1) Discute y resuelve cuando sea posible utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y-z=10 \\ x-2y+3z=4 \\ -x+y-z=24 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x-y-2z=1 \\ 3x+y+z=18 \\ x+2y+3z=12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=20 \\ x-y+z=10 \\ 2x+y-z=20 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=24 \\ 3x+y+2z=16 \\ 4x+y+z=-8 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ 2x+y-z=2 \\ 4x+5y+5z=14 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+4z=9 \\ x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=20 \\ 2x+y+z=20 \\ 2x-2y=20 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=10 \\ x-y+2z=8 \\ 2x+y+z=13 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=8 \\ x+y+z=4 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z+2t=18 \\ x+y+z=10 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} -x-2y+z-t=4 \\ -2x-y-z+t=2 \\ 3x-y-2z-2t=2 \\ -x-y+2z-t=4 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+2t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \\ -x-y+2z+t=0 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=12 \\ x+2y=8 \end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{r} x+y+z-t=8 \\ x-y-z-t=4 \\ x+y-t=0 \end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x-4y=2 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\}$

r) $\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+2y+4z=5 \\ 3x+4y+z=2 \end{array}\right\}$

2) Utiliza la interpretación matricial de un sistema de ecuaciones lineales para resolver los sistemas a) y c) del ejercicio anterior.

3) Clasifica y resuelve aplicando la regla de Cramer cuando sea posible:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 8 \\ x + y + 2z &= 9 \\ 4x - y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ -3x + 2y &= 10 \\ -5x + 2y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 4x - y - 2z &= -1 \\ 6x - 2y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 13 \\ x - y - z &= 5 \\ -3x + 4y + z &= -14 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 8 \\ -x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$

i) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 3y + 3z &= 7 \\ -x + 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

j) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -x - y &= 1 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$

4) Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas dependientes de un parámetro.

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=K\\ x+y+Kz&=1\\ x+Ky+z&=1\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} Ky+Kz&=0\\ x+z&=0\\ 4x-2y+Kz&=K\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 3x+2y+z&=1\\ x+y+2z&=K\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=K\\ x-y+z&=1\\ x-3y+z&=0\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} Kx-Ky+Kz&=K\\ (3-2K)z&=1\\ x+(K-1)\cdot y&=0\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} (K-3)x+4z&=2\\ x-2z&=-1\\ -x+Ky+2z&=K\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} mx-z&=m\\ 2x+my+z&=1\\ x+3z&=3\end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} mx+z&=m\\ my-z&=-m\\ x+my+z&=1\end{aligned}\right\}$

i) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=K-1\\ 2x+y+Kz&=K\\ x+Ky+z&=1\end{aligned}\right\}$

j) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=K\\ x-y+Kz&=1\\ -x+Ky-z&=0\end{aligned}\right\}$

5) Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas dependientes de un parámetro:

a) $\left.\begin{array}{r} x+ay+(a+1)z=0 \\ x+y=0 \\ x+ay+(a-1)z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} kx+y+kz=0 \\ x+y+kz=0 \\ 2x+(k-1)y+kz=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ ax+y+3z=4 \\ ax+y-7z=4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+3y+kz=0 \\ x+4y+kz=0 \\ 5ky+z=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=3 \\ -3x+my-z=-10 \\ 5x-y+mz=13 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x-2y=1 \\ y+z=a \\ x-3z=-1 \\ y-z=2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ x+y=k^2 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} kx+2y+(k+2)z=k \\ kx+(k-3)y+(2k-3)z=0 \\ (k-2)x+(k-3)y+(k-1)z=k \end{array}\right\}$

6) Discute y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{array}{r} -3x+ay=1 \\ 2x+y=0 \\ ax-2ay=-1 \end{array}\right\}$$

7) Considera el sistema $\left.\begin{array}{l} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{array}\right\}$

a) Discútelo y resuélvelo cuando sea posible

b) Calcula el valor o valores de m para los que el sistema admite la solución $(x,y,z)=(5,6,-4)$

8) Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=a \\ 2x+z=b \\ 4x-y+2z=c \end{array}\right\}$

demuestra que será compatible solo si $c=a+b$

9) Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x-Ky=2 \\ Kx-y=K+1 \end{array}\right\}$

a) Discute y resuelve cuando sea posible.

b) Determina para qué valores de K el sistema tiene una solución en la que $y=2$

10) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m existe A^{-1}.

b) Resuelve si es posible el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ para $m=1$ y $m=-1$.

11) Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha+\beta)z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x - z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\}$

a) Demuestra que siempre tiene solución independientemente del valor de los parámetros α y β

b) ¿Tiene infinitas soluciones para algún valor de α y β?

12) Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 euros. El precio original era de 12€, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento.

