Composición de funciones

Sabemos que la notación "g(a)" significa el valor de la función g(x) cuando x = a; se obtiene al sustituir a por x, siempre que x aparezca en la expresión de g(x). Por ejemplo,

$$\text{si } g(x) = x^3 + 2, \text{ entonces } g(a) = a^3 + 1;$$

$$\text{si } g(x) = \sqrt{x - x^2}\,, \text{ entonces } g(a) = \sqrt{a - a^2}$$

Si f(x) es una función, entonces g(f(x)) es la función que se obtiene al sustituir f(x) en lugar de x, siempre que ésta ocurra en la expresión de g(x). La función g(f(x)) es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional o para denotar la compuesta de g con f. Así (g o f) (x) = g(f(x)).

Si $g(x) = x^2$ y f(x) = x + 2, entonces (g o f)(x) = g(f(x)) = $(f(x))^2 = (x + 2)^2$. ¿Cuál es el dominio de g o f? La siguiente definición nos da la respuesta,

Definición

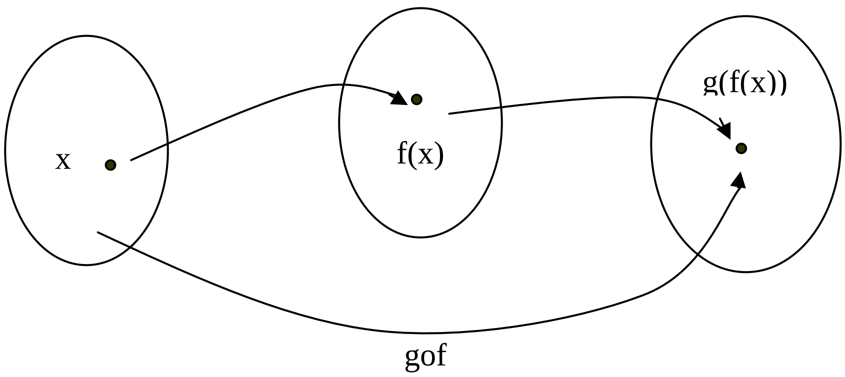
Si f es una función de X en Y y g es una función de Y a Z, entonces la función compuesta g o f es la función de X a Z dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para cada x en X. El dominio de g o f es

$$D_{gof} = \{x \mid x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\}$$

La siguiente figura muestra una representación geométrica de (gof) (x) = g(f(x))



Es muy importante hacer notar que para formar la función composición es necesario que el rango de la función f sea igual o un subconjunto del dominio de la función g.

Ejemplo

Sea f(x) = x + 3 y g(x) = 2x + $\sqrt{x}$. Encuentre gof y especifique su dominio.

Solución:

Por las definiciones de gof, f y g, tenemos que

$$(gof)\,(x) = g(x + 3) = 2(x + 3) + \sqrt{x+3}$$

El dominio X de f es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo (gof) (x) es un número real sólo si x ≥ -3. Por lo tanto el dominio de gof es el intervalo [-3, ∞).

También es posible calcular la composición de f con g. En este caso obtenemos primero la imagen de x bajo g y luego aplicamos f a g(x). Esto nos da una función compuesta de Z a X denotada por fog. Por lo tanto por definición

$$(fog)\ (x) = f(g(x))$$

para cada x en

Z. **Ejemplo**

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 3$. Encuentre (fog) (x), (gof)(x) y sus dominios.

Solución:

Por las definiciones de fog, gof, f y g tenemos

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) = \sqrt{2x-3}$$

El dominio de g es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de f es $[0, \infty)$. El dominio de fog es el conjunto de números reales para los cuales $2x - 3 \geq 0$, o, equivalentemente $[3/2, \infty)$.

De la misma forma

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\ -3$$

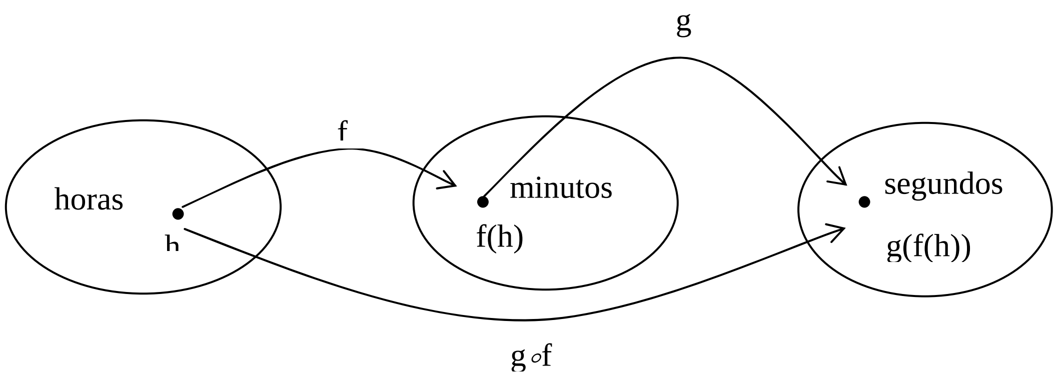
El dominio de gof es el conjunto de números reales para los cuales $x \geq 0$, es decir $[0, \infty)$.

nótese que fog puede ser una función diferente a gof.

Ejemplo

Sea f la función definida por f(h) = 60 h que convierte horas en minutos, y g(m) = 60m la función que convierte minutos a segundos. Encuentre una función que convierta horas en segundos.

Solución:



$$(g \circ f)\ (h) = g(f(h)) = g(60h) = 60(60h) = 3600h$$

Los siguientes son ejemplos de composición de funciones.

(1) El costo de producción de huevos por un granjero es función del número de gallinas que tiene; el número de gallinas depende a su vez del costo del alimento. El costo de producción de huevos es una función del costo del alimento para gallinas.

(2) La producción anual de naranjas de una huerta es función del número de árboles plantados en la huerta; el número de árboles plantados es función de la fertilidad del terreno. La producción anual es pues función de la fertilidad del terreno.