121. Un espejo plano, de dimensiones 80x90 cm., se rompe por una esquina. De los dos trozos resultantes, el menor tiene forma de triángulo rectángulo, de catetos 10 y 12 cm., correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede construir con el trozo mayor.

6.122. Una esfera de radio R está inscrita en un cono de revolución. ¿Cuál ha de ser el ángulo del vértice del cono para que su superficie total sea mínima?.

6.123. Un barco está situado a 9 km. de la orilla rectilínea. Se quiere enviar un mensajero a un campamento situado en la orilla a 18 km. del barco. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre 4 km. por hora remando y 5 km. por hora andando, hallar a qué punto de la orilla debe dirigirse para llegar al campamento lo antes posible.

6.124. Una ventana tiene forma de rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 4 m., hallar las dimensiones de la ventana de mayor superficie.

6.125. Una empresa fabrica un artículo que vende a 400 euros la unidad. El coste total para colocar en el mercado x unidades de dicho artículo viene dado por la función $f(x) = 0.02x^2 - 160x + 400000$. ¿Cuántos artículos será preciso vender para obtener un beneficio máximo?.

Capítulo 7

Aproximación local de una función

En algunas ocasiones se trabaja con funciones que sería conveniente sustituirlas por otras funciones más sencillas (por ejemplo, un polinomio) y tales que su diferencia con las anteriores en un entorno de un punto sea evaluable y lo más pequeña posible. Es decir, dada una función $f(x)$, buscaremos un polinomio $P(x)$ tal que, en un entorno de un punto dado a, se pueda sustituir $f(x)$ por $P(x)$, cometiendo un pequeño error medible.

7.1 Desarrollo de un polinomio en potencias de x-a

Sea el polinomio $P_n(x)$ de grado n. Supongamos que desarrollado en potencias de $x-a$ tiene la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n \quad (I)$$

Si lo derivamos sucesivamente

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + ... + na_n(x-a)^{n-1}$$
$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + ... + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$

....

$$P_n^{(n}(x) = n!\ a_n$$

Para $x=a$, tenemos que

$$P_n(a) = a_0$$
$$P'_n(a) = a_1$$
$$P''_n(a) = 2a_2$$

$$
\begin{aligned}
&P_n'''(a) = 3 \cdot 2a_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n}(x) = n!\ a_n
\end{aligned}
$$

Si despejamos a_0, a_1, a_2, ..., a_n y sustituimos en $P_n(x)$, tenemos que

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}\ (x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}\ (x-a)^2 + ... + \frac{P_n^{(n}(a)}{n!}\ (x-a)^n$$

que es la llamada *fórmula de Taylor* para polinomios.

Ejemplo 7.1 *Desarrollar en potencias de* $x-2$ *el polinomio* $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3$.

$P(2) = 2^3 + 3.2^2 - 3 = 17$
$P'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow P'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 24$
$P''(x) = 6x + 6 \Rightarrow P''(2) = 6 \cdot 2 + 6 = 18$
$P''(x) = 6 \Rightarrow P''(2) = 6$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 17 + \frac{24}{1!}\ (x-2) + \frac{18}{2!}\ (x-2)^2 + \frac{6}{3!}\ (x-2)^3 =\\
&= 17 + 24\ (x-2) + 9\ (x-2)^2 + (x-2)^3
\end{aligned}
$$

7.2 Fórmulas de Taylor y Mac-Laurin

Supongamos que la función $f(x)$ admite derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto $x = a$ y deseamos hallar un polinomio $P_n(x)$, con el mayor "parecido" posible a $f(x)$ en un entorno de dicho punto, y así poder sustituir $f(x)$ por $P_n(x)$.

Suponemos que $P_n(x)$, desarrollado en potencias de $x-a$, es de la forma vista anteriormente (I):

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n$$

Para lograr el mayor "parecido" posible entre $P_n(x)$ y $f(x)$ en $x = a$, la primera condición es que $P_n(a) = f(a)$, lógicamente. Además, haremos coincidir las derivadas primeras, segundas, terceras, etc., con este fin.

Procediendo del mismo modo que en la sección anterior, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&P_n(a) = a_0 = f(a)\\
&P_n'(a) = a_1 = f'(a)\\
&P_n''(a) = 2a_2 = f''(a)\\
&P_n'''(a) = 3 \cdot 2a_3 = f'''(a)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n}(x) = n!\ a_n = f^{n)}(a)
\end{aligned}
$$

Despejamos a_0, a_1, a_2, ...,a_n, y sustituimos en $P_n(x)$:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\ (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\ (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n}(a)}{n!}\ (x-a)^n$$

que es el *polinomio de Taylor* de orden n de la función $f(x)$ en el punto $x = a$.

Definimos el *resto o término complementario* de orden n de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ como

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}\ (x-a)^{n+1},\ con\ \alpha \in (a, x)$$

$R_n(x)$ expresa el error cometido, en un punto x, al sustituir la función $f(x)$ por $P_n(x)$. Podemos escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\ (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\ (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n}(a)}{n!}\ (x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Si $a = 0$, el desarrollo anterior recibe el nombre de *fórmula de McLaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\ x + \frac{f''(0)}{2!}\ x^2 + ... + \frac{f^{(n}(0)}{n!}\ x^n + R_{n+1}(x)$$

siendo

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1}(\theta x)}{(n+1)!}\ x^{n+1},\ con\ 0 < \theta < 1,$$

de modo que θx está comprendido entre 0 y x.

Ejemplo 7.2 *Desarrollar $f(x) = e^x$ mediante la fórmula de McLaurin para $n = 2$ y $n = 3$.*

Resolución.
$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$
Sustituimos en la fórmula de McLaurin
$P_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}\ x = 1 + x$
$P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}\ x + \frac{1}{2!}\ x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
Representamos gráficamente $f(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$ y apreciamos la aproximación:

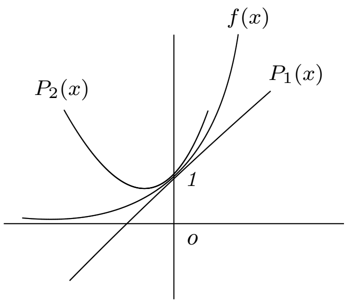

Figura 7.1

En general,

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

siendo $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{\theta x}$, *con* $0 < \theta < 1$.

Ejercicios resueltos

7.1. Desarrollar $\mathbf{f(x) = sen\ x}$ mediante la fórmula de McLaurin para $\mathbf{n = 5}$.

Resolución.

$$f(x) = sen\ x \Rightarrow f(0) = sen\ 0 = 0$$
$$f'(x) = cos\ x \Rightarrow f'(0) = cos\ 0 = 1$$
$$f''(x) = -sen\ x \Rightarrow f''(0) = -sen\ 0 = 0$$
$$f'''(x) = -cos\ x \Rightarrow f'''(0) = -cos\ 0 = -1$$
$$f^{IV}(x) = sen\ x \Rightarrow f(0) = sen\ 0 = 0$$
$$f^{V}(x) = cos\ x \Rightarrow f(0) = cos\ 0 = 1$$
$$f^{VI}(x) = -sen\ x$$

A continuación hallamos $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$, ya que $P_2(x)$ y $P_4(x)$ coinciden con $P_1(x)$ y $P_3(x)$ por ser nulas las derivadas respectivas

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!}\ x = x$$

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}\ x + 0 - \frac{1}{3!}\ x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = 0 + \frac{1}{1!}\ x + 0 - \frac{1}{3!}\ x^3 + 0 + \frac{1}{5!}\ x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

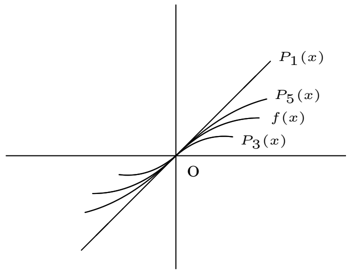

Figura 7.2

El desarrollo de McLaurin para $n = 5$:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{sen\ \theta x}{6!}\ x^6$$

con $\theta \in (0, 1)$.

7.2. Hallar el desarrollo de McLaurin de orden n para la función $\mathbf{f(x) = (1 + x)^m}$.

Resolución.

$f(0) = 1$

$f'(x) = m(1 + x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m$

$f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m(m - 1)$

$f'''(x) = m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3} \Rightarrow f'''(0) = m(m - 1)(m - 2)$

....

$f^{(n}(x) = m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n} \Rightarrow f^{(n}(0) = m(m-1)...(m-n+1)$

El desarrollo de McLaurin:

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1!}\ x + \frac{m(m-1)}{2!}\ x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}\ x^n + R_{n+1}(x) =$$

$$= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}\ x + \binom{m}{2}\ x^2 + ... + \binom{m}{n}\ x^n + R_{n+1}(x)$$

siendo $R_{n+1}(x) = \binom{m}{n+1}\ (1 + \theta x)^{m-n-1} x^{n+1}$.

7.3. Desarrollo de McLaurin para $\mathbf{f(x) = ln\ (1 + x)}$.

Resolución.

$$f(0) = ln\ 1 = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{IV}(0) = -3!$$
....
$$f^{(n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Entonces,

$$ln\ x = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\ \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

siendo $R_{n+1}(x) = \dfrac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, siendo $\theta \in (0,1)$.

7.4. Hallar el desarrollo de orden dos en un entorno de $\frac{\pi}{4}$ para $\mathbf{f(x) = tg\ x}$.

Resolución.

$$f(x) = tg\ x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$
$$f''(x) = \frac{2 \cdot sen\ x}{cos^3 x} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

Aplicando la fórmula de Taylor,

$$tg\ x = 1 + \frac{2}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2 \cdot cos^2\alpha + 6 \cdot sen^2\alpha}{3! \cdot cos^4\alpha}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

con $\frac{\pi}{4} < \alpha < x$.

7.5. En el desarrollo de McLaurin de $\mathbf{f(x) = e^{ax}}$ aparece un término igual a $\mathbf{36x^3}$. Calcular a.

Resolución.

$$f(x) = e^{ax} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = a \cdot e^{ax} \Rightarrow f'(0) = a$$
$$f''(x) = a^2 \cdot e^{ax} \Rightarrow f''(0) = a^2$$

$$f'''(x) = a^3 \cdot e^{ax} \Rightarrow f'''(0) = a^3$$

Por tanto,

$$e^{ax} = 1 + \frac{a}{1!}\, x + \frac{a^2}{2!}\, x^2 + \frac{a^3}{3!}\, x^3 + ...$$
$$\frac{a^3}{3!} = 36 \Rightarrow a = 6.$$

7.6. Hallar cosπ/12, con un error menor que 10^{-3}, utilizando la fórmula de McLaurin.

Resolución.

$$f(x) = cos\ x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -sen\ x \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -cos\ x \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = sen\ x \Rightarrow f'''(0) = 0$$
$$f^{IV}(x) = cos\ x \Rightarrow f^{IV}(0) = 1$$

....

El desarrollo de McLaurin:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

El error ha de ser menor que una milésima: $10^{-3} = 0.001$. Tomamos una cifra decimal más, es decir, cuatro cifras decimales, y si tomamos términos del desarrollo hasta que se anulen dichas cuatro cifras, tenemos

$$cos\ \frac{\pi}{12} = 1 - 0.0342 + 0.0002 - 0.0000 + ... = 0.9659.$$

Directamente, con la calculadora, resulta 0.9659258.

7.7. Hallar ln 1.3, con un error menor que 10^{-2}, utilizando la fórmula de McLaurin para $\mathbf{f(x) = ln\ (1 + x)}$.

Resolución. Como hemos visto en un ejercicio anterior

$$ln\ (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Tomamos $x = 0.3$ y tres cifras decimales, ya que el error ha de ser menor que $10^{-2} = 0.01$:

$$ln\ (1 + 0.3) = 0.3 - 0.045 + 0.009 - 0.002 + 0.000 - ... = 0.262$$

7.8. Dada la función

$$\mathbf{f(x) = 10x^{40} - 3x^{30} + x^{10}}$$

hacer un desarrollo en serie de potencias de $\mathbf{x-1}$ y hallar $\mathbf{f(1.001)}$ con un error menor que $\mathbf{10^{-2}}$.

Resolución.

$$f(x) = 10x^{40} - 3x^{30} + x^{10} \Rightarrow f(1) = 8$$
$$f'(x) = 400x^{39} - 90x^{29} + 10x^{9} \Rightarrow f'(1) = 320$$
$$f''(x) = 15600x^{38} - 2610x^{28} + 90x^{8} \Rightarrow f''(1) = 13080$$
$$f'''(x) = 592800x^{37} - 73080x^{27} + 720x^{7} \Rightarrow f'''(1) = 520440$$

....

El desarrollo de Taylor,

$$f(x) = 8 + \frac{320}{1!}\,(x-1) + \frac{13080}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{520440}{3!}\,(x-1)^3 + ...$$

Tomamos tres cifras decimales, como hicimos en el ejercicio anterior, puesto que el error ha de ser menor que $10^{-2} = 0.01$:

$$f(1.001) = 8 + 0.320 + 0.007 + 0.000 + ... = 8.327$$

7.9. Calcular sen 0.3 mediante la fórmula de McLaurin. Acotar el error cometido al tomar los siete primeros términos del desarrollo.

Resolución.