13) Dos hermanos deciden invertir 10 000 € cada uno en diferentes productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que le dio un beneficio del 5%, y el resto en un plazo fijo que le reportó un 2% de beneficios. El hermano menor invirtió las mismas cantidades en otros productos que le propiciaron el 4%, 3%, y 7% de beneficios. Si los beneficios del mayor han sido 415 € y los del menor 460 €, determina las cantidades invertidas A, B y C.

14) A primera hora de la mañana en un cajero automático tiene que haber 800 billetes (de 10, 20 y 50 €) con un valor total de 16000 €. Si por cada tres billetes de 50 € hay cuatro de 20 €, ¿cuántos billetes hay de cada tipo?

15) Un trayecto de 200 km se tiene que hacer combinando taxi, tren y autobús. El coste del taxi es de 5 €/km. El del tren de 2 €/km, y el del autobús de 3 €/km. El recorrido nos ha costado 500 €. Halla las distancias recorridas en cada medio sabiendo que hemos hecho el doble de kilómetros

en tren que en taxi y autobús juntos.

16) Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de aparcamiento en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de aparcamiento a la urbanización A son de 2000 €, 4000 € para una plaza en la B y 6000 € para una de la C. Sabiendo que se han vendido el 50% más de plazas de la urbanización A que de la C, calcula el número de plazas vendidas a cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de las plazas de C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por la venta de las plazas en las urbanizaciones A y B.

17) Una ganadera da diariamente a su ganado una mezcla de dos tipos de pienso A y B. Un kilogramo del pienso A proporciona a una cabeza de ganado el 6% de sus necesidades de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilogramo del pienso B contiene el 35% de las proteínas y el 15% de los carbohidratos necesarios. ¿Cuántos kilos diarios de cada pienso se tiene que dar a cada animal para cubrir sus necesidades sin excederse?

18) Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica provee a tres establecimientos A, B y C que conforman la demanda de toda su producción. Una semana determinada, el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntas, y, por otro lado, B solicitó el 20% más que la suma de la mitad de lo que solicitó A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿Cuántas unidades pidió cada establecimiento?

19) Tres hermanos quieren reunir 26 € para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el hermano mediano tiene que poner el doble de lo que pondrá el pequeño, mientras que el mayor tendrá que aportar dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto tiene que poner cada uno?

20) En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados 350 alumnos. El número de matriculados en primero coincide con el número de matriculados en segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más

el doble de los matriculados en primero superan en 250 al quíntuple de los matriculados en tercero. ¿Cuántos alumnos hay matriculados en cada curso?

21) En un taller de confección se han gastado un total de 300 € en telas de tres precios: 6€/m, 9€/m, y 12€/m. En total se han comprado 32 m de tela, y de la tela de 9€/m se ha comprado 1m más que de la más barata. Calcula cuantos metros de la tela de cada precio se ha comprado.

22) Oscar, Beatriz y Ainhoa se comprometen a leer por separado este verano la famosa obra La Colmena, de Camilo José Cela, en función del tiempo de que cada uno dispone, pero leyendo un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Oscar leerá diariamente 3 páginas más que Beatriz, y esta, 9 páginas más que Ainhoa. Óscar terminará de leer la obra un día antes que Beatriz, y ésta, 4 días antes que Ainhoa. ¿Cuál es el número total de páginas que tiene la novela?

23) Yo tengo el doble de edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. La suma del triple de edad que tú tienes con la que yo tendré cuando tu tengas la edad que yo tengo es 280.

¿Qué edad tenemos?

1) Discute y resuelve cuando sea posible utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=10 \\ x-2y+3z=4 \\ -x+y-z=24 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{-F_1+F_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_2+3F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 90 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ n^o \text{ incógnitas} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{ma}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Para obtener la solución, escribimos el sistema equivalente representado por la matriz en su forma escalonada. Así:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=10 \\ -3y+4z=-6 \\ 2z=90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=-7 \\ \longrightarrow y=\frac{4z+6}{3}=62 \\ \longrightarrow z=\frac{90}{2}=45 \end{array}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z)=(-7,62,45)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y-2z=1 \\ 3x+y+z=18 \\ x+2y+3z=12 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-3F_1+F_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 15 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_2+4F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ T$^{\text{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=1 \\ 4y+7z=15 \\ -z=-1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow x=1+y+2z=5 \\ \longrightarrow y=\frac{15-7z}{4}=2 \\ \longrightarrow z=1 \end{array}$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z)=(5,2,1)$$

