Problema 1

a) Demostrar que la recta $y=-x+4$ es tangente a la curva $y=x^3-6x^2+8x$. Calcular el punto de tangencia y estudiar si la recta dada corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.

b) Probar que existe un punto de la curva definida por $y=e^x+\operatorname{arctg}x$ cuya tangente (en dicho punto) es paralela a la recta $y=3x+2$.

a) Tenemos que hallar los puntos de la curva en los que la pendiente es la de la recta tangente, es decir, -1.

$$f'(x)=3x^2-12x+8=-1 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Para $x=1 \quad\rightarrow\quad f(1)=1^3-6\cdot 1^2+8\cdot 1=3 \quad\rightarrow\quad y-3=-(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=-x+4$.

Para ver si la recta corta a la curva en otro punto distinto del punto de tangencia, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x+4 \\ y=x^3-6x^2+8x \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad x^3-6x^2+9x-4=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Si $x=4 \quad\rightarrow\quad f(4)=0 \quad\Rightarrow\quad (4,0)$ es el otro punto de corte.

b) Tenemos que probar que existe algún valor de x tal que $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{1+x^2}=3$.

Para resolver la ecuación $e^x(x^2+1)-3x^2-2=0$ recurrimos al teorema de Bolzano.

- $f'(x)$ es continua $\forall x\in R$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

Por tanto, en algún punto x se verifica que $f'(x)=3$

Problema 2

a) Sea "a" un número real estrictamente positivo. La recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln x$ en el punto $(a,\ln a)$ corta al eje de ordenadas en el punto P_a. Si Q_a es el punto de intersección del eje de ordenadas con la recta $y=\ln a$, probar que la distancia entre los puntos P_a y Q_a es una constante independiente de "a".

b) Determinar el polinomio $p(x)$, de grado menor o igual que 3, tal que la curva $y = p(x)$ sea tangente a las rectas $y = 2 - x$ y $x + y = 0$ en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente.

c) Estudiar para qué valores a, b y c la recta que une los puntos $A(-1,1)$ y $B(1,3)$ es tangente en el punto B a la gráfica de la función $f(x) = a\,L(1 + x^2) - bx + c$.

a) La recta tangente en $(a, \ln a)$ tiene por pendiente $y'(a)$.

$$y = \ln x \quad \to \quad y' = \frac{1}{x} \quad \to \quad y'(a) = \frac{1}{a}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \quad \to \quad y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a)$

El punto P_a es el punto en el que la abscisa vale cero, luego $P_a(0, \ln a - 1)$.

El punto Q_a es el punto $Q_a(0, \ln a)$. La distancia entre los dos puntos es:

$$\ln a - (\ln a - 1) = 1$$

b) El polinomio es de la forma $p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad \to \quad p'(x) = 3a x^2 + 2b x + c$.

Si la curva $y = p(x)$ es tangente a la recta $y = -x + 2$ en el punto de abscisa $x = 0$ significa que $p(0) = 2$ y $p'(0) = -1$.

$$p(0) = 2 \quad \to \quad d = 2 \qquad\qquad p'(0) = -1 \quad \to \quad c = -1$$

Si la curva $y = p(x)$ es tangente a la recta $y = -x$ en el punto de abscisa $x = 1$ significa que $p(1) = -1$ y $p'(1) = -1$.

$$p(1) = -1 \quad \to \quad a + b + c + d = -1 \qquad\qquad p'(1) = -1 \quad \to \quad 3a + 2b + c = -1$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$\left.\begin{array}{r} a + b - 1 + 2 = -1 \\ 3a + 2b - 1 = -1 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} a + b = -2 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -6 \end{array}\right.$$

El polinomio pedido es:

$$p(x) = 4x^3 - 6x^2 - x + 2$$

c) La recta que pasa por A y B tiene por ecuación:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2) \quad \to \quad m = \frac{2}{2} = 1 \quad \to \quad y - 1 = 1 \cdot (x + 1) \quad \to \quad y = x + 2$$

Por ser tangente en B a $f(x)$ se verifica: $f(1)=3 \;\rightarrow\; a\,L2 - b + c = 3$

La pendiente en B es $f'(1)=1$.

$$f(x) = a\,L(1+x^2) - bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{2a\,x}{1+x^2} - b \;\rightarrow\; f'(1) = \frac{2a}{2} - b = 1 \;\rightarrow\; a - b = 1$$

$$\left.\begin{aligned} a\,L2 - b + c &= 3 \\ a - b &= 1 \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{aligned} c &= 3 - a\,L2 + b \\ a &= 1 + b \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; c = 3 - (1+b)\,L2 + b$$

Podemos elegir arbitrariamente los valores de b y resultan entonces valores de a y c, para los cuales se verifican las condiciones que pide el problema.

Por ejemplo, si $\begin{cases} b = 0 \;\rightarrow\; c = 3 - L2 \\ b = 1 \;\rightarrow\; c = 4 - 2L2 \end{cases}$

Problema 3

a) Consideremos la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{(1-\cos x)\,sen\,x}}{\mathbf{x^2}} & \textbf{si } \mathbf{x \neq 0} \\ \boldsymbol{\lambda} & \textbf{si } \mathbf{x = 0} \end{cases}$

Razonar qué circunstancias tienen que darse para que la función f sea continua en $\mathbf{x = 0}$. Determinar el parámetro $\boldsymbol{\lambda}$ para que ocurra lo anterior.

b) Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{x^2 - 3x}}{\mathbf{x + tg\,x}}$ **en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y demostrar que en el origen tiene una discontinuidad evitable. Redefinir la función para que sea continua en dicho intervalo.**

a) Tiene que verificarse que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \lambda$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{(1-\cos x)\,\operatorname{sen} x}{x^2} &= 0 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{(1-\cos x)\,\operatorname{sen} x}{x^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\,\operatorname{sen} x}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$$

b) La función no está definida en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$ ya que la tangente no está definida para esos valores. Sin embargo, como en esos valores la tangente tiende a infinito, en valor absoluto se puede considerar definir $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Por otra parte, $f(x)$ tampoco está definida si $x + \operatorname{tg} x = 0$. Esto sucede cuando $x = 0$, pero también cuando $x \cong -2'02875$ y $x \cong 2'02875$, puntos que también pertenecen al intervalo $[-\pi, \pi]$.

La discontinuidad en $x = 0$ es evitable, ya que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 3x}{x + \operatorname{tg} x} = -\dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3x}{x + \operatorname{tg} x} = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x + \operatorname{tg} x} = -\frac{3}{2}$$

y, así se puede evitar poniendo $f(0) = -\dfrac{3}{2}$.

Las otras dos discontinuidades son inevitables. Por tanto, el problema propone algo imposible. No se puede redefinir la función de modo que sea continua.