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{|sen\ (\theta x)|}{8!}\ x^8$$

con $0 < \theta < 1$.

$$sen\ 0.3 = 0.3 - \frac{0.3^3}{3!} + \frac{0.3^5}{5!} - \frac{0.3^7}{7!} = 0.295520206$$

El error cometido es

$$\epsilon = \frac{0.3^8}{8!}\ |sen\ (0.3\ \theta)|$$

y como $|sen\ (0.3\ \theta)| \leq 1$, tenemos que

$$\epsilon < \frac{0.3^8}{8!} = 0.0000000016$$

7.10. Utilizando un desarrollo en serie, calcular el valor de $\mathbf{e^{0.2}}$ para $\mathbf{n = 3}$ y acotar el error cometido.

Resolución.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

Por tanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_4(x)$$

con $R_4(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{4!}\, x^4$, $0 < \theta < 1$.

En el intervalo $(0, 0.2)$, 2 es una cota superior de $f(x)$ es

$$R_4(x) < \frac{2 \cdot (0.2)^4}{4!} = 0.000133333...$$

siendo $e^{0.2} = 1 + 0.2 + \dfrac{(0.2)^2}{2!} + \dfrac{(0.2)^3}{3!} = 1.221333333...$

7.11. Calcular, mediante un desarrollo en serie, el siguiente límite

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{e - e^{\cos\ x}}}.$$

Resolución. Desarrollando en serie de McLaurin $e^{cos\ x}$,

$$f(x) = e^{cos\ x} \Rightarrow f(0) = e$$

$$f'(x) = -sen\ x \cdot e^{cos\ x} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = sen^2 x \cdot e^{cos\ x} - cos\ x \cdot e^{cos\ x} \Rightarrow f''(0) = -e$$

....

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e - (e - \frac{e}{2!}\, x^2 + ...)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{e}{2!}\, x^2 - ...} = \frac{2}{e}.$$

7.12. Calcular, mediante un desarrollo en serie, la integral

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{0.5}} \frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{x}}\, \mathbf{dx}.$$

Resolución. Desarrollamos en serie *sen x*

$$\int_0^{0.5} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...}{x}\, dx = \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + ...\right]_0^{0.5} = 0.4993553...$$

7.13. Resolver la ecuación cos x = x.

Resolución. Desarrollamos *cos x* en serie de McLaurin

$$1-\frac{x^2}{2}=x \Rightarrow x^2+2x-2=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{3}$$

Hemos tomado $cos\ x \approx 1-\dfrac{x^2}{2}$ por motivos de sencillez en los cálculos. La solución obtenida ha sido $x=-1+\sqrt{3}=0.732050....$ La solución verdadera es $x=0.739085...$

7.14. Hallar una función $\mathbf{f(x)}$ tal que $\mathbf{f(0)=1}$ y $\mathbf{f'(x)=f(x)+x}$.

Resolución.

$$f'(0)=f(0)+0=1+0=1$$
$$f''(x)=f'(x)+1 \Rightarrow f''(0)=f'(0)+1=1+1=2$$
$$f'''(x)=f''(x) \Rightarrow f'''(0)=f'(0)=2$$
$$f^{(n}(0)=2,\ \forall n\geq 2$$

Desarrollamos por McLaurin

$$f(x)=1+x+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+...=$$
$$=-1-x+2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)=-1-x+2e^x.$$

ya que $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$.

Ejercicios propuestos

7.15. Desarrollar en potencias de $\mathbf{x-1}$ el polinomio $\mathbf{P(x)=x^4-1}$.

Desarrollar en serie de McLaurin las funciones siguientes:

7.16. $\mathbf{f(x)=a^x}$

7.17. $\mathbf{f(x)=}$ arcsen x

7.18. $\mathbf{f(x)=}$ arccos x

7.19. $\mathbf{f(x)=}$ arctg x

7.20. $\mathbf{f(x)=}$ sec x

7.21. $\mathbf{f(x) = \ln \cos x}$

7.22. $\mathbf{f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})}$

7.23. Obtener los cuatro primeros términos del desarrollo de ln x en potencias de $\mathbf{x - 2}$.

7.24. Obtener los ocho primeros términos del desarrollo de $\mathbf{e^x}$ en potencias de $\mathbf{x - 1}$.

7.25. Desarrollar en serie, mediante la fórmula de McLaurin, la función

$$\mathbf{f(x) = (x + 3)e^{2x}}$$

hasta el orden 3.

7.26. Hacer un desarrollo de la función

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$$

en potencias de $\mathbf{x - 1}$.

7.27. Hallar una cota del error cometido al calcular cos 0.1 a partir del desarrollo de McLaurin para $\mathbf{n = 7}$.

7.28. Hallar el valor de a para que en el desarrollo de la función $\mathbf{y^3 - axy - 8 = 0}$, en un entorno de cero, aparezca un término igual a

$$\mathbf{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3!}}.$$

7.29. Verificar la fórmula aproximada

$$\mathbf{\ln (10 + x) = 2.3 + \frac{x}{10}}$$

Comparar los resultados obtenidos con la fórmula anterior para $\mathbf{x = -0.3}$ utilizando la calculadora.

7.30. Calcular, mediante desarrollos en serie, el límite

$$\lim_{x \to 0} \mathbf{\frac{x}{\cos x - e^x}}.$$

7.31. Calcular, mediante un desarrollo en serie, el límite

$$\lim_{x \to 0} \mathbf{\frac{x + \cos x - 1}{x}}.$$

7.32. Calcular, mediante un desarrollo en serie, la integral

$$\int_0^{0.5} \mathbf{e^{-x^2}\ dx}.$$

Capítulo 8

La integral indefinida

La integración es uno de los conceptos más importantes del Cálculo. Es la operación inversa de la diferenciación y surge de la necesidad de hallar el área limitada por una curva. En este capítulo, dada la diferencial de una función, estudiaremos diversos métodos para hallar dicha función.

8.1 Introducción

Sea la expresión

$$\frac{dF(x)}{dx} = 4x - 12 \quad \text{o bien} \quad dF(x) = (4x-12)\ dx$$

Si deseamos hallar la función $F(x)$, encontramos infinitas soluciones:

$$F(x) = 2x^2 - 12x$$
$$F(x) = 2x^2 - 12x + 5$$
$$F(x) = 2x^2 - 12x - 7$$

....

Deducimos de lo anterior que $F(x)$ ha de ser $F(x) = 2x^2 - 12x + C$, siendo C una constante.

En general, si $f(x)$ está definida en un intervalo (a,b) y $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ en (a,b), decimos que $F(x)$ es una *primitiva* de $f(x)$ y la escribimos en la forma

$$F(x) = \int f(x)\ dx$$

En la función del ejemplo anterior,

$$\int (4x-12)\ dx = 2x^2 - 12x + C$$

en donde C es la llamada *constante de integración*.

Proposición 8.1 *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F_1(x)$ y $F_2(x)$ se diferencian en una constante.*

En efecto,

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = f(x),\ \frac{dF_2(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF_1(x)}{dx} - \frac{dF_2(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d[F_1(x) - F_2(x)]}{dx} = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C. \ \square$$

Por lo tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, todas las primitivas de $f(x)$ son de la forma

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

El conjunto de las funciones de la forma $F(x) + C$ recibe el nombre de *integral indefinida* de $f(x)$.

8.2 Propiedades elementales

1. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales respectivas:

$$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función:

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$$

8.3 Tabla de integrales

Mediante la regla de la cadena y las fórmulas de derivación, obtenemos la tabla siguiente:

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$$

$$\int f'(x)\ [f(x)]^n\ dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int f'(x)\ sen\ [f(x)]\ dx = -cos\ [f(x)] + C$$

$$\int f'(x)\ cos\ [f(x)]\ dx = sen\ [f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = ln\ |f(x)| + C$$

$$\int f'(x)\ e^{f(x)}\ dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x)\ a^{f(x)}\ dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\ a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\ dx = arcsen\ f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\ dx = arccos\ f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\ dx = arctg\ f(x) + C$$

8.4 Integración por sustitución

Si deseamos calcular una integral $\int f(x)\ dx$, puede ocurrir que la sustitución $x = u(t)$ transforme dicha integral en otra más sencilla de calcular. En efecto, si $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)\ dt$. Y entonces

$$\int f(x)\ dx = \int f[u(t)]\ u'(t)\ dt$$

Integral que, una vez hallada la primitiva en función de la variable t, puede escribirse en función de x hallando la función inversa de $x = u(t)$.

Ejemplo 8.1 *Sea* $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$*. Mediante el cambio* $x = sen\ t \Rightarrow dx = cos\ t\ dt$*:*

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int cos^2 t\ dt = \int \frac{1+cos\ 2t}{2}\ dt = \frac{t}{2} + \frac{sen\ 2t}{4} + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{sen\ t \cdot cos\ t}{2} + C = \frac{arcsen\ x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

8.5 Integración por partes

Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$, derivables en el intervalo (a,b). Entonces, la función $u(x) \cdot v(x)$ es derivable en (a,b), siendo

$$d(uv) = u\ dv + v\ du$$

Si integramos los dos miembros

$$uv = \int u\ dv + \int v\ du \Rightarrow \int u\ dv = uv - \int v\ du$$

que es la fórmula de la *integración por partes*.

Ejemplo 8.2 *Calcular* $\int x \cdot ln\ x\ dx$.

Elegimos convenientemente u *y* dv*:*

$$u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = x\ dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto,

$$\int x \cdot ln\ x\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x^2}{2}\ \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \frac{x^2}{4} + C$$

8.6 Integración de funciones racionales

Para obtener la primitiva de una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grados m y n respectivos, procedemos del modo siguiente:

1. Si $m \geq n$, efectuamos la división entre $P(x)$ y $Q(x)$, obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

siendo $C(x)$ y $R(x)$ los polinomios cociente y resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$. A la función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$ le aplicamos el procedimiento expuesto a continuación, dado que el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

2. Si $m < n$, se consideran cuatro casos:

a. El polinomio $Q(x)$ tiene n raíces reales distintas, x_1, ..., x_n. En este caso, efectuamos una descomposición en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + ... + \frac{A_n}{x - x_n}$$

en donde A_1, A_2, ..., A_n son números reales que podemos calcular sumando las fracciones anteriores e identificando los coeficientes de las potencias de igual grado de los numeradores del primer y segundo miembro. De este modo, aparecen integrales muy sencillas, de la forma

$$\int \frac{A}{x - k}\ dx = A \cdot ln\ |x - k| + C$$

b. Si el polinomio $Q(x)$ tiene una raíz x_1, de orden de multiplicidad r, efectuamos una descomposición de la forma

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\frac{A_3}{(x-x_1)^3}+...+\frac{A_r}{(x-x_1)^r}$$

y los coeficientes $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,\ A_r$ se hallan del modo antes expuesto.

Si $Q(x)$, además de la raíz múltiple x_1, posee raíces reales simples, a éstas las tratamos del modo expuesto en el apartado a.

c. Si en el denominador $Q(x)$ aparece un factor de la forma ax^2+bx+c, que no posee raíces reales, tomamos una fracción de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

y calculamos A y B modo análogo a como se hizo anteriormente.

d. Si en $Q(x)$ aparece un factor $(ax^2+bx+c)^r$, donde ax^2+bx+c no posee raíces reales, tomamos una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

8.7 Método de Hermite

Este método se suele emplear cuando las raíces de $Q(x)$ son múltiples (especialmente si son complejas).

El integrando se descompone de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{d}{dx}\left[\frac{q(x)}{Q^*(x)}\right]+\frac{c(x)}{C(x)}$$

donde $Q^*(x)$ es el máximo común divisor de $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$. El polinomio $q(x)$, con coeficientes indeterminados, tiene su grado inferior en una unidad a $Q^*(x)$. Por último, $C(x)=\dfrac{Q(x)}{Q^*(x)}$ y $c(x)$ es un polinomio con coeficientes indeterminados y grado inferior en una unidad a $C(x)$.

Derivamos $\dfrac{q(x)}{Q(x)}$, hallamos los coeficientes indeterminados y obtenemos

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{q(x)}{Q^*(x)}+\int\frac{c(x)}{C(x)}\,dx$$

El problema se reduce al cálculo de esta última integral.

8.8 Integración de funciones racionales trigonométricas

Las integrales de la forma

$$\int R(sen\ x,\ cos\ x)\ dx$$

donde $R(sen\ x,\ cos\ x)$ es una función racional de $sen\ x$ y $cos\ x$, se pueden resolver mediante el cambio $x = 2 \cdot arctg\ t$.

Escribimos $sen\ x$ y $cos\ x$ en función de t:

$$sen\ x = \frac{2t}{1+t^2} \quad cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

La diferencial es

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y el integrando se transforma en una función racional en la variable t. Por último, escribimos la primitiva en función de x haciendo $t = tg\ \dfrac{x}{2}$.

8.9 Integrales de la forma $\mathbf{I_n = \int \cos^n x\ dx,\ \ n \in I\!N}$

Si $n = 1$ ó $n = -2$, la integral es inmediata.

Ejemplo 8.3

$$\int cos\ x\ dx = sen\ x + C$$

Ejemplo 8.4

$$\int cos^{-2}x\ dx = tg\ x + C$$

Veamos los casos restantes:

1. Si n es impar positivo, hacemos el cambio $sen\ x = t$.

Ejemplo 8.5 *Calcular* $\int cos^3x\ dx$.