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=20 \\ x-y+z=10 \\ 2x+y-z=20 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & -3 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 30 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ \text{nº incóg}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ T$^{\text{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=20 \\ y=-10 \\ -3z=30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=20+2y-z=10 \\ \longrightarrow y=-10 \\ \longrightarrow z=-10 \end{array}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z)=(10,-10,-10)$$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=24 \\ 3x+y+2z=16 \\ 4x+y+z=-8 \end{array}\right\} \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 24 \\ 3 & 1 & 2 & 16 \\ 4 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_1+F_3]{-3F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -56 \\ 0 & -3 & -7 & -104 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -56 \\ 0 & 0 & -2 & -40 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=24 \\ -2y-4z=-56 \\ -2z=-40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=-4 \\ \longrightarrow y=-12 \\ z=20 \end{array}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z)=(-4,-12,20)$$

e) $\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ 2x+y-z=2 \\ 4x+5y+5z=14 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_1+F_3]{-2F_1+F_2}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=6 \\ -3y-7z=-10 \end{array}\right\}$ $z=\lambda \Rightarrow 3y+7\lambda=10 \Rightarrow y=\dfrac{10-7\lambda}{3}$

$x=6-2y-3z=6-\dfrac{20}{3}+\dfrac{14\lambda}{3}-3\lambda=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{5}{3}\lambda=\dfrac{-2+5\lambda}{3}$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z)=\left(\frac{-2+5\lambda}{3},\ \frac{10-7\lambda}{3},\ \lambda\right)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+4z=9 \\ x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3+F_1]{-2F_2+F_1}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ \text{nº incóg}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+4z=9 \\ y+2z=3 \end{array}\right\} \rightarrow z=\lambda \Rightarrow y=3-2\lambda$$

$$2x=9-3y-4z=9-3(3-2\lambda)-4\lambda=2\lambda \Rightarrow x=\lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(\lambda, 3-2\lambda, \lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

g) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=20 \\ 2x+y+z=20 \\ 2x-2y=20 \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & -2 & 0 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-2F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & -6 & -2 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

h) $$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=10 \\ x-y+2z=8 \\ 2x+y+z=13 \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T^{\underline{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

i) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 8 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2+F_1]{}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o \text{ incógni} = 3 \end{array}\right\} T^{\underline{ma}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sistema} \\ \text{Compatible} \\ \text{Indeterminado} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 8 \\ -y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = -\lambda$$

$$2x = 8 - y - z = 8 + \lambda - \lambda = 8 \Rightarrow x = 4$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (4, -\lambda, \lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

j) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z + 2t = 18 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2+F_1]{}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o \text{ incógnitas} = 4 \end{array}\right\} T^{\underline{ma}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sistema} \\ \text{Compatible} \\ \text{Indeterminado} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z+2t=18 \\ -y-3z+2t=-2 \end{array}\right\} \quad z=\lambda\ ;\ t=\mu \Rightarrow y=2-3\lambda+2\mu$$

$$\rightarrow 2x = 18-y+z-2t = 18-2+3\lambda-2\mu+\lambda-2\mu = 16+4\lambda-4\mu$$

$$\Rightarrow x = 8+2\lambda-2\mu$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z,t) = (8+2\lambda-2\mu,\ 2-3\lambda+2\mu,\ \lambda,\ \mu)\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

k) $\left.\begin{array}{r} -x-2y+z-t=4 \\ -2x-y-z+t=2 \\ 3x-y-2z-2t=2 \\ -x-y+2z-t=4 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{3F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}]{-2F_1+F_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -7 & 1 & -5 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{7F_2+3F_3 \\ F_2-3F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_4]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 18 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} rg(A)=4 \\ rg(A^*)=4 \\ \text{nº incógnitas}=4 \end{array}\right\} \text{T}^{\underline{\text{MA}}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\left.\begin{array}{r} -x-2y+z-t=4 \\ 3y-3z+3t=-6 \\ -18z+6t=0 \\ -3t=18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=-4 \\ \longrightarrow y=2 \\ \longrightarrow z=-2 \\ \longrightarrow t=-6 \end{array}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z,t)=(-4,2,-2,-6)$$

e) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+2t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \\ -x-y+2z+t=0 \end{array}\right\} \quad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-2F_1+F_3 \\ F_1+F_4}]{-F_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_3+4F_4]{}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} rg(A)=4 \\ rg(A^*)=4 \\ \text{nº incógnitas}=4 \end{array}\right\} \; T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ -2y-2z+t=-1 \\ 4z+t=3 \\ 5t=-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=2 \\ \longrightarrow y=-1 \\ \longrightarrow z=1 \\ \longrightarrow t=-1 \end{array}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x,y,z,t)=(2,-1,1,-1)$$

m) $\left.\begin{array}{l} x+y-z=12 \\ x+2y=8 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ n^o \text{ incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=12 \\ y+z=-4 \end{array}\right\} z=\lambda \Rightarrow y=-4-\lambda$$

$$x=12-y+z=12+4+\lambda+\lambda=16+2\lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(16+2\lambda,-4-\lambda,\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

n) $\left.\begin{array}{l} x+y+z-t=8 \\ x-y-z-t=4 \\ x+y-t=0 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ n^o \text{ incógnitas}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-t=8 \\ -2y-2z=-4 \\ -z=-8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow x-t=6 \begin{array}{l} \nearrow t=\lambda \\ \searrow x=6+\lambda \end{array} \\ \longrightarrow y=-6 \\ \longrightarrow z=8 \end{array}$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z,t)=(6+\lambda,-6,8,\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

o) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x-4y=2 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_2+8F_3]{}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 18 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$$

p) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3+F_1]{-2F_2+F_1}$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Por ser homogéneo, la única solución del sistema es:

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$

9) $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\xrightarrow[3F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ 3y-3z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow x=y-2z=-\lambda$$

$$3y-3z=0 \longrightarrow z=\lambda \Rightarrow y=\lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(-\lambda,\lambda,\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

r) $\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+2y+4z=5 \\ 3x+4y+z=2 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1+F_3 \\ 3F_1+F_4}]{2F_1+F_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 10 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-4F_2+5F_3 \\ -2F_2+F_4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3+F_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=4 \end{array}\right\}$ $T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

2) Utiliza la interpretación matricial de un sistema de ecuaciones lineales para resolver los sistemas a) y c) del ejercicio anterior:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=10 \\ x-2y+3z=4 \\ -x+y-z=24 \end{array}\right\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow$ Como $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[Adj(A) \right]^t$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(A) \right]^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -124 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 62 \\ 45 \end{pmatrix}$$

c) $\left. \begin{aligned} x - 2y + z &= 20 \\ x - y + z &= 10 \\ 2x + y - z &= 20 \end{aligned} \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \Longrightarrow AX = B$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Longrightarrow$$

Como $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[Adj(A)\right]^t$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

3) Clasifica y resuelve aplicando la regla de Cramer cuando sea posible:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 8 \\ x + y + 2z &= 9 \\ 4x - y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Rango (A):

$$|2| = 2 \neq 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \; ; \; \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ T$^{\underline{na}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-92}{-23} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-46}{-23} = 2$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x, y, z) = (1, 4, 2)$$

b) $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -3x+2y=10 \\ -5x+2y+z=10 \end{array}\right\}$ $A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 10 \\ -5 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1|=1\neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq 0$; $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Longrightarrow rg(A)=2$

Rango(A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 10 \\ -5 & 2 & 10 \end{vmatrix}=40\neq 0 \Rightarrow rg(A^{*})=3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^{*})=3 \end{array}\right\}$ T^{ma} ROUCHÉ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible

c) $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ 4x-y-2z=-1 \\ 6x-2y-z=-1 \end{array}\right\}$ $A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|2|=2\neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0$; $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0$

$\Longrightarrow rg(A)=2$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o incóg. = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 1y + z = 0 \\ 4x - 1y - 2z = -1 \end{array}\right\} \quad z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = -\lambda \\ 4x - y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -\lambda \\ 4 & -1 & -1+2\lambda \end{array}\right); \quad det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1+2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\lambda - 1 + 2\lambda}{2} = \frac{-1+3\lambda}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & -1+2\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2 + 4\lambda + 4\lambda}{2} = \frac{-2+8\lambda}{2} = -1 + 4\lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-1+3\lambda}{2}, -1+4\lambda, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota!! → Cuando el sistema sea compatible indeterminado, recurrir a la regla de Cramer generalizada para obtener sus soluciones es demasiado largo. A no ser que el enunciado lo pida expresamente, es mucho mejor obtener las infinitas soluciones escogiendo el parámetro y haciendo reducción en el sistema equivalente.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=13 \\ x-y-z=5 \\ -3x+4y+z=-14 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|2| = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -14 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -14 \end{vmatrix}}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -14 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x, y, z) = (6, 1, 0)$$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 8 \\ -x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x, y, z) = (7, 5, 4)$$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2$

Rango(A^*):

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ \text{nº incóg.} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1} x = 1 \Rightarrow y = 2-x = 1$$

La solución única del sistema es $(x,y) = (1,1)$

g) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=4 \\ x-y-z=-1 \end{array}\right\}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow rg(A^*) = 2 < \text{nº incógnitas} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ}$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=4 \\ x-y-z=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} 2x+y=3 \to \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases}$$

$$z = x-y+1 = \lambda-3+2\lambda+1 = -2+3\lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z) = (\lambda, 3-2\lambda, -2+3\lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

h) $\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow rg(A^*) = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{ma}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\} z=\lambda;\ t=\mu \to \left.\begin{array}{l} x+y=4-\lambda-\mu \\ 2x+y=2+\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1}$$

$$\to x = -2+2\lambda+\mu \Rightarrow y = 2+\lambda-2x = 2+\lambda+4-4\lambda-2\mu = 6-3\lambda-2\mu$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x,y,z,t) = (-2+2\lambda+\mu, 6-3\lambda-2\mu, \lambda, \mu) \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

i) $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x+3y+3z=7 \\ -x+2y+z=1 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\Longrightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ T$^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8}{3}$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x, y, z) = \left(3, \frac{8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

j) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Longrightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o\ incóg. = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{ma}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \end{array}\right\} \quad y = \lambda \Rightarrow x = -1 - \lambda$$

$$z = -x - 2y = 1 + \lambda - 2\lambda = 1 - \lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (-1-\lambda, \lambda, 1-\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4) Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas dependientes de un parámetro.