Problema 4

a) Calcula de manera razonada dos funciones que no sean continuas en un cierto punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.

b) Si f es una función continua en un punto $a \in R$ y g es discontinua en el mismo punto, ¿puede ser la función $f + g$ continua en a?

c) Dar un ejemplo de una función f discontinua en todos los puntos de $[0,1]$ y tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos de $[0,1]$.

a) Podemos considerar $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ +1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Las dos son discontinuas en $x = 0$, pero la función suma es:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

que sí es continua en $x = 0$.

b) Si f es continua en $a \in R$ y $f + g$ también lo es, entonces $(f + g) - f = g$ también lo será, por tanto $f + g$ no puede ser continua en a.

c) Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x es racional y } x \in [0, 1] \\ -1 \text{ si x es irracional y } x \in [0, 1] \end{cases}$ ya que $|f(x)| = 1$.

Problema 5

a) Dada la función $f(x) = x|x|$ ¿Existe derivada en $x = 0$?

b) Hallar todos los puntos en los que la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable.

c) Estudiar la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$.

a) La función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = -2x \quad \rightarrow \quad f'_-(0) = 0$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad f'_+(0) = 0$$

Como $f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$

b) La función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si} \quad x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3, \infty\right[\\ 9 - x^2 & \text{si} \quad x \in \left]-3, 3\right[\end{cases}$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = -3$ es:

$$f'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad f'_-(-3) = -6$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = -3$ es:

$$f'(x) = -2x \quad \rightarrow \quad f'_+(-3) = 6$$

Como $f'_-(-3) \neq f'_+(-3) \quad \Rightarrow \quad \nexists f'(-3)$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = 3$ es:

$$f'(x) = -2x \quad \rightarrow \quad f'_-(3) = -6$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = 3$ es:

$$f'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad f'_+(3) = 6$$

Como $f'_-(3) \neq f'_+(3) \quad \Rightarrow \quad \nexists f'(3)$

De lo anterior se deduce que la función derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]3,\infty\right[\\ -2x & \text{si} \quad x \in \left]-3,3\right[\end{cases}$$

c) La función es $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = -3x^2 \quad \to \quad f'_-(0) = 0$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = 3x^2 \quad \to \quad f'_+(0) = 0$$

Como $f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$

Problema 6

a) Utilizar la definición de derivada de una función en un punto para calcular la derivada en $x = 0$ de la función $f(x) = x\,L\left(1 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$. (L = Logaritmo neperiano).

b) Encontrar, utilizando exclusivamente la definición de derivada, la de $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ en el punto $x_0 = 5$.
(Nota: Puede ser útil usar la relación $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

a) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,L\left(1 + \dfrac{1}{1+h^2}\right) - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} L\left(\dfrac{2+h^2}{1+h^2}\right) = L2$

b) $f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5+h-2} - \sqrt[3]{5-2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{3+h} - \sqrt[3]{3}}{h}$

Para utilizar la indicación, podemos poner:

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt[3]{3+h} \\ b=\sqrt[3]{3} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$\sqrt[3]{3+h}-\sqrt[3]{3}=\frac{\left(\sqrt[3]{3+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{\sqrt[3]{(3+h)^2}+\sqrt[3]{(3+h)\,3}+\sqrt[3]{3^2}}=\frac{h}{\sqrt[3]{(3+h)^2}+\sqrt[3]{(3+h)\,3}+\sqrt[3]{3^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{\sqrt[3]{(3+h)^2}+\sqrt[3]{(3+h)\,3}+\sqrt[3]{3^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(3+h)^2}+\sqrt[3]{(3+h)\,3}+\sqrt[3]{3^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$$

Problema 7

a) Averiguar todos los valores reales m y n para los que $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+nx & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ **es derivable.**

b) Dada la función $f(x)=x^n \operatorname{sen}\frac{1}{x}$**, si** $x\neq 0$ **y** $f(0)=0$**, siendo n un número natural, se pide:**

1) Demuestra que f es derivable en $x=0$ **para** $n=2$**.**
2) Demuestra que f no es derivable en $x=0$ **para** $n=1$**.**

a) La función debe ser continua en $x=1$ y, para ello, los dos trozos deben empalmar. Por otra parte, para ser derivable en $x=1$, las derivadas laterales han de coincidir.

<u>Continuidad</u>

$$f(1)=-4+m \qquad \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-5x+m)=-4+m \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2+nx)=-1+n \end{array}\right\} \rightarrow \quad -4+m=-1+n \quad \Rightarrow \quad m=n+3$$

<u>Derivabilidad</u>

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=1$ es:

$$f'(x)=2x-5 \quad \rightarrow \quad f'_-(1)=-3$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x=1$ es:

$$f'(x)=-2x+n \quad \rightarrow \quad f'_+(1)=-2+n$$

Para que sea derivable en $x = 1$ tiene que verificarse que las derivadas laterales sean iguales.

$$f'_-(1) = f'_+(1) \quad \to \quad -3 = -2 + n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

b)

1) Para $n = 2$, la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \operatorname{sen}\dfrac{1}{h} = 0$ ya que $\left| h \operatorname{sen}\dfrac{1}{h} \right| \leq |\, h \,|$ para todo $h \neq 0$.

2) Para $n = 1$, la función es $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

Cuando h se acerca a 0, $\operatorname{sen}\dfrac{1}{h}$ oscila entre -1 y $+1$ sin límite. La derivada en 0 no existe.

Problema 8

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ y calcular el área encerrada por la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

La función $f(x)$ es derivable para $x < 0$ y para $x > 0$. Veamos qué sucede en $x = 0$.

<u>Continuidad</u>

$$f(0) = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \to \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) = 1$$

La función es continua en $x = 0$.

Derivabilidad

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \to \quad f'_-(0)=-\infty$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

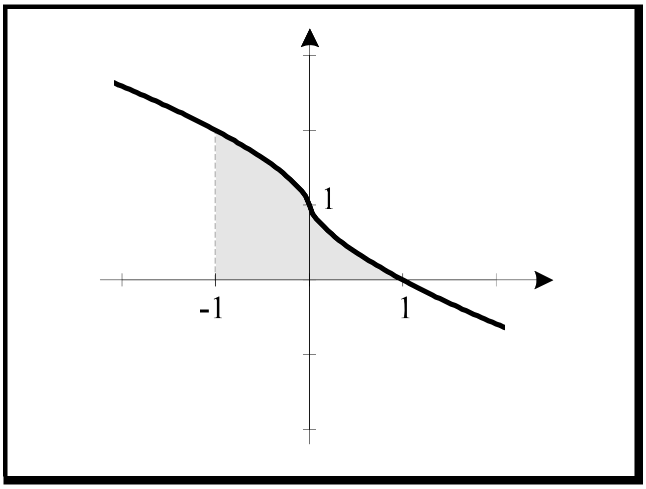
$$f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \to \quad f'_+(0)=-\infty$$

La función no es derivable en $x=0$.