Hacemos el cambio $sen\ x = t \Rightarrow cos\ x\ dx = dt$ *y resulta*

$$\int cos^3x\ dx = \int cos^2x \cdot cos\ x\ dx = \int\ (1 - sen^2x) \cdot cos\ x\ dx =$$

$$= \int\ (1-t^2)\ dt = t - \frac{t^3}{3} + C = sen\ x - \frac{sen^3x}{3} + C$$

2. Si n es par positivo, usamos la fórmula $\quad cos^2 x = \dfrac{1 + cos\ 2x}{2}$ o la fórmula recurrente [1]

$$n \cdot I_n = cos^{n-1}x \cdot sen\ x + (n-1) \cdot I_{n-2}$$

que rebaja el grado en dos unidades.

Ejemplo 8.6 *Calcular* $\int cos^4 x\ dx$.

$$\int cos^4 x\ dx = \int \left(\frac{1 + cos\ 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\ cos\ x + cos^2 2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + sen\ 2x + \frac{1}{2}\ (x + \frac{sen\ 4x}{4})\right] + C = \frac{3}{8}\ x + \frac{1}{4}\ sen\ 2x + \frac{1}{32}\ sen\ 4x + C$$

ya que

$$\int cos^2 2x\ dx = \int \frac{1 + cos\ 4x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen\ 4x}{4} + C\right) + C$$

Vamos a hacerlo de nuevo con la fórmula recurrente anterior:

$$4 \cdot I_4 = cos^3 x \cdot sen\ x + 3 \cdot I_2$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \cdot cos^3 x \cdot sen\ x + \frac{3}{4} \int cos^2 x\ dx = \frac{1}{4}\ cos^3 x \cdot sen\ x + \frac{3}{4} \int \frac{1 + cos\ 2x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ cos^3 x \cdot sen\ x + \frac{3}{8}\ x + \frac{3}{16}\ sen\ 2x + C$$

3. Si n es negativo, utilizamos la fórmula recurrente anterior, despejando I_{n-2}. Si n es par, llegamos a I_{-2}. Si n es impar, llegamos a I_{-1}, que resolvemos mediante el cambio $sen\ x = t$ ó $t = tg\ \dfrac{x}{2}$.

Ejemplo 8.7 *Calcular* $\int cos^{-3} x\ dx$.

$$n - 2 = -3 \Rightarrow n = -1$$

$$-1 \cdot I_{-1} = cos^{-2} x \cdot sen\ x - 2 \cdot I_{-3} \Rightarrow$$

$$I_{-3} = \frac{1}{2}\ I_{-1} - \frac{1}{2}\ \frac{sen\ x}{cos^2 x} = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1 + tg\ \frac{x}{2}}{1 - tg\ \frac{x}{2}}\right| - \frac{sen\ x}{2\ cos^2 x} + C$$

ya que

$$I_{-1} = \int \frac{dx}{cos\ x} = 2 \int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{1 + t} + \int \frac{dt}{1 - t} =$$

[1] Fórmula recurrente es aquella que está definida en términos de ella misma.

$$= ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = ln\ \left|\frac{1+tg\ \frac{x}{2}}{1-tg\ \frac{x}{2}}\right| + C$$

haciendo el cambio $x = 2\ arctg\ t$.

8.10 Integrales de la forma $\mathbf{I_n = \int sen^n x\ dx,\ \ n \in I\!N}$

Si $n = 1$ ó $n = -2$, la integral es inmediata.

Ejemplo 8.8

$$\int sen\ x\ dx = -cos\ x + C$$

Ejemplo 8.9

$$\int sen^{-2} x\ dx = ctg\ x + C$$

Veamos los casos restantes:

1. Si n es impar positivo, hacemos el cambio $cos\ x = t$.

Ejemplo 8.10 *Calcular* $\int sen^3 x\ dx$.

Hacemos el cambio $cos\ x = t \Rightarrow -sen\ x\ dx = dt$ *y resulta*

$$\int sen^3 x\ dx = \int sen^2 x \cdot sen\ x\ dx =$$

$$= -\int (1-t^2)\ dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -cos\ x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

2. Si n es par positivo, usamos la fórmula $sen^2 x = \dfrac{1-cos\ 2x}{2}$ o la fórmula recurrente

$$n \cdot I_n = -sen^{n-1} x \cdot cos\ x + (n-1) \cdot I_{n-2}$$

que rebaja el grado en dos unidades.

Ejemplo 8.11 *Calcular* $\int sen^4 x\ dx$.

$$\int sen^4 x\ dx = \int\ \left(\frac{1-cos\ 2x}{2}\right)^2\ dx = \frac{1}{4}\ \int\ (1-2\ cos\ x + cos^2 2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ \big[x - sen\ 2x + \frac{1}{2}\ (x + \frac{sen\ 4x}{4})\big] + C = \frac{3}{8}\ x - \frac{1}{4}\ sen\ 2x + \frac{1}{32}\ sen\ 4x + C$$

ya que

$$\int\ cos^2 2x\ dx = \int\ \frac{1 + cos\ 4x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\ \big(x + \frac{sen\ 4x}{4} + C\big) + C$$

Vamos a hacerlo de nuevo con la fórmula recurrente

$$n \cdot I_n = -sen^{n-1}x \cdot cos\ x + (n-1) \cdot I_{n-2} \Rightarrow$$

$$4 \cdot I_4 = -sen^3 x \cdot cos\ x + 3 \cdot I_2$$

donde $I_2 = sen^2 x\ dx = \int\ \frac{1 - cos\ 2x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\ \Big(x - \frac{sen\ 2x}{2}\Big) + C.$

$$I_4 = \frac{1}{4} \cdot cos^3 x \cdot sen\ x + \frac{3}{4}\ \int\ cos^2 x\ dx = \frac{1}{4}\ cos^3 x \cdot sen\ x + \frac{3}{4} \int\ \frac{1 + cos\ 2x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ \Big(-sen^3 x \cdot cos\ x + \frac{3}{2}\ (x - sen\ x \cdot cos\ x)\Big) + C$$

3. Si n es negativo, utilizamos la fórmula recurrente anterior

$$n \cdot I_n = -sen^{n-1}x \cdot cos\ x + (n-1) \cdot I_{n-2} \Rightarrow$$

despejando I_{n-2}*. Si n es par, llegamos a* I_{-2}*. Si n es impar, llegamos a* I_{-1}*, que resolvemos mediante el cambio* $cos\ x = t$ *ó* $x = 2 \cdot arctg\ t$*.*

Ejemplo 8.12 *Calcular* $\int sen^{-3}x\ dx$*.*

$$n - 2 = -3 \Rightarrow n = -1$$

$$-1 \cdot I_{-1} = -sen^{-2}x \cdot cos\ x - 2 \cdot I_{-3} \Rightarrow$$

$$I_{-3} = \frac{1}{2}\ I_{-1} - \frac{1}{2}\ sen^{-2}x \cdot cos\ x = \frac{1}{2}\ ln\ \Big|tg\ \frac{x}{2}\Big| - \frac{1}{2}\ sen^{-2}x \cdot cos\ x + C$$

ya que

$$I_{-1} = \int \frac{dx}{sen\ x} = 2\ \int \frac{dt}{t} = ln\ |t| + C = ln\ \big|tg\ \frac{x}{2}\big| + C$$

haciendo el cambio $x = 2\ arctg\ t$*.*

8.11 Integrales $\int \mathbf{sen^m \cdot cos^n x \; dx}$, $\mathbf{m, n} \in \mathbb{Z}$

1. Si m es impar positivo, hacemos el cambio $cos\ x = t$.

Ejemplo 8.13 *Calcular* $\int sen\ x \cdot cos^2 x\ dx$.

Hacemos el cambio $cos\ x = t \Rightarrow -sen\ x\ dx = dt$ *y tenemos*

$$\int sen\ x \cdot cos^2 x\ dx = -\int t^2\ dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{cos^3 x}{3} + C$$

2. Si n es impar positivo, hacemos el cambio $sen\ x = t$.

Ejemplo 8.14 *Calcular* $\int sen^2 x \cdot cos\ x\ dx$.

Hacemos el cambio $sen\ x = t \Rightarrow cos\ x\ dx = dt$ *y tenemos*

$$\int sen^2 x \cdot cos\ x\ dx = \int t^2\ dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{sen^3 x}{3} + C$$

3. Si m y n son pares positivos, usamos las fórmulas

$$sen^2 x = \frac{1 - cos\ 2x}{2} \quad y \quad cos^2 x = \frac{1 + cos\ 2x}{2}$$

Ejemplo 8.15 *Calcular* $\int sen^2 x \cdot cos^2 x\ dx$.

$$\int sen^2 x \cdot cos^2 x\ dx = \int \frac{1 - cos\ 2x}{2} \cdot \frac{1 + cos\ 2x}{2}\ dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos^2 2x)\ dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int cos^2 2x\ dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1 + cos\ 4x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{sen\ 4x}{32} + C = -\frac{x}{4} - \frac{sen\ 4x}{32} + C$$

4. Si m y n son negativos pero al menos uno de ellos dos es impar, hacemos el cambio $cos\ x = t$ si el impar es m. Si el impar es n hacemos $sen\ x = t$.

Ejemplo 8.16 *Calcular* $\int sen^{-1} x \cdot cos^{-2} x\ dx$.

$$\int sen^{-1} x \cdot cos^{-2} x\ dx = \int \frac{dx}{sen\ x \cdot cos^2 x}$$

Hacemos el cambio $cos\ x = t \Rightarrow -sen\ x = t$ y obtenemos

$$\int \frac{dx}{sen\ x \cdot cos^2 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)\cdot t^2}$$

Hacemos una descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)\cdot t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} =$$

$$= \frac{A(1-t)t^2 + B(1+t)t^2 + Ct(1-t^2) + D(1-t^2)}{(1+t)(1-t)\cdot t^2} =$$

$$= \frac{(-A+B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + Ct + D}{(1+t)(1-t)\cdot t^2}$$

Identificamos coeficientes y obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -A+B-C=0 \\ A+B-D=0 \\ C=0 \\ D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2},\ C=0,\ D=1$$

Por último

$$-\int \frac{dt}{(1-t^2)\cdot t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ ln|1+t| + \frac{1}{2}\ ln|1-t| + \frac{1}{t} + C = ln\ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= ln\ \sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} + \frac{1}{cos\ x} + C$$

5. Si m y n son pares y negativos, hacemos el cambio $tg\ x = t$, del que deducimos que $cos^{-2}x = 1+t^2$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ y $sen^{-2}x = \dfrac{1+t^2}{t^2}$.

Ejemplo 8.17 *Calcular* $\int sen^{-2}x \cdot cos^{-2}x\ dx$.

$$\int sen^{-2}x \cdot cos^{-2}x\ dx = \int \frac{dx}{sen^2x \cdot cos^2x}$$

Hacemos el cambio $tg\ x = t$ y obtenemos

$$\int \frac{dx}{sen^2x \cdot cos^2x} = \int \frac{1+t^2}{t^2}\ dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\ dt = -\frac{1}{t} + t + C = -ctg\ x + tg\ x + C$$

8.12 Integrales irracionales

a. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, hacemos el cambio $x=\dfrac{a}{b}\,tg\ t$, resultando $\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=a\cdot sec\ t$.

b. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, hacemos el cambio $x=\dfrac{a}{b}\ sen\ t$, resultando $\sqrt{a^2-a^2sen^2t}=a\cdot cos\ t$.

c. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{bx^2-a^2}$, hacemos el cambio $x=\dfrac{a}{b}\ sec\ t$, resultando $\sqrt{a^2sec^2t-a^2}=a\cdot tg\ t$.

d. Si aparece la expresión $\sqrt{x^2+bx+c}$, hacemos $\sqrt{x^2+bx+c}=t-x$ y se transforma en una integral racional.

e. Si aparece la expresión $\sqrt{-x^2+bx+c}=\sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)}$, hacemos $-x^2+bx+c=(\alpha+x)^2t^2$ y se transforma en una integral racional.

8.13 Integrales binomias

Son de la forma $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, siendo $a,b\in I\!R$ y $m,n,p\in \mathbb{Q}$, distintos de cero.

Para resolverlas, hacemos el cambio $x^n=t$ y obtenemos una integral de la forma

$$\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p\ dt$$

en la que se pueden presentar los casos siguientes:

a. p es un número entero positivo. Desarrollamos $(a+bx^n)^p$ y obtenemos una suma de integrales inmediatas.

b. q es un número entero y $p=\dfrac{r}{s}$ racional. Hacemos el cambio $a+bt=z^s$.

c. p y $q=\dfrac{r}{s}$ son números racionales pero $p+q$ es entero. Hacemos $\dfrac{a+bt}{t}=z^s$.

d. $p<0$ entero y $q=\dfrac{r}{s}$ racional. Hacemos $t=z^s$.

Ejercicios resueltos

8.1. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathbf{x}}+\sqrt[3]{\mathbf{x^2}}}{\sqrt{\mathbf{x}}}\ \mathbf{dx}$.