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = K \\ x + y + Kz = 1 \\ x + Ky + z = 1 \end{array}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K \\ 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & K & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 \end{vmatrix} = -K^2 + 2K - 1$$

$\det(A)=0 \Rightarrow -k^2+2k-1=0 \Rightarrow k=1$ (Doble)

Si $k=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A)=1$

Rango(A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*)=1$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=1 \\ rg(A^*)=1 \\ \text{nº incógnitas} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{ma}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$x+y+z=1 \rightarrow \begin{cases} z=\lambda \\ y=\mu \\ x=1-\lambda-\mu \end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema para $k=1$ vienen dadas por:

$$(x,y,z) = (1-\lambda-\mu, \mu, \lambda) \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Si $k \neq 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+2k-1} = \frac{-k^3+3k-2}{-k^2+2k-1} = \frac{\cancel{-}(k+2)\cancel{(k-1)^2}}{\cancel{-(k-1)^2}} = k+2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+2k-1} = \frac{k^2-2k+1}{-k^2+2k-1} = \frac{(k-1)^2}{-(k-1)^2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+2k-1} = \frac{k^2-2k+1}{-k^2+2k-1} = \frac{(k-1)^2}{-(k-1)^2} = -1$$

La única solución del sistema para $k \neq 1$ es:

$$(x, y, z) = (k+2, -1, -1)$$

b) $\left.\begin{array}{c} ky + kz = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x - 2y + kz = k \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & k & k \end{array}\right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & k \end{vmatrix} = -k^2+2k$$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow -k^2+2k=0 \Rightarrow -k(k-2)=0 \begin{cases} k=0 \\ k=2 \end{cases}$$

Si $K=0 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A*):

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ n^{\circ}\text{ incóg.}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{ma}\text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} x+z=0 \\ 4x-2y=0 \end{array}\right\} \quad z=\lambda \Rightarrow x=-\lambda \longrightarrow y=2x=-2\lambda$$

Las infinitas soluciones para $K=0$ vienen dadas por:

$$(x,y,z) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $K=2 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A*):

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} T^{\underline{MA}}\text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $k \neq 0 \wedge k \neq 2 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 =$

$=$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible

Determinado $\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -2 & k \end{vmatrix}}{-k^2+2k} = \frac{k^{\cancel{2}}}{-\cancel{k}(k-2)} = \frac{-k}{k-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & k & k \end{vmatrix}}{-k^2+2k} = \frac{k^{\cancel{2}}}{-\cancel{k}(k-2)} = \frac{-k}{k-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & k \end{vmatrix}}{-k^2+2k} = \frac{\cancel{-}k^{\cancel{2}}}{\cancel{-k}(k-2)} = \frac{k}{k-2}$$

La única solución para $k \neq 0 \wedge k \neq 2$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-k}{k-2}, \frac{-k}{k-2}, \frac{k}{k-2}\right)$$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y+2z=K \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & K \end{array}\right)$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \ \forall K \in \mathbb{R}$ = nº de incógnitas ⇒ ROUCHÉ ⇒

⇒ Sistema Compatible Determinado ⇒ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ K & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-K+2}{-1} = K-2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & K & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2K-4}{-1} = 4-2K$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & K \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-K+1}{-1} = K-1$$

La única solución del sistema viene dada por:

$$(x, y, z) = (K-2, 4-2K, K-1)$$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=K \\ x-y+z=1 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & K \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2K+4 \Rightarrow -2K+4 = 0 \Rightarrow K = 2$

Si $K=2$ $\Rightarrow rg(A) = 2$; $rg(A^*) = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$ $E_1 - E_2 \rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 1/2$

$\rightarrow x+z = 1+\frac{1}{2} \Rightarrow x+z = \frac{3}{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow z = \lambda \\ \searrow x = \frac{3}{2} - \lambda \end{array}$

Las infinitas soluciones para $K=2$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, \lambda\right)$$

Si $K \neq 2$ $\Rightarrow rg(A) = 2$ y $rg(A^*) = 3 \Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $K = 3/2 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Rango(A)</u>:

$|3/2| = 3/2 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

<u>Rango(A*)</u>:

$$\begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{ma}}\ \text{ROUCHÉ}$$

$\Downarrow$

Sistema Incompatible

Si $K \neq 0 \wedge K \neq 3/2 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$