El área es:

$$A=\int_{-1}^{0}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$\left[x+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{0}^{1}=2$$



Problema 9

a) Sea $f(x)$ continua en $[-1,5]$, tal que $f(-1)<0$ y $f(5)=7$. Responder razonadamente si la función $g(x)=f(x)-5$ tiene al menos un cero en $]-1,5[$.

b) ¿Tiene alguna raíz real la ecuación $\operatorname{sen} x+2x-1=0$? Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

a) Si $f(x)$ es continua en $[-1,5]$, entonces $g(x)=f(x)-5$ también lo es.

$$\left.\begin{array}{l} g(-1)=f(-1)-5<0 \\ g(5)=f(5)-5=7-5=2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ por el teorema de Bolzano } \exists\, c\in\,]-1,5[\text{ tal que } g(c)=0$$

b) La función $f(x)=\operatorname{sen} x+2x-1$ es continua.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=\operatorname{sen}1+1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ por el teorema de Bolzano } \exists\, c\in\,]0,1[\text{ tal que } f(c)=0$$

Problema 10

a) Sea la función $f(x)=\frac{1}{4}(x-4)$ si $0\le x\le \frac{1}{2}$ y $f(x)=e^{-x^2}$ si $\frac{1}{2}<x\le 1$. Esta función está definida en el intervalo $[0,1]$, $f(0)=-1<0$ y $f(1)=e^{-1}>0$, pero no existe ningún $c\in\,]0,1[$ tal que $f(c)=0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano?

b) La función $f(x)$ se define en el intervalo $[-1,1]$ del modo siguiente: Vale -1 si $x<0$, y vale $2x^3-1$ si $x\ge 0$. Explicar si $f(x)$ cumple el teorema de Bolzano.

a) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{4} & \text{si} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ e^{-x^2} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$

Estudiamos la continuidad en el punto de abscisa $x=\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8} \qquad \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{x-4}{4}=-\dfrac{7}{8}\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}e^{-x^2}=e^{-\frac{1}{4}}\end{matrix}\right\} \rightarrow \quad -\frac{7}{8}\neq e^{-\frac{1}{4}}$$

la función no es continua, por tanto, no es aplicable el teorema de Bolzano.

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<0\\ 2x^3-1 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$

Estudiamos la continuidad en el punto de abscisa $x=0$.

$$f(0)=-1 \qquad \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^3-1)=-1\end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \lim_{x\to 0}f(x)=-1$$

la función es continua en $x=0$ y por tanto es continua en todo el intervalo $[-1,1]$.

Como $f(-1)=-1<0$ y $f(1)=1>0$, se puede aplicar el teorema de Bolzano y por tanto existe algún $c\in\,]-1,1[$ tal que $f(c)=0$, lo que se verifica para $c=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Problema 11

Se piden los valores de los parámetros a y b, de forma que sea aplicable el teorema de Bolzano a la función adjunta.

Hallar así mismo el punto x_0 interior al intervalo $\left]-\pi,\pi\right[$ al que hace mención dicho teorema.

$$y=\begin{cases}\cos x & \text{si} \quad -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & \text{si} \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad 1\le x\le\pi\end{cases}$$

Continuidad en $x=0$

$$f(0)=\cos 0=1 \qquad \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(a+x^2)=a\end{array}\right\} \;\rightarrow\; a=1$$

Continuidad en $x=1$

$$f(1)=\frac{b}{1}=b \qquad \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x^2)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b}{x}=b\end{array}\right\} \;\rightarrow\; b=2$$

Si $a=1$ y $b=2$, la función $y=\begin{cases}\cos x & \text{si} \quad -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & \text{si} \quad 0<x<1\\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad 1\le x\le\pi\end{cases}$ es continua en $[-\pi,\pi]$.

Como $f(-\pi)=\cos(-\pi)=-1<0$ y $f(\pi)=\dfrac{2}{\pi}>0$, podemos aplicar el teorema de Bolzano, es decir, existe algún $x_0\in\left]-\pi,\pi\right[$ tal que $f(x_0)=0$. Aquí, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \;\Rightarrow\; x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

Problema 12

a) Comprueba si se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ en el intervalo $[0,1]$.

b) Pruébese que la ecuación $x^3-2x^2+3x=3$ admite una solución y sólo una en el intervalo $\left]1,2\right[$.

c) Demuestra que la ecuación $x^{1995}+x+1=0$ sólo tiene una solución real.

d) Demostrar que la ecuación $x^{18}-5x+3=0$ no puede tener más de dos raíces reales.

a) La función es claramente continua en $[0,1]$, derivable en $]0,1[$ y además $f(0)=f(1)=1$, por tanto, en algún punto $c\in]0,1[$ ha de ser $f'(c)=0$.

$$3x^2-4x+1=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

La única solución válida es $x=\dfrac{1}{3}$.

b) La función es $f(x)=x^3-2x^2+3x-3$.

Es continua en el intervalo $[1,2]$ y además $f(1)=-1<0$ y $f(2)=3>0$. Por el teorema de Bolzano existe algún $x\in]1,2[$ tal que $f(x)=0$.

La función es derivable $\forall x\in R$. Si hubiera dos soluciones $x_1, x_2\in]1,2[$ entonces $f(x_1)=f(x_2)=0$ y se podría aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[x_1,x_2]$. Existiría entonces $c\in]x_1,x_2[\subset]1,2[$ tal que $f'(c)=0$. Pero $f'(x)=3x^2-4x+3$ no tiene soluciones reales.

c) Por ser una función polinómica sabemos que es continua y además verifica que $f(-1)=-1<0$ y $f(0)=1>0$. Por el teorema de Bolzano, ha de existir algún $x\in]-1,0[$ tal que $f(x)=0$.

Por otra parte, la función es derivable $\forall x\in R$. Si hubiera dos soluciones $x_1, x_2\in]-1,0[$ entonces $f(x_1)=f(x_2)=0$ y se podría aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[x_1,x_2]$. Existiría entonces $c\in]x_1,x_2[\subset]-1,0[$ tal que $f'(c)=0$. Pero $f'(x)=1995x^{1994}+1>0$ para todo x, así que no hay más que un valor en el que $f(x)$ se anula.

d) Si $f(x)$ presentara tres raíces reales distintas, entonces, según el teorema de Rolle, su derivada se anularía al menos dos veces.

Pero $f'(x)=18x^{17}-5$ sólo se hace 0 para $x=\sqrt[17]{\dfrac{5}{18}}$.

Problema 13

a) Dada la función $f(x)=e^{-x}+2x-1$, comprobar que la ecuación $f(x)=0$ tiene dos soluciones, 0 y α, estando α en el intervalo $[-2,-1]$.

b) **Demuestra que la ecuación $\mathbf{x^4 + 4e^x (x-1) = 0}$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?**

c) **Demuestra que la ecuación $\mathbf{e^x = 1 + x}$, tiene únicamente la solución real $\mathbf{x = 0}$.**

a) La función $f(x)$ es continua en $[-2,-1]$. Comprobamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo. $f(-2) = e^2 - 5 > 0$ y $f(-1) = e - 3 < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe al menos algún $\alpha \in]-2,-1[$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Como $f'(x) = -e^{-x} + 2 \quad \rightarrow \quad -e^{-x} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-x} = 2 \quad \rightarrow \quad -x = \ln 2 \quad \rightarrow \quad x = -\ln 2$

La función crece en $]-\ln 2, \infty[$ y decrece en $]-\infty, -\ln 2[$, por tanto sólo puede cortar al eje de abscisas en dos puntos, es decir, $f(x) = 0$ sólo tiene dos soluciones.

b) El teorema de Bolzano puede servirnos para decidir que hay solución. Hallamos unos cuantos valores sencillos del primer miembro de la ecuación. Entonces:

$$P(-2) \cong 14'3 \qquad P(-1) \cong -1'94 \qquad P(0) \cong -4 \qquad P(1) \cong 1 \qquad P(2) \cong 45'55$$

que pone en claro que hay al menos dos soluciones, una entre -2 y -1 y otra entre 0 y 1.