Resolución. El mínimo común múltiplo de los índices de las raíces es 6. Por lo tanto, hacemos la sustitución $x = t^6$ y tenemos que

$$\int \frac{t^3 + t^4}{t^3} \; 6t^5 \; dt = 6 \int (t^5 + t^6) \; dt = 6 \left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7}\right) + C = x + 6 \; \frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} + C$$

8.2. Calcular $\displaystyle\int \mathbf{sen^3 x \; dx}$.

Resolución. Mediante la sustitución $cos\ x = t \Rightarrow -sen\ x\ dx = dt$, obtenemos

$$\int sen^2 x \cdot sen\ x\ dx = -\int (1 - t^2)\ dt = -\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = -cos\ x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

8.3. Calcular $\displaystyle\int \mathbf{\frac{dx}{x^2 + 4x + 8}\ dx}$.

Resolución.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}\ dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}\ dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\ arctg \left(\frac{x+2}{2}\right) + C$$

8.4. Calcular $\displaystyle\int \mathbf{x \cdot e^x\ dx}$.

Resolución. Por partes

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int x \cdot e^x\ dx = x \cdot e^x - \int e^x\ dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

8.5. Calcular $\displaystyle\int \mathbf{e^x \cdot sen\ x\ dx}$.

Resolución. Integramos por partes

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x\ dx$$

$$dv = sen\ x\ dx \Rightarrow v = -cos\ x$$

$$I = \int e^x \cdot sen\ x\ dx = -e^x \cdot cos\ x + \int e^x \cdot cos\ x\ dx$$

Aplicamos de nuevo integración por partes

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x \ dx$$

$$dv = cos \ x \ dx \Rightarrow v = sen \ x$$

$$I = \int e^x \cdot sen \ x \ dx = -e^x \cdot cos \ x + e^x \cdot sen \ x - \int e^x \cdot sen \ x \ dx =$$
$$= -e^x \cdot cos \ x + e^x \cdot sen \ x - I$$

Por tanto:

$$I + I = 2I = -e^x \cdot cos \ x + e^x \cdot sen \ x \Rightarrow I = \frac{-e^x \cdot cos \ x + e^x \cdot sen \ x}{2} + C$$

8.6. Calcular $\mathbf{I} = \int$ arctg x dx.

Resolución. Integramos por partes

$$u = arctg \ x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \int arctg \ x \ dx = x \cdot arctg \ x - \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot arctg \ x - \frac{1}{2} \ ln \ (1+x^2) + C$$

8.7. Calcular $\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{x^3+2x+1}}{\mathbf{x^2-5x+6}}$ dx.

Resolución. Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, efectuamos la división

$$\int \left(x + 5 + \frac{21x-29}{x^2-5x+6} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{21x-29}{(x-2)(x-3)} \ dx$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{21x-29}{(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{(A_1+A_2)x - 3A_1 - 2A_2}{(x-2)(x-3)}$$

Identificamos coeficientes

$$\left. \begin{array}{r} A_1 + A_2 = 21 \\ -3A_1 - 2A_2 = -29 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = -13, \ A_2 = 34$$

$$\int \frac{21x-29}{(x-3)(x-2)}\,dx = \int \frac{-13}{x-2}\,dx + \int \frac{34}{x-3}\,dx$$

$$I = \frac{x^2}{5} + 5x - 13 \cdot ln\,|x-2| + 34 \cdot ln\,|x-3| + C$$

8.8. Calcular $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(x-1)^2(x+1)}}$**.**

Resolución.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1} =$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(A_1+A_3)x^2 + (A_2-2A_3)x - A_1 + A_2 + A_3}{(x-1)^2(x+1)}$$

Identificamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{r} A_1 + A_3 = 0 \\ A_2 - 2A_3 = 0 \\ -A_1 + A_2 + A_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{4},\ A_2 = \frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{4}$$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\,ln\,|x+1| + C$$

8.9. Calcular $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x \cdot dx}}{\mathbf{(x^2+x+1)(x+1)}}$**.**

Resolución.

$$\frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+1}$$

Procedemos como en el ejercicio anterior e identificamos coeficientes

$$A = B = 1,\ C = -1$$

La integral se reduce a dos integrales más sencillas

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{dx}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx - ln\,|x+1| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx - ln\,|x+1| =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - ln\,|x+1|$$

Por último, tenemos que resolver la integral

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{4}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= arctg\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

8.10. Calcular $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(9+x^2)^2}}$.

Resolución. El denominador no tiene raíces reales. Vamos a utilizar el método de Hermite

$$Q(x) = (9+x^2)^2$$
$$Q'(x) = 2\cdot(9+x^2)\cdot 2x$$
$$Q^*(x) = m.c.d.\ \{Q(x), Q'(x)\} = 9+x^2$$

Por tanto

$$\frac{1}{(9+x^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ax+B}{9+x^2}\right)+\frac{Cx+D}{9+x^2}$$

Derivamos $\frac{Ax+B}{9+x^2}$ e identificamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{r} C=0 \\ -A+D=0 \\ -2B+9C=0 \\ 9A+9D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=D=\frac{1}{18},\ B=C=0$$

Resultando

$$I = \frac{x}{18(9+x^2)}+\frac{1}{18}\int\frac{dx}{9+x^2} = \frac{x}{18(9+x^2)}+\frac{1}{54}\,arctg\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

8.11. Calcular $\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{3+\cos x}}$.

Resolución. Hacemos $x = 2\cdot arctg\ t$ (sección 8.8)

$$I = \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\cdot dt}{1+t^2} = \int\frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, arctg\, \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, arctg\, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot tg\, \frac{x}{2}\right) + C$$

8.12. Calcular $\int$ cosec x dx.

Resolución. La haremos mediante el cambio $x = 2 \cdot arctg\ t$ (sección 8.8)

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\ dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = ln\ |t| + C = ln\ \left|tg\ \frac{x}{2}\right| + C$$

8.13. Calcular $\int \frac{\sqrt{\mathbf{x^2+4}}}{\mathbf{x}}$ dx.

Resolución. Mediante el cambio $x = 2 \cdot tg\ t$ (sección 8.9), se convierte en racional

$$I = \int \frac{\sqrt{4 \cdot tg^2 t + 4}}{2 \cdot tg\ t} \cdot \frac{2\ dt}{cos^2 t} = 2 \int \frac{sec\ t\ dt}{tg\ t \cdot cos^2 t} = 2 \int \frac{dt}{sen\ t \cdot cos^2 t}$$

Hacemos $t = 2 \cdot arctg\ z$ (sección 8.8)

$$I = 2 \cdot \int \frac{\frac{2\ dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} \cdot \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2} = 2 \int \frac{(1+z^2)^2\ dz}{z \cdot (1-z^2)^2}$$

Y mediante una descomposición en fracciones simples

$$\frac{(1+z^2)^2}{z(1-z^2)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{1+z} + \frac{A_3}{(1+z)^2} + \frac{A_4}{1-z} + \frac{A_5}{(1-z)^2}$$

Identificamos coeficientes y resolvemos el sistema

$$A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ A_3 = -1,\ A_4 = 0\ y\ A_5 = 1$$

Resultando

$$I = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1-z)^2}\right) dz = 2 \cdot ln\ |z| + \frac{2}{1+z} + \frac{2}{1-z} + C$$

siendo

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+4} + 2}}$$

8.14. Calcular $\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}}$.

Resolución. Mediante el cambio $x^2 + x + 1 = (t - x)^2$ tenemos que

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \Rightarrow dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2}\ dt$$

$$I = \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2 - 1}{2t + 1} + 1\right)\left(t - \dfrac{t^2 - 1}{2t + 1}\right)} \cdot \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2}\ dt =$$

$$= \int \frac{2\ dt}{t(t + 2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 2}\right) dt = ln\ |t| - ln\ |t + 2| + C =$$

$$= ln\left|\frac{t}{t + 2}\right| + C = ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 2 + \sqrt{x^2 + x + 1}}\right| + C$$

8.15. Calcular $\int \cos^{-4} x\ dx$.

Resolución. $n - 2 = -4 \Rightarrow n = -2$.

Utilizamos la fórmula recurrente

$$n \cdot I_n = cos^{n-1}x \cdot sen\ x + (n - 1) \cdot I_{n-2}$$

resultando

$$-2 \cdot I_{-2} = cos^{-3}x \cdot sen\ x - 3 \cdot I_{-4} \Rightarrow$$

$$I_{-4} = \frac{2}{3}\ I_{-2} + \frac{1}{3}\ \frac{sen\ x}{cos^3 x} = \frac{2\ tg\ x}{3} + \frac{sen\ x}{3\ cos^3 x} + C$$

ya que

$$I_{-2} = \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C$$

8.16. Calcular $\int \text{sen}^{-4} x\ dx$.

Resolución. $n - 2 = -4 \Rightarrow n = -2$.

Utilizamos la fórmula recurrente

$$n \cdot I_n = cos^{n-1}x \cdot sen\ x + (n - 1) \cdot I_{n-2}$$

resultando

$$-2 \cdot I_{-2} = -sen^{-3}x \cdot sen\ x - 3 \cdot I_{-4} \Rightarrow$$

$$I_{-4} = \frac{2}{3}\ I_{-2} - \frac{1}{3}\ sen^{-3}x \cdot cos\ x \Rightarrow$$

$$\int sen^{-4}x\ dx = \frac{2}{3}\int sen^{-2}x\ dx - \frac{1}{3}\ sen^{-2}x \cdot cos\ x = -\frac{2}{3}\ ctg\ x - \frac{1}{3}\ se`n^{-3}x \cdot cos\ x + C$$

ya que

$$I_{-2} = \int \frac{dx}{sen^2 x} = -ctg\ x + C$$

8.17. Calcular $\displaystyle\int \mathbf{x^8\ \sqrt[3]{1+x^3}\ dx}$**.**

Resolución. Es una integral binomia (sección 8.10). Hacemos el cambio $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\ dx = dt$ y resulta

$$I = \frac{1}{3}\int t^2(1+t)^{\frac{1}{3}}\ dt$$

Y haciendo $1 + t = z^3 \Rightarrow dt = 3z^2\ dz$:

$$I = \frac{1}{3}\int (z^3-1)^2 \cdot z \cdot 3z^2\ dz = \int (z^9 - 2z^6 + z^3)\ dz =$$

$$= \frac{z^{10}}{10} - \frac{2z^7}{7} + \frac{z^4}{4} + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^{10}}}{10} - \frac{2\sqrt[3]{(1+x^3)^7}}{7} + \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}{4} + C$$

Ejercicios propuestos

Calcular las integrales:

8.18. $\displaystyle\int \mathbf{tg\ x\ dx}$

8.19. $\displaystyle\int \mathbf{\frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+5}}}$

8.20. $\displaystyle\int \mathbf{\frac{cos\ x}{1+sen^2 x}\ dx}$

8.21. $\displaystyle\int \mathbf{sen^2 x\ dx}$

8.22. $\displaystyle\int \mathbf{sen^2 x\ cos\ x\ dx}$

8.23. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{arcsen\ x\ dx}}{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}}$

8.24. $\displaystyle\int \mathbf{x\ cos\ x^2\ dx}$

8.25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathbf{2+x}}}{\sqrt{\mathbf{2-x}}}\ \mathbf{dx}$

8.26. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2+x+1}}$

8.27. $\displaystyle\int \mathbf{x\ sen\ x\ dx}$

8.28. $\displaystyle\int \mathbf{ln\ x\ dx}$

8.29. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{ln\ x}}{\sqrt{\mathbf{x}}}\ \mathbf{dx}$

8.30. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x\ dx}}{\mathbf{sen^2 x}}$

8.31. $\displaystyle\int \mathbf{sen(ln\ x)\ dx}$

8.32. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{3x-2}}{\mathbf{x^2-4x+5}}\ \mathbf{dx}$

8.33. $\displaystyle\int \mathbf{e^{arcsen\ x} dx}$

8.34. $\displaystyle\int \mathbf{arcsen\ x\ dx}$

8.35. $\displaystyle\int \mathbf{x\ \sqrt{1+x}\ dx}$

8.36. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{x^3+3x^2-x-3}}\ \mathbf{dx}$

8.37. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^3-3x^2+2x}}$

8.38. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2+1)^2}\, dx$

8.39. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

8.40. $\displaystyle\int \frac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x}\, dx$

8.41. $\displaystyle\int \text{tg}^3 x\, dx$

8.42. $\displaystyle\int x^{-2}\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx$

8.43. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\, dx$

8.44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}\, dx$

8.45. $\displaystyle\int (1+\text{tg } x)^3\, dx$

8.46. $\displaystyle\int \frac{(1+\text{sen } x)^3}{\cos x}\, dx$

8.47. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}\, dx$

8.48. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\text{arc sen } x}{1-x^2}}\, dx$

8.49. $\displaystyle\int \ln\,(1-\sqrt{x})\, dx$

8.50. $\displaystyle\int x^3 \cdot \text{arc tg } \frac{x}{2}\, dx$

8.51. $\displaystyle\int \text{arc sen } \frac{1}{x}\, dx$

8.52. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

Capítulo 9

La integral definida

El problema de hallar el área bajo una función $f(x)$ y el problema de calcular la tangente a la función en uno de sus puntos, son los que han dado origen al Cálculo Infinitesimal. En este capítulo abordamos el primero de ellos. Consideramos la integral definida como un área, pero dicha integral puede evaluar otras magnitudes dependiendo de la función $f(x)$ del integrando, tales como volúmenes, longitudes, trabajo, momentos, etc.

9.1 El área bajo una función f(x)

Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, tal que $f(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$. Consideramos una *partición*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

de $[a, b]$, con $x_i < x_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n - 1)$, $x_0 = a$ y $x_n = b$.