$=$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} K & -K & K \\ 1 & 0 & 3-2K \\ 0 & K-1 & 0 \end{vmatrix}}{K^2 \cdot (2K-3)} = \frac{2K^3 - 4K^2 + 2K}{K^2 \cdot (2K-3)} = \frac{2\cancel{K}(K-1)^2}{K^{\cancel{2}} \cdot (2K-3)} = \frac{2(K-1)^2}{K(2K-3)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} K & K & K \\ 0 & 1 & 3-2K \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{K^2 \cdot (2K-3)} = \frac{-2K^2 + 2K}{K^2 \cdot (2K-3)} = \frac{-2\cancel{K}(K-1)}{K^{\cancel{2}} \cdot (2K-3)} = \frac{-2(K-1)}{K(2K-3)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} K & -K & K \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & K-1 & 0 \end{vmatrix}}{K^2 \cdot (2K-3)} = \frac{-\cancel{K^2}}{\cancel{K^2}(2K-3)} = \frac{-1}{2K-3}$$

La única solución para $K \neq 0 \wedge K \neq 3/2$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2(K-1)^2}{K(2K-3)}, \frac{-2(K-1)}{K(2K-3)}, \frac{-1}{2K-3} \right)$$

f) $\left.\begin{array}{r} (K-3)x + 4z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ -x + Ky + 2z = K \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} K-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & K & 2 & K \end{array} \right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} K-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & K & 2 \end{vmatrix} = -K \cdot \begin{vmatrix} K-3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -K \cdot (-2K+2) = 2K(K-1)$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow 2K(K-1) = 0 \begin{cases} 2K = 0 \rightarrow K = 0 \\ K-1 = 0 \rightarrow K = 1 \end{cases}$$

Si $K = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Rango(A):

$|-3| = -3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango(A*):

$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $k=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|-2| = -2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

Rango(A*):

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*)=2$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ \text{nº incógnitas}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} -2x+4z=2 \\ -x+y+2z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=\lambda \longrightarrow x = \dfrac{-2+4\lambda}{2} = -1+2\lambda \\ \longrightarrow y = 1+x-2z = 1-1+2\lambda-2\lambda = 0 \end{array}$$

Las infinitas soluciones para $k=1$ vienen dadas por:

$$(x,y,z) = (-1+2\lambda, 0, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $k \neq 0 \wedge k \neq 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ k & k & 2 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{0}{2k(k-1)} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k-3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{2k^2-4k+2}{2k(k-1)} = \frac{\cancel{2}(k-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}k\cancel{(k-1)}} = \frac{k-1}{k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k-3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & k \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{k^2-k}{2k(k-1)} = \frac{\cancel{k}\cancel{(k-1)}}{2\cancel{k}\cancel{(k-1)}} = \frac{1}{2}$$

La única solución para $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ viene dada por:

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{k-1}{k}, \frac{1}{2}\right)$$

g) $\left.\begin{array}{r} mx - z = m \\ 2x + my + z = 1 \\ x + 3z = 3 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & -1 & m \\ 2 & m & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + m = m(3m+1)$$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow m(3m+1) = 0 \begin{cases} \rightarrow m = 0 \\ \rightarrow 3m+1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Si $m = 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|2| = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango(A^*):

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\begin{matrix} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{matrix}\right\} T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = -1/3 \Rightarrow det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & -1 & -1/3 \\ 2 & -1/3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|-1/3| = -1/3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Rango(A^*):

$$\begin{vmatrix} -1/3 & 0 & -1/3 \\ 2 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{2}{9} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\begin{matrix} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{matrix}\right\} T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m \neq 0 \wedge m \neq -1/3 \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{m(3m+1)} = \frac{3m^2+3m}{m(3m+1)} = \frac{\cancel{m}(3m+3)}{\cancel{m}(3m+1)} = \frac{3m+3}{3m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{m(3m+1)} = \frac{-5m-5}{m(3m+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{m(3m+1)} = \frac{2m^{\cancel{2}}}{\cancel{m}(3m+1)} = \frac{2m}{3m+1}$$

La única solución para $m \neq 0 \wedge m \neq -1/3$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3m+3}{3m+1}, \frac{-5m-5}{m(3m+1)}, \frac{2m}{3m+1} \right)$$

h) $\left.\begin{array}{l} mx + z = m \\ my - z = -m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & m \\ 0 & m & -1 & -m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m = m(2m-1)$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow m(2m-1) = 0 \begin{cases} \rightarrow m = 0 \\ \rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1/2 \end{cases}$$