La derivada es $P'(x) = 4x(e^x + x^2)$ y sólo se hace cero una vez. Por el teorema de Rolle sólo puede haber dos soluciones.

c) Sabemos que si $f(x) = e^x - x - 1$, se verifica $f(0) = 0$. Si hubiera $a > 0$ tal que $f(a) = 0$ entonces, por el teorema de Rolle, debería suceder para algún $c \in]0, a[$ que $f'(c) = 0$, es decir, que $f'(c) = e^c - 1 = 0$. Pero esto sólo es cierto para $c = 0$.

Análogamente, si hubiera $b < 0$ tal que $f(b) = 0$ entonces, por el teorema de Rolle, debería suceder para algún $d \in]b, 0[$ que $f'(d) = 0$, es decir, que $f'(d) = e^d - 1 = 0$. Pero esto sólo es cierto para $d = 0$.

Problema 14

a) **Estudia la derivabilidad en $\mathbf{x = 0}$ de la función $\mathbf{f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}}$ y analiza si la función f verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $\mathbf{[-1, 1]}$.**

b) **Probar que la función derivada del polinomio $\mathbf{P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)}$ tiene todas sus raíces reales.**

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\sqrt[3]{h^2}}{h}$ que se hace infinito. La derivada no existe en $x = 0$.

No se verifican las condiciones del teorema de Rolle ya que la función es continua en $[-1,1]$, $f(-1) = f(1) = 0$ pero f no es derivable en $]-1,1[$.

b) Como las raíces de $P(x)$ son $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ y $x_4 = -2$, por el teorema de Rolle, $P'(x) = 0$ tiene una solución en $]-2,-1[$, otra en $]-1,0[$ y otra en $]0,1[$, es decir, tiene tres raíces reales, que es el máximo número de raíces que puede tener un polinomio de tercer grado como es $P'(x)$.

Problema 15

a) Estudiar si la función $f(x) = \ln(-\cos x)$ existe en $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. Razonar si en dicho intervalo se puede aplicar el teorema de Rolle. En caso afirmativo, hallar el valor de c dado por el teorema.

b) Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{|x|}{(x+1)(x-1)}$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

a) El intervalo está comprendido entre 120º y 240º y en él el coseno es negativo, por lo que la función $f(x) = \ln(-\cos x)$ sí está definida y es continua y derivable.

Como $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(-\cos\frac{2\pi}{3}\right) = -0'6931...$ y $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ln\left(-\cos\frac{4\pi}{3}\right) = -0'6931...$ se verifica que $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, luego se puede aplicar el teorema de Rolle, es decir, existe $c \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ tal que $f'(c) = 0$. En este caso $f'(x) = -\operatorname{tg} x$ que se anula para $x = \pi$, es decir $c = \pi$.

b) La función dada es: $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(x+1)(x-1)} & \text{si} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{(x+1)(x-1)} & \text{si} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

La función es continua $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Continuidad en $x=0$

$$f(0)=0 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{(x+1)(x-1)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{(x+1)(x-1)} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

La función es continua en $x=0$ y derivable $\forall x \in \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

Derivabilidad en $x=0$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'_-(0) = 1$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'_-(0) = -1$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow \nexists f'(0)$, por tanto, no es aplicable el teorema de Rolle.

Problema 16

a) Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2^{-x}$, definidas para $x>0$ se cortan en un sólo punto.

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+ax & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ bx+c & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$ hallar a, b y c para que la función $f(x)$ cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,5]$. Calcular el punto en el que se verifica la tesis. Representar la función para los valores hallados de a, b y c.

a) El sistema $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=2^{-x} \end{array}\right\}$ es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x^2-2^{-x}=0 \\ y=x^2 \end{array}\right\}$ para $x>0$.

La función $h(x)=x^2-2^{-x}$ es continua en $[0,+\infty[$. Por otra parte $h(0)=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, por tanto por el teorema de Bolzano tiene una solución en $[0,+\infty[$.

Como $h'(x)=2x+2^{-x}\ln 2>0$ para $x>0$, significa que la función es creciente. Por tanto, sólo puede haber un punto en $]0,+\infty[$ en el que $h(x)=0$.

b) Hay que conseguir que la función sea continua y derivable en $[-1,5]$ y que los valores en -1 y en 5 sean iguales.

Si $f(-1)=f(5) \quad \to \quad -1-a=5b+c$

Continuidad en $x=3$

$$f(3)=-9+3a \qquad \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 3^-}(-x^2+ax)=-9+3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(bx+c)=3b+c \end{array}\right\} \to \quad -9+3a=3b+c$$

Derivabilidad en $x=3$

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=3$ es:

$$f'(x)=-2x+a \quad \to \quad f'_-(3)=-6+a$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x=3$ es:

$$f'(x)=b \quad \to \quad f'_+(3)=b$$

Como $f'_-(3)=f'_+(3) \quad \Rightarrow \quad -6+a=b$

Obtenemos el sistema: $$\left.\begin{array}{r} a+5b+c+1=0 \\ 3a-3b-c-9=0 \\ a-b-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{10}{3} \\ b=-\dfrac{8}{3} \\ c=9 \end{array}\right.$$

Problema 17

Estudiar si se puede aplicar el Teorema del Valor Medio o de Lagrange a las funciones $f(x)=x(x-1)^{\frac{1}{2}}$ y $g(x)=x^2-2x+3$ en el intervalo $[1,3]$ y, en caso afirmativo, aplicarlo.