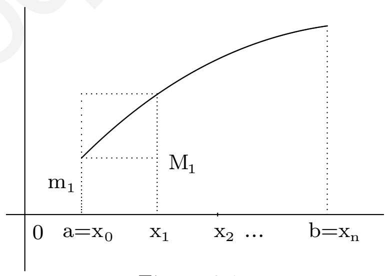

Figura 9.1

Llamamos *norma* de la partición P a la amplitud del mayor de los intervalos de dicha partición, $\delta = máx \ \{|x_i - x_{i-1}|\}$.

Sean m_1 y M_1 el ínfimo y supremo de la función $f(x)$ en $[x_0, x_1]$. En dicho intervalo

$[x_0, x_1]$ las áreas s_1 y S_1 de los rectángulos de alturas m_1 y M_1 son

$$s_1 = m_1(x_1 - x_0); \quad S_1 = M_1(x_1 - x_0)$$

El área A_1, entre la función $f(x)$ y el eje OX en $[x_0, x_1]$, estará acotada entre s_1 y S_1, esto es

$$s_1 \leq A_1 \leq S_1$$

En general, si m_i y M_i representan el menor y mayor valor que toma $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ tenemos que

$$s_i = m_i(x_i - x_{i-1}); \quad S_i = M_i(x_i - x_{i-1})$$

El área A_i, entre la función $f(x)$ y el eje OX en $[x_{i-1}, x_i]$, estará acotada entre s_i y S_i, esto es

$$s_i \leq A_i \leq S_i$$

y sumando todos los intervalos de la partición P tenemos que

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} S_i = S \quad (I)$$

siendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i = A$ el área comprendida entre $f(x)$ y el eje OX entre $x = a$ y $x = b$.

Cuanto más fina sea la partición P (cuanto menor sea la norma δ), más se aproximan s y S al valor de A. Cuando la norma tiende a cero, s y S tienden a A como límite.

Tomamos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y tenemos que

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$$

El área bajo $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$A = \lim_{\delta \to 0} s = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\delta \to 0} S$$

Esto es, el área comprendida entre $f(x)$ y el eje OX, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$, se puede expresar como la suma de infinitos rectángulos de altura igual al valor de $f(x)$ y cuyas bases tienden a cero.

Vamos a ver ahora la relación existente entre la integral de una función $f(x)$ y el área bajo dicha función y que el cálculo del anterior límite se puede reducir al cálculo de la primitiva de $f(x)$.

9.2 El área y la integral

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b] \subset I\!R$. Sea $x \in [a, b]$ y sea $s(x)$ el área bajo $f(x)$, entre a y x. Si x experimenta un pequeño incremento Δx, s sufre un incremento Δs, de modo que dicho incremento queda acotado por la áreas de los rectángulos inferior ABCD y superior ABEF (ver figura 9.2).

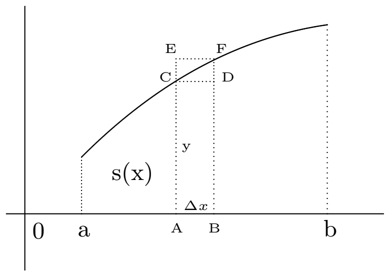

Figura 9.2

$$\text{Área rectángulo } ABCD < \text{Área bajo } f(x) < \text{Área rectángulo } ABEF$$

Esto es

$$\overline{AC} \cdot \Delta x < \Delta s < \overline{BF} \cdot \Delta x$$

Si dividimos por Δx

$$\overline{AC} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \overline{BF}$$

Si $\Delta x \to 0$, $\overline{BF}$ tiende a $\overline{AC}$ como límite (ver figura 9.2), tenemos que

$$\frac{ds}{dx} = \overline{AC} = y \Rightarrow ds = y \cdot dx \Rightarrow s = \int f(x) \cdot dx$$

que se designa por $F(x) + C$. Por tanto

$$s = F(x) + C$$

Hemos relacionado el área bajo $f(x)$ y la integral de $f(x)$. Este resultado es conocido con el nombre de *teorema fundamental del Cálculo*.

Para determinar C, se observa que $s = 0$ cuando $x = a$. Sustituimos

$$0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a).$$

Entonces

$$s = F(x) - F(a)$$

El área total bajo $f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$, será

$$s = F(b) - F(a)$$

El resultado anterior se representa con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

y se conoce con el nombre de *regla de Barrow*. Se lee "integral de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$", donde a es el llamado *límite inferior* y b el *límite superior*.

$\int_a^b f(x)\ dx$ se conoce con el nombre de *integral definida*.

Recordando (I), tenemos que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (II)$$

Hemos considerado la integral $\int_a^b f(x)\ dx$ como el área, pero dicha integral nos permite evaluar otras magnitudes dependiendo de la función $f(x)$ del integrando. Con la integral definida se pueden calcular volúmenes, longitudes, trabajo, momentos, etc.

9.3 Propiedades de la integral definida

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $g(x)$ es también continua en $[a, b]$,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

2. Si $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b k \cdot f(x)\ dx = k \int_a^b f(x)\ dx$$

3. Si $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

4. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

5. $\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

6. Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

9.4 Teorema del valor medio

Teorema 9.1 *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, existe al menos un punto $\alpha \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\ f(\alpha).$$

El teorema anterior afirma que el área comprendida bajo la función $f(x)$, entre a y b, es igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(\alpha)$ (ver figura 9.3).

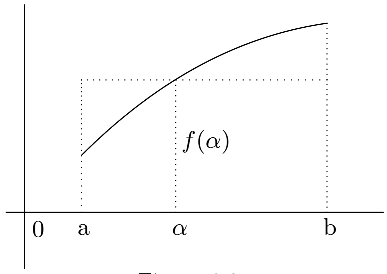

Figura 9.3

9.5 Cambio de variable en una integral definida

Al efectuar un cambio de variable en una integral definida, se suelen hallar los límites de integración correspondientes a la nueva variable, evitando así el trabajo de tener que deshacer la sustitución y recuperar la variable primitiva.

Ejemplo 9.1 *Calcular* $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\ dx$

$$\int_4^9 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_4^9 = \frac{38}{3}.$$

Si hacemos $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$, tenemos que para $x = 4,\ t = 2$, y para $x = 9,\ t = 3$. Por tanto

$$\int_4^9 \sqrt{x}\ dx = \int_2^3 2t^2\ dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_2^3 = \frac{38}{3}.$$

9.6 Volumen de revolución

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Deseamos hallar el *volumen de revolución engendrado* al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por $f(x)$ y OX entre las abscisas $x = a$ y $x = b$.

Realizamos una partición $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$, como hicimos en la sección 9.1. Un rectángulo de base $x_i - x_{i-1}$ y altura

$f(t_i)$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, engendra al girar un disco de radio $f(t_i)$ y altura $x_i - x_{i-1}$. La suma de los volúmenes de todos los discos que origina la partición P, es igual al volumen total buscado

$$V = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \, [f(t_i)]^2 \, (x_i - x_{i-1})$$

que, considerando la función $g(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$ y recordando (II), es igual a

$$V = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x) \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

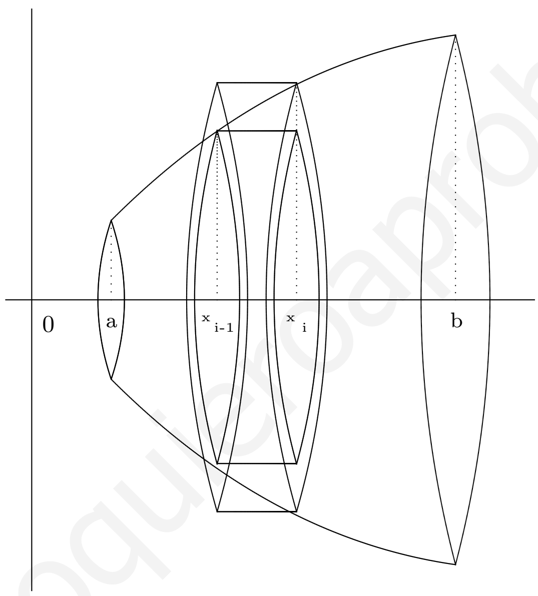

Figura 9.4

9.7 Longitud de un arco

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$. La longitud de la cuerda $\overline{P_{i-1}P_i}$ es

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2 + (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \, (x_i - x_{i-1})$$

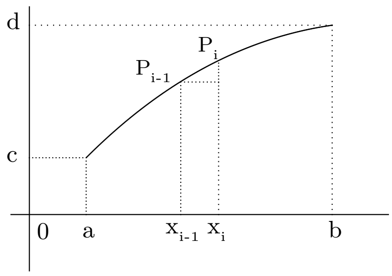

Figura 9.5

Según el teorema del valor medio de Lagrange (sección 6.16), existe un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en el que la pendiente de la recta tangente, $f'(t_i)$, es igual a la pendiente de la cuerda

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

lo que implica que

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ (x_i - x_{i-1})$$

Cuando $\delta \to 0$, la suma de las longitudes de las cuerdas $\overline{P_{i-1}P_i}$ será igual a la longitud L del arco de curva $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Y recordando (II)

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

O también

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

ya que la longitud del arco L es la misma integrando desde $x = a$ hasta $x = b$, respecto al eje OX, que integrando desde $y = c$ hasta $y = d$, respecto al eje OY.

9.8 Área de la superficie de revolución

El área buscada será igual a la suma de las áreas laterales de los troncos de cono que origina la partición anterior P, cuando $\delta \to 0$.

Hemos visto en la sección anterior que

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ (x_i - x_{i-1})$$

Por otra parte, la superficie lateral de un tronco de cono es $\pi(R + r)\ l$, siendo R y r los radios de las bases y l la longitud de la generatriz.

Por tanto, el área lateral de uno de dichos troncos será:

$$S_i = 2\pi\ \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\ \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ (x_i - x_{i-1})$$

Por ser $f(x)$ continua, existirá al menos un punto $t_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(t_i') = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

El área total será

$$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(t'_i)\ \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

o también

$$S = 2\pi \int_c^d y\ \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

ya que

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

9.9 Volumen de un sólido de sección conocida

Al girar alrededor del eje OX, el área plana limitada por la función $f(x)$ y el eje OX, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$, genera un volumen igual a

$$\int_a^b \pi\ [f(x)]^2\ dx$$

Podemos interpretar el integrando $\pi\ [f(x)]^2$ como el área del círculo determinado por la intersección del volumen de revolución con un plano perpendicular al eje OX, a una distancia x del origen de coordenadas. Análogamente, si la sección determinada en un sólido por un plano perpendicular al eje OX, a una distancia x del origen, es igual a $A(x)$, entonces el volumen total será

$$V = \int_a^b A(x)\ dx$$

Ejercicios resueltos

9.1. Calcular el área limitada por la función $\mathbf{f(x) = e^x}$ y el eje OX entre las abscisas $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = ln\ 2}$.

Resolución. El área del rectángulo vertical de ancho dx y altura igual a e^x es $e^x \cdot dx$. La suma de las áreas de los rectángulos, desde $x = 0$ hasta $x = ln\ 2$ es (II) igual a (ver figura 9.6)

$$\int_0^{ln\ 2} e^x\ dx = \Big[e^x\Big]_0^{ln\ 2} = e^{ln\ 2} - e^0 = 2 - 1 = 1\ unidad\ de\ superficie$$

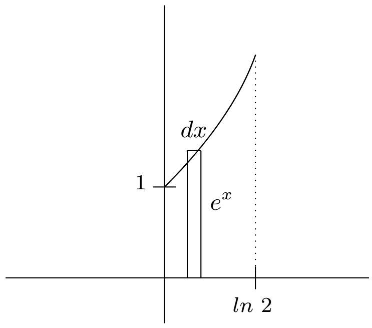

Figura 9.6

9.2. Hallar el área limitada por $\mathbf{y = x^2}$, la recta $\mathbf{y = -x + 2}$ y el eje de abscisas.

Resolución. El área total será igual a la suma de las áreas bajo $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, más el área bajo $y = -x + 2$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ (ver figura 9.7)

$$\int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 (-x+2)\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \frac{5}{6}\ u.\ s.$$

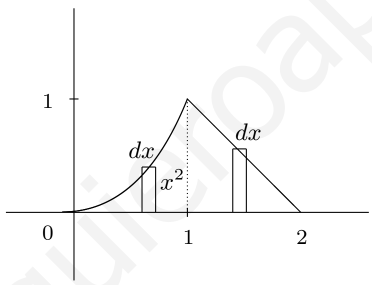

Figura 9.7

9.3. Hallar el área comprendida entre la parábola $\mathbf{x = 8 + 2y - y^2}$ y el eje OY, entre las ordenadas $\mathbf{y = -1}$ e $\mathbf{y = 3}$.

Resolución. Integrando respecto al eje OY:

$$\int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\ dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{92}{3}\ u.s$$

9.4. Hallar el área limitada por las funciones $\mathbf{y = x^2}$ e $\mathbf{y = x}$.

Resolución. La altura del rectángulo vertical, de ancho dx, es igual a la diferencia de las ordenadas de $y = x$ e $y = x^2$. Su área será igual $(x - x^2) \cdot dx$. La suma de las áreas de los rectángulos será (ver figura 9.8)

$$\int_0^1 (x - x^2)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ u.s.$$

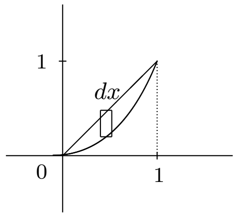

Figura 9.8

9.5. Calcular el área limitada por la función $\mathbf{f(x) = x^2 - 4}$ y el eje OX, entre las abscisas $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$.