Si $m = 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o \text{ incóg.} = 3 \end{array}\right\} T^{ma} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} -z = 0 \rightarrow z = 0 \\ x + z = 1 \rightarrow x = 1 - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema para $m=0$ son las dadas por:

$$(x, y, z) = (1, \lambda, 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $m = 1/2$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$$|1/2| = 1/2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{ma} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m \neq 0 \wedge m \neq 1/2 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ T$^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ -m & m & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(2m-1)} = \frac{m^2-m}{m(2m-1)} = \frac{\cancel{m}(m-1)}{\cancel{m}(2m-1)} = \frac{m-1}{2m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 0 & -m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m(2m-1)} = \frac{-m^2+m}{m(2m-1)} = \frac{\cancel{m}(-m+1)}{\cancel{m}(2m-1)} = \frac{1-m}{2m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & -m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(2m-1)} = \frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{m}(2m-1)} = \frac{m^2}{2m-1}$$

La única solución para $m \neq 0 \wedge m \neq \frac{1}{2}$ es la dada por:

$$x, y, z = \left(\frac{m-1}{2m-1}, \frac{1-m}{2m-1}, \frac{m^2}{2m-1}\right)$$

i) $$\left.\begin{aligned} x+y+z &= K-1 \\ 2x+y+Kz &= K \\ x+Ky+z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K-1 \\ 2 & 1 & K & K \\ 1 & K & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & K \\ 1 & K & 1 \end{vmatrix} = -K^2+3K-2$$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow -K^2+3K-2=0 \begin{cases} K=2 \\ K=1 \end{cases}$$

Si $K=2 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

Rango(A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*)=2$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ n^o\ incóg=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{ma}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{-2E_1+E_2} -y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x+z=1 \begin{cases} z=\lambda \\ x=1-\lambda \end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema para $K=2$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (1-\lambda, 0, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $k=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

Rango (A*):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ T^{MA} ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $k \neq 2 \wedge k \neq 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 = n^o$ incógnitas

$\Rightarrow$ T^{MA} ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+3k-2} = \frac{-k^3+2k^2+k-2}{-(k-2)(k-1)} = \frac{\cancel{-}(k+1)\cancel{(k-2)}\cancel{(k-1)}}{\cancel{-}\cancel{(k-2)}\cancel{(k-1)}} = k+1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+3k-2} = \frac{k^2-4k+4}{-k^2+3k-2} = \frac{(k-2)^{\cancel{2}}}{-\cancel{(k-2)}(k-1)} = \frac{k-2}{1-k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2+3k-2} = \frac{k^2-2k}{-k^2+3k-2} = \frac{k\cancel{(k-2)}}{-\cancel{(k-2)}(k-1)} = \frac{k}{1-k}$$

La única solución del sistema para $K \neq 2 \wedge K \neq 1$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(K+1, \frac{K-2}{1-K}, \frac{K}{1-K}\right)$$

j) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=K \\ x-y+Kz=1 \\ -x+Ky-z=0 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K \\ 1 & -1 & K & 1 \\ -1 & K & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & K \\ -1 & K & -1 \end{vmatrix} = -K^2+1 \text{ ; } \det(A) = 0 \Rightarrow -K^2+1 = 0 \begin{cases} K=-1 \\ K=+1 \end{cases}$$

Si $K=-1$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{ma}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $K=1$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango(A^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $K \neq -1 \wedge K \neq 1$ $\Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & -1 & K \\ 0 & K & -1 \end{vmatrix}}{-K^2+1} = \frac{-K^3+2K+1}{-K^2+1} = \frac{\cancel{(K+1)}(-K^2+K+1)}{-\cancel{(K+1)}(K-1)} = \frac{-K^2+K+1}{1-K}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-K^2+1} = \frac{-K^2+K}{-K^2+1} = \frac{\cancel{-}K\cancel{(K-1)}}{\cancel{-}(K+1)\cancel{(K-1)}} = \frac{K}{K+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & K \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & K & 0 \end{vmatrix}}{-K^2+1} = \frac{K^2-2K-1}{-K^2+1}$$

La única solución del sistema para $K \neq -1 \wedge K \neq 1$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-K^2+K+1}{1-K}, \frac{K}{K+1}, \frac{K^2-2K-1}{-K^2+1} \right)$$

5) Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas dependientes de un parámetro:

a) $\left.\begin{aligned} x+ay+(a+1)z&=0\\ x+y&=0\\ x+ay+(a-1)z&=0 \end{aligned}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a+1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & a & a-1 & 0 \end{array}\right)$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & a+1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 2a-2$; $\det(A)=0 \Rightarrow 2a-2=0$
$a=1$

Si $a=1$ $\Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Rango(A):
$|1| = 1 \neq 0$
$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A)=2 \Rightarrow rg(A^*)=2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ T$^{\underline{MA}}$ ROUCHE $\Rightarrow$

Homogéneo $\Rightarrow rg(A)=rg(A^*)$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ x+y&=0 \end{aligned}\right\}$ $E_1 - E_2 \rightarrow 2z=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x+y=0$ $\begin{cases} y=\lambda\\ x=-\lambda \end{cases}$