Las funciones $f(x)=x\sqrt{x-1}=\sqrt{x^3-x^2}$ y $g(x)=x^2-2x+3$ son continuas en $[1,3]$ y derivables en $]1,3[$ ya que:

$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} \quad y \quad g'(x)=2x-2 \quad \text{con} \quad x\in\,]1,3[$$

por tanto existe $c\in\,]1,3[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\sqrt{27-9}-\sqrt{1-1}}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3c-2}{2\sqrt{c-1}}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_1=1'0893\\c_2=2'2440\end{cases}$$

$$g'(c)=\frac{g(3)-g(1)}{3-1}=\frac{(3^2-2\cdot 3+3)-(1^2-2\cdot 1+3)}{2}=\frac{6-2}{2}=2=2c-2\quad\Rightarrow\quad c=2$$

Problema 18

a) Estudiar si es aplicable el Teorema del Valor Medio o Lagrange a la función: $f(x)=\begin{cases}x\,Lx & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en el intervalo $[0,1]$ y, en caso afirmativo, hallar el valor de $c\in\,]0,1[$ al que se refiere el teorema ($Lx=$ logaritmo neperiano de x).

b) Se tiene la función f de $[-2,0]$ en R dada por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1\le x\le 0\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{si } -2\le x<-1\end{cases}$

Pruébese que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio y calcúlese el valor intermedio vaticinado por el teorema. Si hay varios valores intermedios válidos, calcúlense todos ellos.

a) La función es claramente continua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$ con $f'(x)=L\,x+1$, por lo tanto el teorema es aplicable y por tanto existe $c\in\,]0,1[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\quad\rightarrow\quad L\,c+1=\frac{L\,1-0}{1}\quad\rightarrow\quad L\,c=-1\quad\Rightarrow\quad c=e^{-1}\cong 0'368$$

b)

<u>Continuidad</u>

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x}&=-1\\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-3}{2}&=-1\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to -1} f(x)=-1\qquad\qquad f(-1)=-1$$

Por tanto la función es continua en $[-2,0]$

<u>Derivabilidad</u>

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=-1$ es:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f'_-(-1) = -1$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = -1$ es:

$$f'(x) = x \quad \rightarrow \quad f'_+(-1) = -1$$

Como $f'_-(-1) = f'_+(-1)$ la función es derivable en $x = -1$, por tanto la función es derivable en $\left]-2,0\right[$ y se puede aplicar el teorema del valor medio.

Existe algún $c \in \left]-2,0\right[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} \quad \rightarrow \quad f'(c) = \dfrac{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Tenemos que buscar los puntos en los que $f'(c) = -\dfrac{1}{2}$.

Miramos si los hay en $\left]-2,-1\right[$. Allí: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad -\dfrac{1}{c^2} = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = -\sqrt{2}$.

Miramos si los hay en $\left]-1,0\right[$. Allí: $f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad c = -\dfrac{1}{2}$.

Se obtienen dos soluciones, $c_1 = -\sqrt{2}$ y $c_2 = -\dfrac{1}{2}$ y no hay más.

Problema 19

Sea $s(x)$ una función definida dentro del intervalo $[-1,1]$ y derivable dos veces, tal que $s''(x) = x,\ x \in \left]-1,1\right[$. Supongamos que en el punto $x = 0$ se cumple que $s'(0) = s(0) = 1$. Se pide cuántos ceros tiene exactamente la función $s(x)$ dentro del intervalo $[-1,1]$

$$s'(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k \quad \text{en} \quad \left]-1,1\right[\qquad s(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + k\right) dx = \frac{x^3}{6} + kx + k' \quad \text{en} \quad \left]-1,1\right[$$

$$s'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad s'(0) = k = 1 \qquad\qquad s(0) = 1 \quad \rightarrow \quad s(0) = k' = 1$$

Por tanto, la función $s(x)$ es $s(x) = \dfrac{x^3}{6} + x + 1$ en $\left]-1,1\right[$

(Aunque no se dice explícitamente, parece que hay que suponer que $s(x)$ es continua en $[-1,1]$, pues de otra forma los datos en $\left]-1,1\right[$ no nos servirán para nada al tratar de determinar los ceros en $[-1,1]$).

Como $s(-1) = -\frac{1}{6} < 0$ y $s(1) = \frac{13}{6} > 0$, por el teorema de Bolzano existe al menos algún $c \in \left]-1,1\right[$ tal que $f(c) = 0$. Veamos cuántas soluciones puede haber.

Como $s'(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ en $\left]-1,1\right[$ es claro que $s(x)$ no puede tener dos ceros en $\left]-1,1\right[$ ya que, de otro modo, en algún punto intermedio sería $s'(x) = 0$ lo que es imposible pues $s'(x) \geq 1$. Así, $s(x)$ tiene un único cero en $\left]-1,1\right[$.

Problema 20

Sea la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{L(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$ **donde $\mathbf{L(1+x)}$ denota el logaritmo neperiano de $\mathbf{1+x}$.**

a) Determinar c para que f sea continua en 0.
b) Determinar b para que f sea derivable en 0.
c) Utilizando el Teorema del Valor Medio de Lagrange demostrar que existe un punto $\mathbf{x_0 \in (0, e-1)}$ tal que $\mathbf{f'(x_0) = \dfrac{2-e}{(e-1)^2}}$.

a)

$$f(0) = c \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 + bx + c) = c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{L(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad c = 1$$

Por tanto, para que la función sea continua en $x = 0$ ha de ser $c = 1$ y la función es ahora la representada al margen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{L(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = 2x + b \quad \rightarrow \quad f'_-(0) = b$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - L(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} \quad \rightarrow \quad f'_+(0) = -\frac{1}{2}$$

Como las derivadas laterales deben ser iguales, $f'_-(0) = b = f'_+(0) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$

Por tanto, para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser $b = -\frac{1}{2}$ y la función es ahora la representada al margen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x}{2} + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{L(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c) Ahora $f(x)$ es continua en $[0, e-1]$ y derivable en $]0, e-1[$. Se le puede aplicar el Teorema del Valor Medio y concluir que existe $x_0 \in]0, e-1[$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(e-1) - f(0)}{e-1-0}$, es decir:

$$f'(x_0) = \frac{\frac{L(1+e-1)}{e-1} - \left(0^2 - 0 + 1\right)}{e-1-0} = \frac{\frac{1}{e-1} - 1}{e-1} = \frac{2-e}{(e-1)^2}$$

Problema 21

a) ¿Por qué no se puede aplicar la regla de L'Hôpital al cálculo de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{x}$

b) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$

c) Determinar "a" para que exista y sea finito $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + a x}{x - \operatorname{sen} x}$

a) La derivada del numerador es $1 + \operatorname{sen} x$ y es claro que no tiene límite para $x \to \infty$. El límite del cociente propuesto existe y es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + a x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} + a}{1 - \cos x}$$

Para que podamos seguir aplicando la regla de L'Hôpital hace falta (ya que $1-\cos 0=0$) que $e^0+e^0+a=0$, es decir, $a=2$. Entonces se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

Problema 22

a) Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{e^x}}$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-L(1+x)}{(x+L(1+x))^2}$ **(L = Logaritmo neperiano)**

c) Si L designa al logaritmo neperiano, calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{L(e^x-1)}}$

a) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{e^x}} \;\rightarrow\; \ln A=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)^{\frac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}\left[\ln(\ln x)\right]=0$

ya que $\ln(\ln x)<x$. $\quad \ln A=0 \;\rightarrow\; A=e^0=1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{e^x}}=1$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{(x+\ln(1+x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2(x+\ln(1+x))\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(x+\ln(1+x))(2+x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left[\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)\cdot(2+x)+(x+\ln(1+x))\right]}=\frac{1}{8}$$

c) $$A=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} \;\rightarrow\; \ln A=\lim_{x\to 0^+}\ln x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{e^x-1}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+x e^x}=1 \qquad \ln A=1 \;\rightarrow\; A=e \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e$$