Resolución. El valor de la integral $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2 - 4)\ dx$ es cero, debido a que el área toma un valor negativo entre $x = -2$ y $x = 2$, por ser negativos los valores de $f(x)$ en dicho intervalo, y toma un valor positivo entre $x = 2$ y $x = 4$, por tomar $f(x)$ valores positivos en ese intervalo. Para evitar esto, debemos hacer (ver figura 9.9)

$$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\ dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4)\ dx = \frac{64}{3}\ u.s.$$

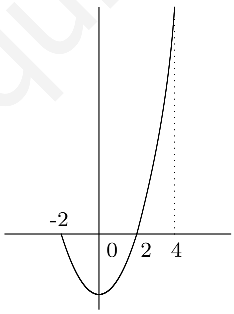

Figura 9.9

9.6. Hallar el área limitada por $\mathbf{y_1 = 6x - x^2}$ e $\mathbf{y_2 = x^2 - 2x}$.

Resolución. Las parábolas $y_1 = 6x - x^2$ e $y_2 = x^2 - 2x$ se cortan en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 4$.

El área del rectángulo de altura $y_1 - y_2 = 6x - x^2 - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$ y base dx es $(8x - 2x^2)\ dx$. La suma de las áreas de los infinitos rectángulos desde $x = 0$ hasta $x = 4$ es igual a (ver figura 9.10)

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\ dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}\ u.s.$$

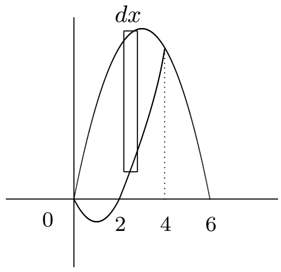

Figura 9.10

9.7. Hallar el área limitada por la parábola $\mathbf{y^2 = 4x}$ y la recta $\mathbf{y = 2x - 4}$. a) Integrando respecto a OY. b) Integrando respecto a OX.

Resolución. a) Los puntos de corte de ambas funciones son $(1, -2)$ y $(4, 4)$. Por otra parte, el rectángulo horizontal de altura dy y longitud igual a la diferencia de las abscisas de la recta y la parábola $\dfrac{y+4}{2} - \dfrac{y^2}{4}$, tiene un área igual a $\left(\dfrac{y+4}{2} - \dfrac{y^2}{4}\right)\ dy$. El área del recinto será

$$\int_{-2}^4 \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\ dy = 9\ u.s.$$

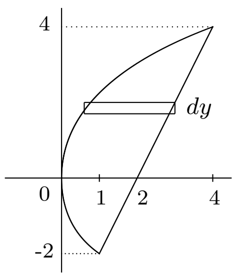

Figura 9.11

b) Para integrar respecto a OX, dividimos el recinto en dos partes

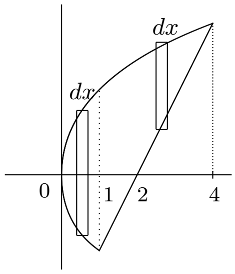

Figura 9.12

Entre $x = 0$ y $x = 1$ la altura del rectángulo es igual al doble de la ordenada $y = \sqrt{4x}$, mientras que entre $x = 1$ y $x = 4$ su altura es igual a la diferencia de abscisas de la parábola y la recta, $\sqrt{4x} - (2x - 4)$. Por tanto

$$\int_0^1 2\sqrt{4x}\ dx + \int_1^4 \left(\sqrt{4x} - (2x-4)\right) dx = 9\ u.s.$$

9.8. Hallar el área de un círculo de radio r.

Resolución. Consideramos el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. El área es

$$4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$$

Hacemos $x = r\ sen\ t \Rightarrow dx = r\ cos\ t\ dt$ y tenemos que

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\ cos^2 t\ dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt = \pi r^2\ u.s.$$

9.9. Hallar el área del menor de los sectores que la recta $\mathbf{x = 2}$ determina en el círculo $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$.

Resolución.

$$2\int_2^5 \sqrt{25 - x^2}\ dx$$

Hacemos $x = 5\ sen\ t$ y tenemos que

$$2\int_{arcsen\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\ sen^2 t}\ 5\ cos\ t\ dt = 50\int_{arcsen\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\ dt =$$

$$= 50\int_{arcsen\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt = 25\Big[t + \frac{sen\ 2t}{2}\Big]_{arcsen\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 25\Big[arcsen\ \frac{x}{5} + \frac{x}{25}\sqrt{25 - x^2}\Big]_2^5 = -25\ arcsen\ \frac{2}{5} + \frac{25\pi}{2} - 2\sqrt{21}\ u.s.$$

9.10. Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $\mathbf{y^2 = 8x}$ y la recta $\mathbf{x = 2}$, alrededor del eje OX.

Resolución. Tomamos un rectángulo de ancho dx y altura $y = \sqrt{8x}$ que engendra un disco de volumen $\pi\ y^2\ dx = \pi\ 8x\ dx$, al girar alrededor del eje OX (ver figura 9.13).

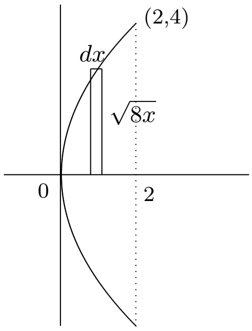

Figura 9.13

El volumen total será igual a la suma de los volúmenes de los discos, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, esto es

$$V = \pi \int_0^2 8x\ dx = 16\pi \textit{ unidades de volumen}$$

Otra forma de hacerlo sería tomando rectángulos horizontales, como se aprecia en la figura 9.14:

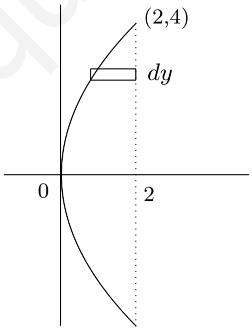

Figura 9.14

Al girar el rectángulo de la figura alrededor del eje OX engendra un anillo de radio $y = \sqrt{8x}$, altura $2 - x = 2 - \dfrac{y^2}{8}$ y grosor dy. Cortamos longitudinalmente el anillo y lo transformamos en una lámina de longitud $2\pi y$, altura igual a $2 - x = 2 - y^2/8$ y grosor y (ver figura 9.15).

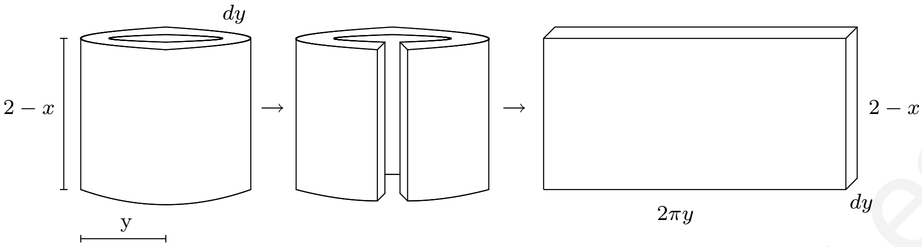

Figura 9.15

El volumen del anillo será igual al volumen de la lámina de la figura 9.15:

$$2\pi y\ (2 - x)\ dy = 2\pi y \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)\ dy$$

El volumen total será igual a la suma de los volúmenes de los anillos desde $y = 0$ hasta $y = 4$, esto es

$$V = 2\pi \int_0^4 y \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)\ dy = 16\pi\ u.v.$$

9.11. Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $\mathbf{y^2 = 8x}$ y la recta $\mathbf{x = 2}$ alrededor de dicha recta.

Resolución. Tomamos un rectángulo de ancho dy y longitud igual a $2-x$. Al girar alrededor de la recta $x = 2$ engendra un disco de volumen $\pi(2-x)^2\ dy = \pi\left(2-\frac{y^2}{8}\right)^2 dy$ (ver figura 9.16).

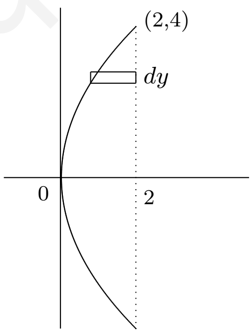

Figura 9.16

El volumen total V será igual a la suma de los volúmenes de los infinitos discos, desde $y = -4$ hasta $y = 4$, esto es

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256\pi}{15}\ u.v.$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando anillos. Tomamos un rectángulo vertical de ancho dx y altura $y = \sqrt{8x}$. Al hacerlo girar alrededor de la recta $x = 2$ engendra un anillo de radio $2 - x$, altura $y = \sqrt{8x}$ y ancho de la pared igual a dx (ver figura 9.18).

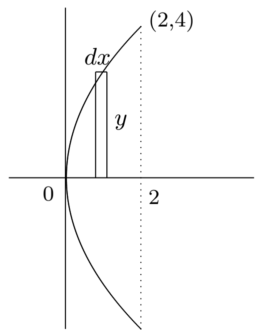

Figura 9.17

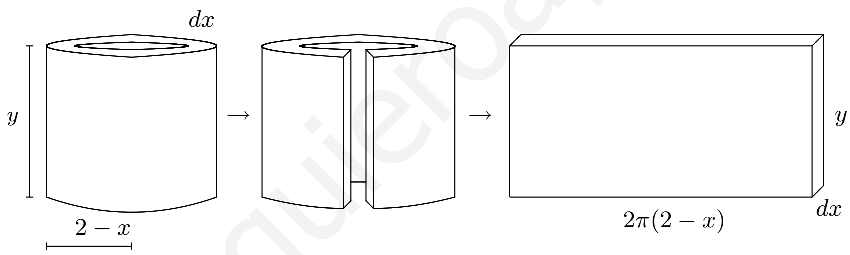

Figura 9.18

El volumen del anillo será igual al volumen de la lámina de la figura:

$$2\pi\ (2 - x)\ y\ dx = 2\pi\ (2 - x)\ \sqrt{8x}\ dx$$

El volumen total V será igual al doble de la suma de los volúmenes de los anillos. Esto es

$$V = 4\pi \int_0^2 (2 - x)\ \sqrt{8x}\ dx = \frac{256\pi}{15}\ u.v.$$

9.12. Hallar el volumen engendrado al girar el círculo $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ alrededor de la recta $\mathbf{x = 3}$.

Resolución. Tomamos un rectángulo horizontal de ancho dy. Al hacerlo girar alrededor de la recta $x = 3$ engendra un disco con radios exterior e interior iguales a $3 + x$ y $3 - x$, respectivamente. El volumen de este disco será

$$\pi(3+x)^2 dy - \pi(3-x)^2 dy = \pi\left(3+\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy - \pi\left(3-\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy =$$
$$= 12\pi\sqrt{4-y^2}\ dy$$

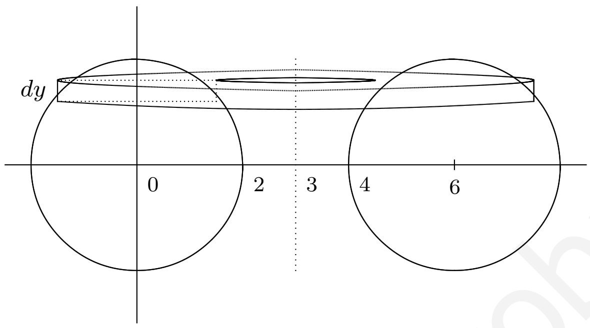

Figura 9.19

El volumen total es

$$V = 2\int_0^2 12\pi\sqrt{4-y^2}\ dy = 24\pi^2\ u.v.$$

La integral anterior podemos resolverla mediante el cambio $y = 2\ sen\ t$.

Si deseamos calcular el volumen anterior utilizando anillos, tomamos un rectángulo vertical de ancho dx y altura $2y = 2\sqrt{4-x^2}$, que al girar alrededor de la recta $x = 3$ engendra un anillo de radio $3 - x$, altura $2y$ y grosor dx. Esto es

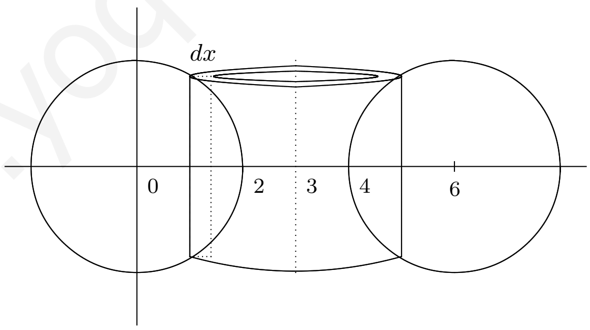

Figura 9.20

Si procedemos del mismo modo que en problemas anteriores, el volumen del anillo es

$$2\pi(3-x)\ 2y\ dx = 2\pi(3-x)\ 2\sqrt{4-x^2}\ dx$$

El volumen total:

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)\ 2\sqrt{4-x^2}\ dx = 4\pi \int_{-2}^{2} 3\sqrt{4-x^2}\ dx - 4\pi \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\ dx$$

La primera integral podemos resolverla con el cambio de variable $x = 2.sen\ t$, mientras que la segunda podemos hacerla con $4 - x^2 = t$, resultando

$$V = 24\pi^2\ u.v.$$

Nota. En este caso no sería lícito escribir el doble de la integral desde cero hasta 2, ya que los volúmenes desde -2 hasta 0 y desde 0 hasta 2 no son iguales.