Problema 23

a) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$

b) Calcular el límite $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2}$

c) Hallar el siguiente límite $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

a) $$A=\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}} \quad \to \quad \ln A=\lim_{x\to 1}\ln(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-1}=1$$

$$A=e \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=e$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(2-x)e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x+(2-x)e^x}{2}=0$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{3}=\frac{1}{3}$$

Problema 24

a) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to \pi}(x-\pi)\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

b) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x-x}{x-\mathrm{sen}\,x}$

c) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x-x}{2x-\mathrm{arcsen}\,x}$

a) $$\lim_{x\to \pi}(x-\pi)\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{\mathrm{cotg}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\frac{-1}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}}}=-2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x-x}{x-\mathrm{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x(1-\cos x)+(1+x^2)\,\mathrm{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{2(1-\cos x)+2x\,\mathrm{sen}\,x+2x\,\mathrm{sen}\,x+(1+x^2)\cos x}=-2$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x-x}{2x-\mathrm{arcsen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=1$$

Problema 25

Razonar si la función $f(x)=e^x+\ln(1-x)$ tiene un extremo en $x_0=0$, utilizando el desarrollo de Taylor de orden 3 en el origen.

Comenzamos por calcular las sucesivas derivadas de $f(x)$ y su valor en 0:

$$f(x)=e^x+\ln(1-x)\ \rightarrow\ f(0)=1 \qquad f'(x)=e^x-\frac{1}{1-x}\ \rightarrow\ f'(0)=0$$

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{(1-x)^2}\ \rightarrow\ f''(0)=0 \qquad f'''(x)=e^x-\frac{2}{(1-x)^3}\ \rightarrow\ f'''(0)=-1$$

$$e^x+\ln(1-x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots=1-\frac{x^3}{6}+\cdots$$

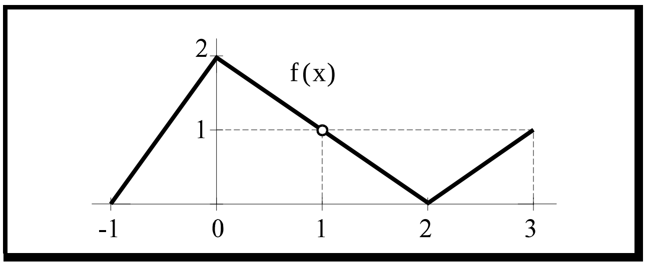
Junto a cero, $f(x)$ se comporta como $y=1-\dfrac{x^3}{6}$.

La función $y=1-\dfrac{x^3}{6}$ es decreciente $\forall x\in R$, es cóncava $\forall x\in\left]-\infty,0\right[$ y convexa $\forall x\in\left]0,\infty\right[$

por tanto, en $x=0$ la función no tiene extremo sino un punto de inflexión.

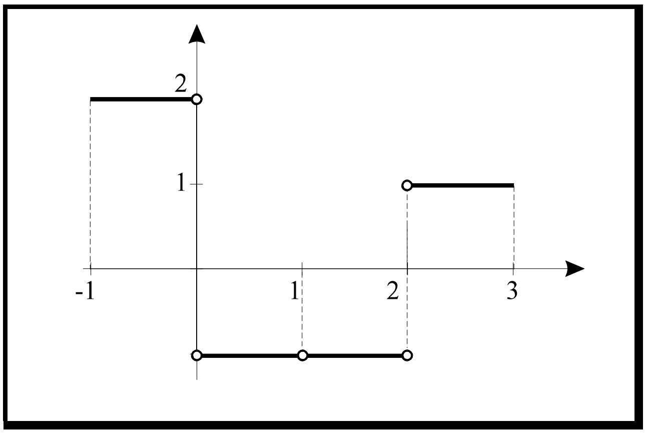
Problema 26

Sin calcular la expresión analítica de $f(x)$, obtener la representación gráfica de $f'(x)$ siendo la gráfica de $f(x)$ la gráfica adjunta.



Teniendo en cuenta que, la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa x, podemos deducir de la gráfica cuánto vale esa pendiente.

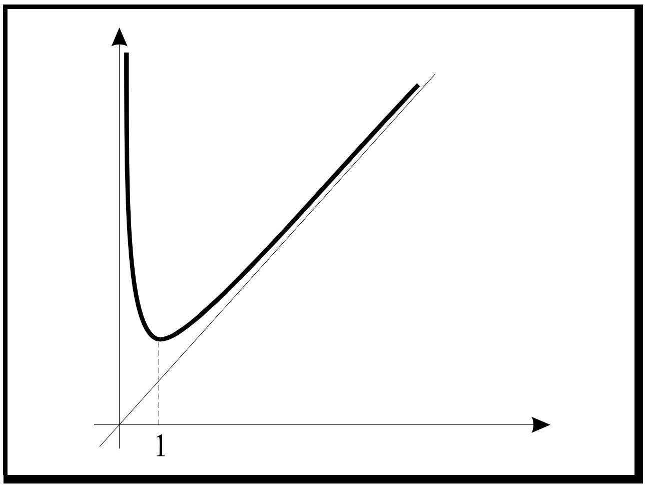
La función $f(x)$ parece estar definida $\forall x \in [-1,3] - \{1\}$ y así $f'(x)$ estará posiblemente definida en principio $\forall x \in]-1,3[- \{1\}$. En los puntos -1 y 3 pueden existir las derivadas laterales a la derecha e izquierda respectivamente.



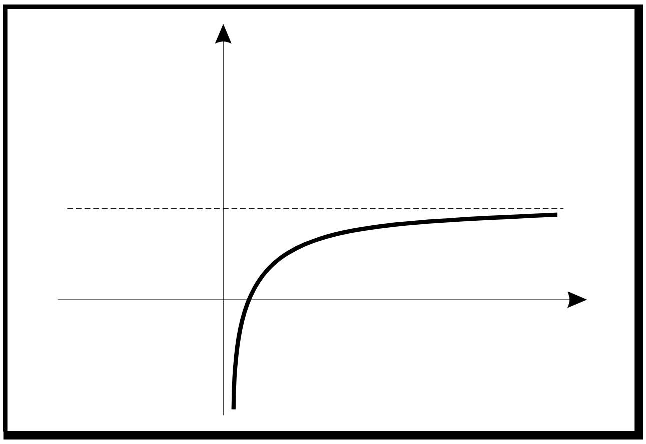
Entre -1 y 0 la pendiente de $y = f(x)$ es 2, entre 0 y 2 la pendiente es -1 y entre 2 y 3 la pendiente es +1.

Problema 27

Tenemos una función derivable $f(x)$ definida en el dominio de las $x > 0$, de la que lo único que sabemos es que su gráfica es, aproximadamente, la que se indica en la figura (el eje de las y es asíntota vertical, la recta de ecuación $y = x$ es asíntota oblicua y tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = 1$). Hacer un esquema sencillo de la gráfica de la función derivada $f'(x)$ explicando razonadamente la respuesta.



La derivada está definida en $x > 0$.

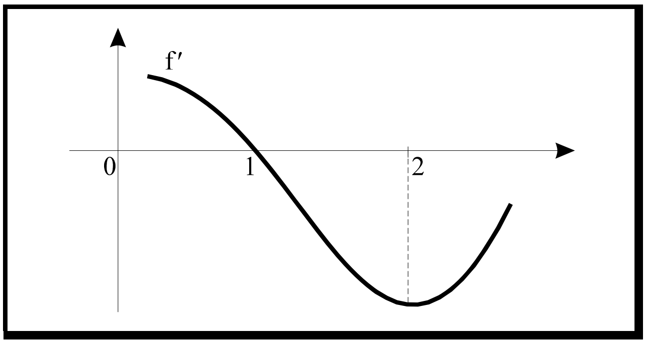


En las cercanías de $x = 0$ la función es decreciente y la pendiente es negativa acercándose a $-\infty$.

Para $x = 1$, la pendiente se hace 0 y luego se va acercando a 1, ya que la curva se acerca asintóticamente a $y = x$. La gráfica de la derivada es la adjunta.

Problema 28

a) En la figura se representa la gráfica de la derivada f' de cierta función f. Con este dato, determinar si existen máximos, mínimos relativos o puntos de inflexión de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$.



b) Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser, entonces, creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dar un contraejemplo que lo confirme).

c) Considera la función $f(x) = x^3$ y comenta la comparación entre:

1) El incremento de $f(x)$ al pasar del punto 2 al punto $2'1$.

2) La diferencial de $f(x)$ en el punto $x = 2$ para $\Delta x = 0'1$.

a) Para que existan extremos (máximos o mínimos) de f tiene que verificarse que f' ha de ser cero en ellos.

Según se observa en la gráfica, $f'(1) = 0$. Como $f'(1-h)$ para h pequeño, $h > 0$, es positivo y $f'(1+h)$ para h pequeño, $h > 0$, es negativo, para x acercándose a 1 por la izquierda la $f(x)$ crece, y cuando x pasa de 1 y está cerca de 1, entonces $f(x)$ decrece, por tanto en $x = 1$ hay un máximo.

Al ser la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ igual a cero, significa que $f''(2) = 0$. Como $f'''(2) > 0$, ya que la curva $y = f'(x)$ se comporta como $y = x^2$ en lo que se refiere a su concavidad en las cercanías de $x = 2$, resulta que en $x = 2$ hay un punto de inflexión.

b) La respuesta, en general es negativa. Si $f(x) = x$ y $g(x) = 2x$, las dos funciones son crecientes en todo R y sin embargo $y = f(x) - g(x) = -x$ es decreciente en todo R.

c) El incremento es: $f(2'1) - f(2) = 2'1^3 - 2^3 = 1'261$

La diferencial es: $df(x, h) = f'(x)\,h = 3x^2\,h \quad \rightarrow \quad df(2, 0'1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 0'1 = 1'2$

Problema 29

Estudio y representación gráfica de la función $f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)$

1. <u>Dominio</u>

$D\left[f(x)\right] = \forall x \in R$

2. ***Periodicidad***

No es periódica ya que $f(x+T) = e^{x+T} \cdot \left((x+T)^2 - 3(x+T) + 2\right) \neq f(x)$

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = e^{-x} \cdot \left((-x)^2 - 3(-x) + 2\right) = e^{-x} \cdot \left(x^2 + 3x + 2\right)$$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -e^{x} \cdot (x^2 - 3x + 2)$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. ***Asíntotas***

Asíntotas verticales

No tiene

Asíntotas horizontales

$\lim_{x \to \infty} e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = +\infty \quad \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal por la derecha

$\lim_{x \to -\infty} e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \quad \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

Asíntotas oblicuas

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} = \infty \quad \Rightarrow$ No tiene

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} = 0 \quad \Rightarrow$ No tiene

5. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = e^0 \cdot 2 = 2 \qquad \text{Corta en el punto} \quad (0,2)$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Corta en los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty, -0'61\right[\cup \left]1'61, \infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-0'61, 1'61\right[$

Máximo $\quad (-0'61, 2'28)$

Mínimo $\quad (1'61, -1'19)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

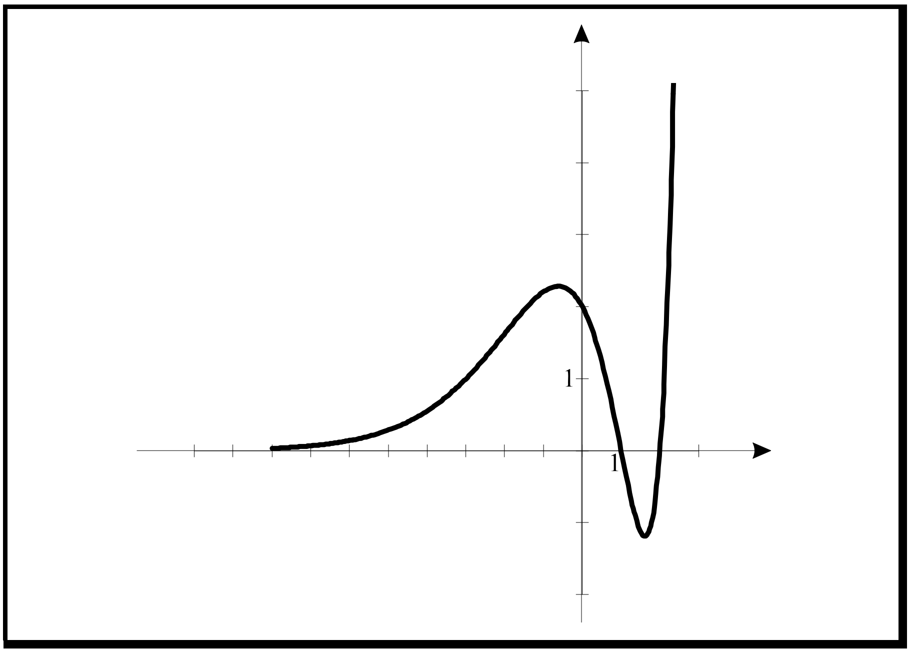
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]1, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-2, 1\right[$

Los puntos de inflexión son $\quad (-2, 1'62)$ y $(1,0)$

8. *Tabla de valores*

x	$f(x)$
-3	0'99
-2	1'62
0'5	1'23
0'75	0'66
2'5	9'13
3	40'17



Problema 30

Representar gráficamente la función $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x} & \text{si} \quad x<0\\ x^3-4x^2+3x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}}$

Si $x<0$

1. Dominio

$D[f(x)]=\forall x<0$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{(x+T)^2-4}{x+T}\neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{-x}=\frac{x^2-4}{-x}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-4}{x}=+\infty \quad \Rightarrow \quad$ La recta $x=0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-x)^2-4}{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{-x}=-\infty \quad \Rightarrow \quad$ No hay.