9.13. Hallar el área de la superficie de revolución generada al girar la función $\mathbf{x^3 = 3y}$ entre las abscisas $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = 1}$.

Resolución.

$$y = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^4.$$

Por tanto, la superficie A es

$$A = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\ \sqrt{1+x^4}\ dx$$

Hacemos el cambio $1 + x^4 = t$ y resulta $A = \dfrac{\pi}{9}\ (\sqrt{8} - 1)\ u.s.$

9.14. Hallar la longitud de la curva $\mathbf{y = x^{\frac{3}{2}}}$ entre $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = 1}$.

Resolución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

La longitud L es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\ dx = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}\ u.l.$$

resuelta mediante el cambio $1 + \dfrac{9x}{4} = t^2$.

9.15. Hallar la longitud de la curva $\mathbf{y = ln\ x}$ desde $\mathbf{y = 0}$ hasta $\mathbf{y = ln\ (2\sqrt{2})}$.

Resolución. $y = ln\ x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx/dy = e^y$. La longitud L es igual a

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy = \int_0^{ln(2\sqrt{2})} \sqrt{1 + e^{2y}}\ dy$$

con el cambio $1 + e^{2y} = t^2$, resulta $L = 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)\ ln\ 2 - \sqrt{2} - ln\ (\sqrt{2} - 1)\ u.l.$.

9.16. Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio sabiendo que toda sección determinada en él por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo rectángulo isósceles con la hipotenusa en el plano de la base.

Resolución. Consideramos el círculo $x^2 + y^2 = 4^2$ (ver figura 9.21).

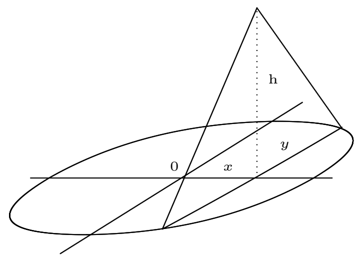

Figura 9.21

El área del triángulo sección, a una distancia x del origen de coordenadas, será

$$S = \frac{2y \cdot y}{2} = y^2 = 16 - x^2$$

ya que su altura h es igual a y.

El volumen pedido es

$$V = \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx = 2\int_{0}^{4} (16 - x^2)\, dx = \frac{256}{3}\ u.v.$$

9.17. Resolver el problema anterior si la sección es un cuadrado.

Resolución. El área de la sección determinada por un plano perpendicular al eje de abscisas, a una distancia x del origen, es

$$S = (2y)^2 = 4y^2 = 4 \cdot (16 - x^2)$$

El volumen total V del sólido es

$$V = \int_{-4}^{4} 4 \cdot (16 - x^2)\, dx = 8\int_{0}^{4} (16 - x^2)\, dx = \frac{1024}{3}\ u.v$$

9.18. Idem si la sección es un semicírculo.

Resolución. El área del semicírculo sección es

$$S = \frac{\pi . y^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)$$

El volumen V del sólido es

$$V = \int_{-4}^{4} \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)\ dx = 2\int_{0}^{4} \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)\ dx = \frac{128\pi}{3}\ u.v.$$

Nota. En este caso el sólido es una semiesfera de radio 4.

Ejercicios propuestos

9.19. Hallar el área comprendida entre las parábolas $\mathbf{y = 6x - x^2}$ e $\mathbf{y = x^2 - 2x}$.

9.20. Hallar el área comprendida entre la parábola $\mathbf{y^2 = 4x}$ y la recta $\mathbf{y = 2x - 4}$. a) Integrando respecto a OX. b) Integrando respecto a OY.

9.21. Hallar el área de la elipse de semiejes a y b.

9.22. Hallar el área de cada uno de los recintos en que la parábola $\mathbf{x^2 = 2y}$ divide a la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 = 8}$.

9.23. Hallar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices $\mathbf{A(2,0)}$, $\mathbf{B(6,1)}$ y $\mathbf{C(4,2)}$.

9.24. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por la función $\mathbf{f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}}$ y las rectas $\mathbf{x = \pm 3}$.

9.25. Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $\mathbf{y = 4x - x^2}$ y el eje de abscisas, respecto a la recta $\mathbf{y = 6}$.

9.26. Hallar el volumen generado al rotar alrededor de la recta $\mathbf{x = 2}$ el recinto limitado por dicha recta y la parábola $\mathbf{y^2 = 8x}$.

9.27. Hallar el volumen engendrado al rotar el recinto del ejercicio anterior alrededor del eje OY. a) Mediante discos. b) Mediante anillos.

9.28. Hallar, mediante anillos, el volumen generado en la rotación del recinto limitado por $\mathbf{y = -x^2 - 3x + 6}$ y la recta $\mathbf{y = 3 - x}$ alrededor de la recta $\mathbf{x = 3}$.

9.29. Calcular el volumen de una esfera de radio r. a) Mediante discos. b) Mediante anillos.

9.30. Representar gráficamente $\mathbf{y = e^{-x^2}}$ y hallar el volumen generado, al girar alrededor del eje OY, el recinto limitado por dicha función, el eje OX y las rectas $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = 1}$.

9.31. Hallar el volumen generado en la rotación de un arco de $\mathbf{y = sen\ 2x}$ alrededor del eje de abscisas.

9.32. Hallar el volumen de un cono de radio r y altura h. a) Mediante discos. b) Mediante anillos.

9.33. Hallar la longitud de la circunferencia de radio r.

9.34. Hallar el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y por $\mathbf{y = \ln\ (sen\ x)}$ e $\mathbf{y = \ln\ (cos\ x)}$.

9.35. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el círculo de ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 - 16x = 0}$, sabiendo que toda sección determinada en él por un plano perpendicular al eje OX es un rectángulo de altura igual al doble de la distancia del origen de coordenadas al plano de la sección.

Soluciones

Capítulo 1

1.21. $x = -\dfrac{260}{110}$

1.25. Racionales: b, c, g y j.

1.35. a) $(-\infty, 1)$, b) $(-4/5, \infty)$, c) $(-\infty, -17/4)$, d) $(-\infty, 9/7]$, e) $\mathbb{R} - [-2, 5/2]$, f) $\mathbb{R}$, g) $\{3\}$, h) $[1, 4/3]$, i) $\emptyset$.

1.36. a) $(-\infty, 7/4]$, b) $(-3, -2)$, c) $(-\infty, -2/3)$, d) $\emptyset$.

1.37. a) $(-\infty, 1)$, b) $(-\infty, -1/3)$, c) $(-5, -1)$, d) $[-1, 1) \cup [2, \infty)$, e) $(-3, -1) \cup (1, 2)$, f) $[-1, 1]$, g) $[2, \infty)$, h) $(-\infty, -2] \cup (1/5, 1/3)$, j) $(-\infty, -7) \cup [3, \infty) \cup \{2\}$

1.39. a) $\mathbb{R} - (-8, 12)$, b) $(-\infty, -1/2)$, c) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, d) $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup ((-1, 1) \cup (\sqrt{7}, \infty)$, e) $[0, \infty)$, f) $(0, 2/3)$, g) $(-1, 2)$, h) $(2, 3] \cup [7, 8)$

1.40. a) cierta, b) falsa, c) falsa, d) cierta

1.41. a) $\emptyset$, b) $\mathbb{N}$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{N}$, e) $F_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $F_e(\mathbb{N}) = \emptyset$

1.42. a) $\emptyset$, b) $\emptyset$, c) $\mathbb{R}$, d) $F_i(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$, $F_e(\mathbb{I}) = \mathbb{Q}$

1.43. a) $\mathbb{R}$, b) $\emptyset$, c) $\mathbb{R}$, d) $\mathbb{R}$, e) $F_i(\mathbb{R}) = \emptyset$, $F_e(\mathbb{R}) = \emptyset$

1.44. sup A=máx A=2, ínf A=1. Carece de mínimo.

1.45. sup B=1, ínf B=0. Carece de máximo y mínimo.

1.46. sup C=1, mín C=2/3. Carece de máximo.

1.47. máx D=1, ínf D=0. Carece de mínimo.

1.48. ínf E=2, sup E3. Carece de máximo y de mínimo.

1.49. ínf F=0. Carece de mínimo y supremo. No está acotado superiormente.

1.50. máx G=8/15, ínf G=0.

1.51. ínf H=a, sup H=d.

1.52. a) $A \cup B = [1, 4]$. Interior de $A \cup B = (1, 4)$. Adherencia de $A \cup B = [1, 4]$. $F_i(A \cup B) = \{1, 4\}$. $F_e(A \cup B) = \{4\}$. Mín $A \cup B = 1$, máx $A \cup B = 4$.
b) $A \cap B = (2, 3)$. Interior de $A \cap B = (2, 3)$. Adherencia de $A \cap B = [2, 3]$. $F_i(A \cap B) = \emptyset$. $F_e(A \cap B) = \{2, 3\}$. Ínf $A \cap B = 2$, sup $A \cap B = 3$.

1.53. Int A=$(2, 3)$. Adherencia A=$A \cup \{1\}$. Derivado A=$[2, 3] \cup \{1\}$. Aislados A=$\left\{\frac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. $F_i(A) = \left\{\frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$. $F_e(A) = \{1\}$.

1.54. 13.26, 4.48, 65.18, 24.95

Capítulo 2

2.23. $\sqrt{8} \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$.

2.24. $2 \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$.

2.25. $e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$

2.28. $\sqrt[6]{2}_{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

2.29. $1_{\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}}$, con $k = 0, 1, 2, 3$.

2.30. $2_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

2.31. $x^2 - 4x + 5 = 0$.

2.32. $\dfrac{1}{17} - \dfrac{4}{17} \cdot i$.

2.33. $-2 + 2i$. Raíces: $\sqrt{2}_{\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

2.34. $-i$ y $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot i$, i y $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot i$.

2.35. $-1/2 \pm \sqrt{3}/2 \cdot i$.

2.37. $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

2.38. $a = 0,\ b \in \mathbb{R}$ y viceversa.

2.39. $a = 0,\ b = 0$.

2.41. $\alpha = \dfrac{2k\pi}{1275}$.

2.50. $1.54 + 1.32\ i$.

2.51. $1.75\ i$.

Capítulo 3

3.27. *a*) $\dfrac{n^2+5}{n}$. *b*) $a_{72} = \dfrac{5189}{72}$ c) 10 d) diverge.

3.30. 3.

3.32. 0.

3.33. 2.

3.34. 0.

3.38. 2 (Stolz).

3.39. $\dfrac{1}{a+1}$ (Stolz).

3.40. 0 (Stolz).

3.41. $ln\ a$ (haciendo $\sqrt[n]{a} - 1 = t$).

3.42. $\dfrac{a-1}{ln\ a}$.

3.43. $\sqrt{ab}$.

3.44. 3.

Capítulo 4

4.42. Div. (criterio general)

4.43. Div. (crit.gen.)

4.44. Div. (comparación serie armónica)

4.45. Conv.(Raabe)

4.46. Div. (D'Alambert)

4.47. Div. (D'Alembert)

4.48. Conv. (Pringsheim)

4.49. Div.

4.50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Convergente (Raabe). Suma=$\frac{1}{2}$.

4.51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Convergente (Raabe). Suma=$\frac{1}{4}$.

4.52. $\frac{3}{2}$ (serie geométrica).

4.53. 12.

4.54. -0.095.

Capítulo 5

5.33. $\mathbb{R}$.

5.34. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

5.35. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

5.36. $[-1, 1]$.

5.37. $(-2, 0]$.

5.38. $(-2, 2)$.

5.39. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

5.40. $[1, 100]$.

5.41. $(0, \infty) - \{k, k \in \mathbb{N}\}$.

5.42. $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

5.43. $\mathbb{R}$.

5.44. $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

5.45. $[-1, 1]$.

5.46. $\emptyset$.

5.47. $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

5.48. $f(x+1) = 12x^2 + 20x + 13$

5.49. a) $f^{-1}(x) = \sqrt{cos\ \dfrac{x}{3}}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}\ arcsen\ \dfrac{x}{4}$.

5.52. $y = 2(3z+2)^2$

5.53. $y = \sqrt{4z-2}$.

5.54. a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2-5}{x^2-4}$ b) $(g \circ f)(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - 5$.

5.55. $A = tg\ x \cdot \dfrac{a^2-b^2}{4}$.

5.56. $e^{\frac{1}{6}}$.

5.57. $n = 2 \cdot ln\ 6$.

5.58. Es continua $\forall a,\ a \in \mathbb{Z}$.

5.59. Discontinua en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ de una unidad de salto.

5.60. Discontinuidad esencial en $x = 0$.

5.61. Discontinua en $x = 3$, de dos unidades de salto.

5.62. Discontinuidad esencial en $x = 1$.

5.63. Discontinua en $x = 1$ de salto -1.

5.64. Discontinuidad evitable en $x = 0$.

5.65. $f(x) = \begin{cases} 1\ si\ x \in \mathbb{Q} \\ -1\ si\ x \in \mathbb{I} \end{cases}$

5.66. $n = 0$.

5.67. Continua en $x = \pm 1$. Discontinua en el resto.

5.69. -2.0625

Capítulo 6

6.41. a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$. b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

6.42. a) $y' = 2x.cos\ x^2$ b) $y' = 2.sen\ x.cos\ x$ c) $y' = 2x.2.sen\ x^2.cos\ x^2$.