Asíntotas oblicuas

$$\left.\begin{aligned} m&=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(-x)^2-4}{(-x)^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\\ n&=\lim_{x\to -\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{x^2-4}{x}-x\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{-4}{-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=1\\ n=0\end{cases}$$

La recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

5. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \text{No está definida en } x = 0 .$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{x^2 - 4}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Corta en el punto $(-2, 0)$

Cortes con la asíntota oblicua

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{x^2 - 4}{x} = x \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad -4 \neq 0 \quad \text{No corta.}$$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4)}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No se anula en ningún punto.}$$

La función $f(x)$ es creciente $\forall x < 0$

No tiene máximos ni mínimos.

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-8}{x^3}$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{-8}{x^3} = 0 \quad \rightarrow \quad -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No se anula en ningún punto.}$$

La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x < 0$

No hay punto de inflexión

Si $x \geq 0$

1. ***Dominio***

$D[f(x)] = \forall x \geq 0$

2. ***Periodicidad***

No es periódica, ya que $f(x+T) = (x+T)^3 - 4(x+T)^2 + 3(x+T) \neq f(x)$.

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 - 4x^2 - 3x$

$f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

4. ***Asíntotas***

No tiene por ser una función polinómica.

5. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x^2 + 3x \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x^2 + 3x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Corta en los puntos: } (0,0) \;;\; (1,0) \;;\; (3,0)$$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0'45 \\ x = 2'21 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0\,,0'45\right[\quad ; \quad \left]0'45,2'21\right[\quad ; \quad \left]2'21,\infty\right[$$

$$f'(0'1) = 2'23 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0\,,0'45\right[\text{ la función } f(x) \text{ es creciente.}$$

$$f'(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0'45,2'21\right[\text{ la función } f(x) \text{ es decreciente.}$$

$$f'(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]2'21,\infty\right[\text{ la función } f(x) \text{ es creciente.}$$

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

	0		0'45		2'21	
Signo de f '		+		−		+
Monotonía de f		↗		↘		↗

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0\,,0'45\right[\cup \left]2'21,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]0'45,2'21\right[$

Máximo en el punto $\quad (0'45\,,0'63)$

Mínimo en el punto $\quad (2'21\,,-2'11)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = 6x - 8$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1'\widehat{3}$$

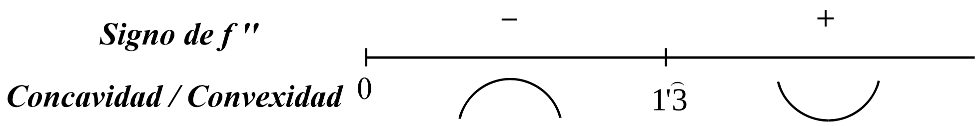
Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]0\,,1'\widehat{3}\right[\quad ; \quad \left]1'\widehat{3}\,,\infty\right[$$

$$f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0\,,1'\widehat{3}\right[\text{ la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''(2) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]1'\widehat{3}\,,\infty\right[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



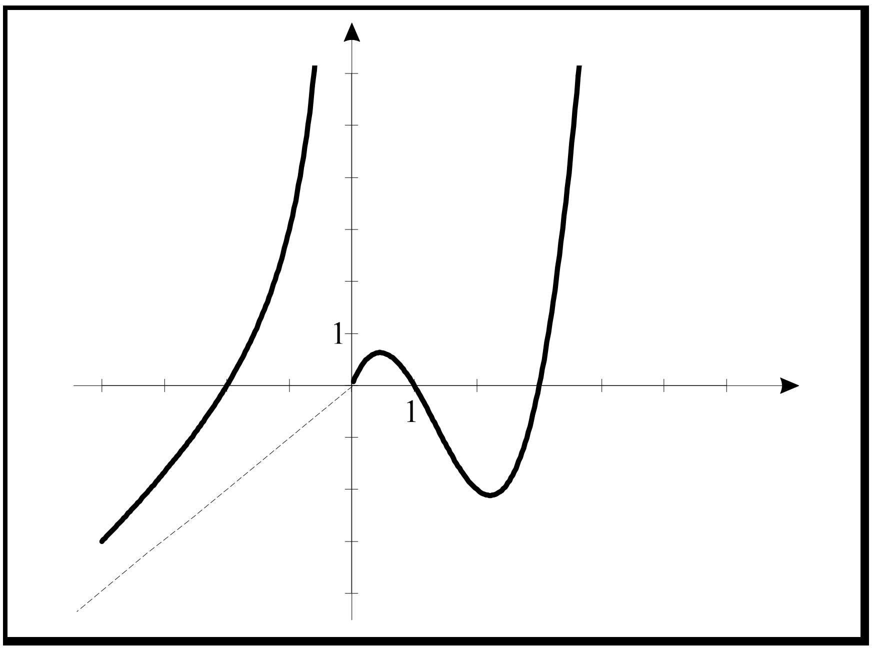
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]1'\widehat{3}\,,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0\,,1'\widehat{3}\right[$

Punto de inflexión $\quad (1'\widehat{3}\,, -0'74)$

8. ***Tabla de valores***

x	$f(x)$
−5	−4'2
−4	−3
−2	0
−0'5	7'5
0'5	0'62
1'5	−1'12
2'5	−1'87
6	90



Problema 31

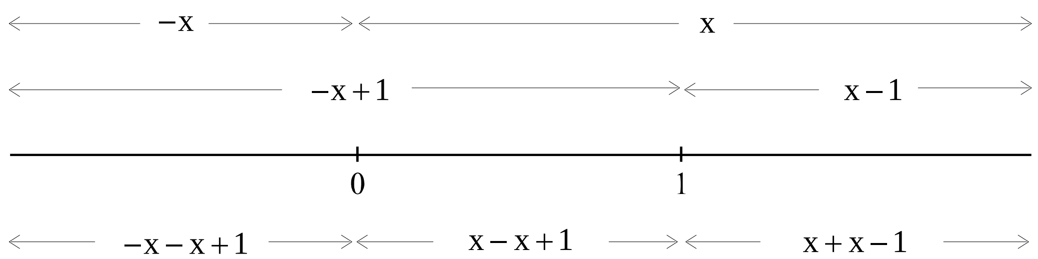
Representar gráficamente la función $y = |x| + |x-1|$ e indicar razonadamente en qué puntos dicha función no es diferenciable.

Para representar una función dada como suma de valores absolutos conviene eliminar éstos. Para ello, cada una de las expresiones que están entre barras convendrá definirla en dos trozos:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) = -x+1 & \text{si} \quad x-1 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x-1 = 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x-1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

y después, ver la forma que adopta la función suma en los intervalos: $]-\infty, 0]$, $]0, 1[$, $]1, \infty[$.



La función que resulta es:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$$

La función no es diferenciable en los puntos de abscisa:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

que, como se observa en la gráfica de la función, corresponden a puntos angulosos, si bien la función sí es continua en dichos puntos.