6.43. $y' = (sen\ x)^{tg\ x}.\ \dfrac{ln\ (sen\ x) + cos^2 x}{cos^2 x}$.

6.44. $y' = \dfrac{ln\ y - \dfrac{y}{x}}{ln\ x - \dfrac{x}{y}}$.

6.45. $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}$.

6.46. $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left[\dfrac{-1}{(x-2)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-3)^{n+1}}\right]$.

6.47. $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left[\dfrac{5}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{3}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

6.48. $y^{(n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.4^n.cos\ 4x\ si\ n\ impar \\ (-1)^{\frac{n}{2}}.4^n.sen\ 4x\ si\ n\ par \end{cases}$

6.49. $y' = \dfrac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$.

6.50. $y' = \dfrac{arcsen\ y - y^2}{2xy - \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}}$.

6.51. $y' = \dfrac{xy \cdot cos\ x \cdot ln(xy) + y \cdot sen\ x - xy \cdot ln\ y}{x^2 - x \cdot sen\ x}$.

6.55. $a = 3,\ b = 2$.

6.56. $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{2(x^2+x+1) \cdot cos^2 x}{e^{tg\ x} \cdot (2x+1)^2}$.

6.57. $1 \left(\text{Sugerencia: Hacer } \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt} \right)$.

6.59. $83^o 39' 35''$

6.61. $n > 57.3$

6.62. e^{-1}.

6.63. $x = 0,\ x = \pm 1$.

6.64. $\dfrac{1}{2}$ y 8.

6.65. $y = (4 \pm 2\sqrt{5})x$.

6.68. -0.87 cm/s.

6.69. a) -0.00032 cm/s. b) -0.4 cm^2/s.

6.70. a) $\dfrac{-60}{\sqrt{7}}$ m/min. b) $2\sqrt{2}$ m. c) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ m.

6.71. 2.4 unidades por segundo.

6.72. $x = \dfrac{1}{3}$.

6.73. $-\frac{2}{3}$ unidades por segundo.

6.74. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

6.75. $a = 4,\ b = -2$.

6.76. Continua y no derivable en $x = 0$.

6.77. Continua y no derivable.

6.78. $3.1\overline{6}$

6.79. $12\pi\ dm^3$.

6.80. $\alpha = 2$.

6.82. 2.

6.83. 6.

6.84. -1.

6.85. $\frac{1}{2}$.

6.86. $-\frac{1}{4}$.

6.87. 1.

6.88. 1.

6.89. 1.

6.90. 0.

6.91. 0.

6.92. $\frac{3}{4}$.

6.93. e^{-2}.

6.94. e^2.

6.95. $e^{\frac{1}{2}}$.

6.96. ∞.

6.97. $\frac{1}{3}$.

6.98. e.

6.107. $a > \frac{1}{2}$.

6.108. Convexa.

6.109. $\left(\pm\sqrt{\frac{23}{8}}, \frac{23}{4}\right)$.

6.110. $y - 2 = -\frac{2}{3}.(x-3)$.

6.111. $3\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$ cm.

6.112. $r = 2\ m.,\ b = \frac{7}{3}\ m.$.

6.113. $r = 5\sqrt{2}\ cm.,\ h = 10\sqrt{2}\ cm.$

6.114. $a = 10\ cm.,\ b = 10\ cm.$

6.115. $\left(\frac{2c}{15}, \frac{4c}{15}\right)$.

6.116. $\left(\frac{8}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

6.117. $9 + \frac{9\pi}{2}\ cm^2$.

6.118. Máximo en $x = -\sqrt{mn}$. Mínimo en $x = \sqrt{mn}$.

6.119. $r = \sqrt{\frac{200}{3}}\ cm.,\ \sqrt{\frac{400}{3}}\ cm.$.

6.120. El triángulo equilátero.

6.121. $6307.5\ cm^2$.

6.122. $2.arcsen\ \frac{1}{3}$.

6.123. A un punto situado a 12 km. del pie de la perpendicular trazada desde el barco a la costa.

6.124. $\frac{8}{\pi+4}$ m. de base y $\frac{4}{\pi+4}$ m. de altura.

6.125. 6000 artículos.

Capítulo 7

7.15. $P(x) = 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$.

7.16. $1 + \frac{x \cdot ln\ a}{1!} + \frac{(x \cdot ln\ a)^2}{2!} + \frac{(x \cdot ln\ a)^3}{3!} + ... + \frac{(x \cdot ln\ a)^n}{n!} + ...$

7.17. $x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + ... + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 .... 2n \cdot (2n+1)} + ...$

7.18. $\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + ... + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... 2n \cdot (2n+1)} + ...\right]$

7.19. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1) \cdot x^{2n+1}} + ...$

7.25. $f(x) = 3 + 7x + 8x^2 + 6x^3 + \frac{32e^{\theta x} + 16(\theta x + 3)e^{2\theta x}}{4!}\ x^4$

7.26. $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{(x-1)^3}{16} + ...$

7.27. $\dfrac{5 \cdot 10^{-13}}{2}$

7.28. $a = 6$

7.30. -1

7.31. 1

7.32. 0.468...

Capítulo 8

8.18. $-ln\ |cos\ x| + C$

8.19. $\sqrt{x^2+5} + C$

8.20. $arctg\ (sen\ x) + C$

8.21. $\dfrac{2x - sen\ 2x}{4} + C$

8.22. $\dfrac{sen^3 x}{3} + C$

8.23. $\dfrac{arcsen^2 x}{2} + C$

8.24. $\dfrac{sen\ x^2}{2} + C$

8.25. $2.arcsen\ \dfrac{x}{2} - 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{4}\right)^2} + C$

8.26. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ arctg\ \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

8.27. $sen\ x - x\ cos\ x + C$

8.28. $x\ ln\ |x| - x + C$

8.29. $2 \cdot \sqrt{x}\ ln\ |x| - 4 \cdot \sqrt{x} + C$

8.30. $ln\ |sen\ x| - ctg\ x + C$

8.31. $\dfrac{x}{2}\ [sen\ (ln\ |x|) - cos\ (ln\ |x|)] + C$

8.32. $\dfrac{3}{2}\ ln\ |x^2 - 4x + 5| + 4 \cdot arctg\ (x-2) + C$

8.33. $\dfrac{(x + \sqrt{1-x^2}) \cdot e^{arcsen\ x}}{2} + C$

8.34. $x \cdot tg\ x + ln\ |cos\ x| + C$

8.35. $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} + C$

8.36. $\frac{1}{8}\ ln\ |x-1| - \frac{1}{4}\ ln\ |x+1| + \frac{9}{8}\ ln\ |x+3| + C$

8.37. $\frac{1}{2}\ ln\ |x| - ln\ |x-1| + \frac{1}{2}\ ln\ |x-2| + C$

8.38. $\frac{x-3}{2(x^2+1)} + ln\ (x^2+1) - \frac{1}{2}\ arctg\ x + C$

8.39. $\frac{1}{2}\ arctg\ x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

8.40. $ln\ |1+tg\ x| - \frac{1}{2}\ ln\ (1+tg^2 x) + C$

8.41. $ln\ (cos\ x) + \frac{1}{2 \cdot cos^2 x} + C$

8.42. $-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}} + C$

8.43. $x - ln(x+2)^2 + C$

8.44. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3-1} - arctg\ \sqrt{x^3-1}\right) + C$

8.45. $x + ln\left|1 - tg^2\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) + C$

8.46. $4\ ln(sec\ x + tg\ x) - 4\ ln(cos\ x) - 3\ sen\ x - \frac{1}{2}\ sen^2 x + C$

8.47. $arcsen(2x^2) + C$

8.48. $\frac{2}{3}\sqrt{(arcsen\ x)^3} + C$

8.49. $(x-1)\ ln|1-\sqrt{x}| - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + C$

8.50. $\left(\frac{x^4}{4} - 1\right) arctg\ \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + C$

8.51. $x\ arcsen\ x + ln\ \left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + C$

8.52. $\frac{-x}{3\sqrt{x^2-3}} + C$

Capítulo 9

9.19. $\frac{64}{3}\ u.s.$

9.20. $9\ u.s.$

9.21. $\pi ab\ u.s.$

9.22. $2\displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\,dx = 2\pi+\frac{4}{3}\ u.s.,\ 6\pi-\frac{4}{3}\ u.s.$

9.24. $2\pi\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi\cdot arctg\ 3\ u.v.$

9.25. $\pi\displaystyle\int_0^4 [6^2-(6-4x+x^2)]\ dx = \frac{1408\pi}{15}\ u.v.$

9.26. $2\pi\displaystyle\int_0^4 \left(2-\frac{y^2}{8}\right)\,dy = \frac{256\pi}{15}\ u.v.$

9.27. a) $2\pi\displaystyle\int_0^4 \left(4-\frac{y^4}{64}\right)\,dy = \frac{128\pi}{5}\ u.v.$, b) $4\pi\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{8x}\ dx = \frac{128\pi}{5}\ u.v.$

9.28. $2\pi\displaystyle\int_{-3}^1 (x^3-x^2-9x+9)\ dx = \frac{256\pi}{3}\ u.v.$

9.29. Considerando el círculo $x^2+y^2=r^2$: a) $2\pi\displaystyle\int_0^r (r^2-x^2)\ dx = \frac{4}{3}\pi r^3\ u.v.$, b) $4\pi\displaystyle\int_0^r y.\sqrt{r^2-y^2}\ dy = \frac{4}{3}\pi r^3\ u.v.$

9.30. Mediante anillos, $2\pi\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^{-x^2}\ dx = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\ u.v$, mediante discos, $\dfrac{\pi}{e}+\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 \pi\cdot(-ln\ y)\ dy = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\ u.v.$

9.31. $\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 2x\ dx = \frac{\pi^2}{4}\ u.v.$

9.32. Se considera la recta $y=\dfrac{rx}{h}$, que pasa por $(0,0)$ y (h,r): a) $\pi\displaystyle\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\ dx = \frac{\pi r^2 h}{3}\ u.v.$, b) $2\pi\displaystyle\int_0^r \left(hy-\frac{hy^2}{r}\right)\,dy = \frac{\pi r^2 h}{3}\ u.v.$

9.33. Considerando la circunferencia $x^2+y^2=r^2$: $L=4\displaystyle\int_0^r \frac{r\cdot dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\pi r\ u.l.$

9.34. $\dfrac{\pi}{2}+2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosec\ x\ dx = \frac{\pi}{2}+2\cdot ln\left(tg\ \frac{\pi}{8}\right)\ u.l.$

9.35. $\displaystyle\int_0^{16} 4x\sqrt{64-(x-8)^2}\ dx = 1024\pi\ u.v.$

Bibliografía

[1] T.M. APOSTOL, Calculus, Reverté, Barcelona, 1972.

[2] F. AYRES, Cálculo diferencial e integral, McGraw-Hill, México, 1970.

[3] G.N. BERMAN, Problemas y ejercicios de Análisis Matemático, Mir, Moscú, 1983.

[4] R. BRONTE, Cálculo infinitesimal e integral, Litoprint, Madrid, 1977.

[5] P. DANKO y A. POPOV, Ejercicios y Problemas de Matemáticas Superiores, Paraninfo, Madrid, 1985.

[6] R. DEDEKIND, ¿Qué son y para qué sirven los números?, Alianza Editorial, Madrid, 1998.

[7] F. GARCIA CASTRO y A. GUTIERREZ, Cálculo Infinitesimal, Pirámide, Madrid, 1980.

[8] F. GRANERO, Cálculo, McGraw-Hill, Madrid, 1991.

[9] W.A. GRANVILLE y otros, Cálculo Diferencial e Integral, Uteha, México, 1970.

[10] R.M. JOHNSON, Calculus, Ellis Horwood, New York, 1987.

[11] E. KREYSZIG, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, USA, 1988.

[12] S. LANG, Análisis Matemático, Fondo Educativo Interamericano, México, 1983.

[13] E. LINES, Principios de Análisis Matemático, Reverté, Barcelona, 1983.

[14] A.I. MARKUSHEVICH. Números complejos y aplicaciones conformes. Mir, Moscú, 1983.

[15] J. MOYA y D. MORENO, Problemas de Cálculo Infinitesimal y Numérico, ICE, Madrid, 1974.

[16] C. PITA RUIZ, Cálculo Vectorial, Prentice Hall, México, 1995.

[17] P. PUIG ADAM, Cursos Téorico-Prácticos de Cálculo, Biblioteca Matemática, Madrid, 1972.

[18] M. SPIVAK, Calculus, Reverté, Barcelona, 1977.

[19] DE LA VILLA, A. y otros.- Cálculo I y II (dos tomos). Madrid, CLAGSA, 1994.

Este texto trata de ser un puente entre la enseñanza media y la enseñanza universitaria. Nuestra intención al escribir estas páginas fue la de proporcionar al alumno los conocimientos básicos para seguir con aprovechamiento un primer curso de Cálculo en una carrera técnica.

Así, este libro va primordialmente dirigido a aquellos alumnos que inician sus estudios universitarios.

En cada capítulo, las explicaciones teóricas van acompañadas de ejemplos aclaratorios. Además, se incluyen más de 100 ejemplos y se proponen más de 600 ejercicios, la mitad totalmente resueltos y el resto con sus soluciones, que tratan de aclarar los conceptos teóricos, sin detenerse en posibles casos particulares. Por todo ello, el libro está pensado parael autoaprendizaje del Cálculo.