Las infinitas soluciones para $a=1$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, 0) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $a \neq 1$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 = n^o$ de incógnitas $\Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Por ser homogéneo $\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$

b) $\left.\begin{array}{c} Kx + y + Kz = 0 \\ x + y + Kz = 0 \\ 2x + (K-1)y + Kz = 0 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & K & 0 \\ 1 & 1 & K & 0 \\ 2 & K-1 & K & 0 \end{array}\right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} K & 1 & K \\ 1 & 1 & K \\ 2 & K-1 & K \end{vmatrix} = K \cdot \begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & K-1 & 1 \end{vmatrix} = K \cdot (-K^2 + 3K - 2)$$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow K \cdot (-K^2 + 3K - 2) = 0 \begin{cases} K = 0 \\ -K^2 + 3K - 2 = 0 \begin{cases} K = 1 \\ K = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Si $K = 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Longrightarrow rg(A^*) = 2 < n^o$ de incógnitas $\Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

Homogéneo $\Rightarrow rg(A) = rg(A^*)$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\} y=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow z=\lambda$$

Las infinitas soluciones para $K=0$ vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(0,0,\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Si $K=1$ $\Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|1|=1\neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

$\Rightarrow rg(A)=2 \xrightarrow[\text{Homogéneo}]{} rg(A^*)=2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ T^{MA} ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x\quad +z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow y=-x-z=-\lambda+2\lambda=\lambda \\ \rightarrow x=\lambda \Rightarrow z=-2\lambda \end{array}$$

Las infinitas soluciones para $K=1$ vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(\lambda,\lambda,-2\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Si $K=2$ $\Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|2|=2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \underset{\text{Homogéneo}}{\Longrightarrow} rg(A^*) = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1-E_2} x=0\ ;\ y+2z=0 \rightarrow \begin{cases} z=\lambda \\ y=-2\lambda \end{cases}$$

Las infinitas soluciones para $K=2$ vienen dadas por:

$$(x,y,z) = (0, -2\lambda, \lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $K \neq 0 \wedge K \neq 1 \wedge K \neq 2 \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Por ser homogéneo $\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ ax+y+3z=4 \\ ax+y-7z=4 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 3 & 4 \\ a & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)$

$$det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 3 & 4 \\ a & 1 & -7 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}}{\overset{F_1+F_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ a-1 & 0 & 2 & 3 \\ a-1 & 0 & -8 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ a-1 & 2 & 3 \\ a-1 & -8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ a-4 & 2 & 0 \\ a-4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ a-4 & -8 \end{vmatrix} = -3(a-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} =$$

$-F_1+F_2$
$-F_1+F_3$

$$= 30(a-4)$$

$\det(A^*) = 0 \longrightarrow 30(a-4) = 0 \Rightarrow a-4 = 0 \Rightarrow a = 4$

Si $a = 4 \Rightarrow \det(A^*) = 0 \Rightarrow rg(A^*) < 4$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

$\Longrightarrow rg(A) = 3 \underset{rg(A^*)<4}{\Longrightarrow} rg(A^*) = 3 = n^o$ incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango y haremos Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) ; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = 1 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = 0 \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-6} = 0$$

La única solución del sistema para $a=4$ es la dada por:

$$(x,y,z) = (1,0,0)$$

Si $a \neq 4 \Rightarrow \det(A^*) \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 4$. Como $rg_{máx}(A) = 3$ se tendrá $rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

d) $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2x + 3y + kz = 0 \\ x + 4y + kz = 0 \\ 5ky + z = 0 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & k & 0 \\ 1 & 4 & k & 0 \\ 0 & 5k & 1 & 0 \end{array}\right)$

Rango (A):

$|1| = 1 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix} = 0$;

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{vmatrix} = -5k^2+5 \Rightarrow -5k^2+5 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \begin{cases} k=-1 \\ k=1 \end{cases}$$

Si $K=-1$ $\Rightarrow rg(A)=2 \xRightarrow[\text{Homogéneo}]{} rg(A^*)=2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow y=\lambda \Rightarrow x=\lambda \\ \longrightarrow z=2x+3y=5\lambda \end{array}$$

Las infinitas soluciones para $K=-1$ vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(\lambda,\lambda,5\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Si $K=1$ $\Rightarrow rg(A)=2 \xRightarrow[\text{Homogéneo}]{} rg(A^*)=2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow y=\lambda \Rightarrow x=\lambda \\ \longrightarrow z=-2x-3y=-5\lambda \end{array}$$

Las infinitas soluciones para $K=1$ vienen dadas por:

$$(x,y,z)=(\lambda,\lambda,-5\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Si $K\neq-1 \wedge K\neq 1$ $\Rightarrow rg(A)=3 \xRightarrow[\text{Homogéneo}]{} rg(A^*)=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. La solución única será $(x,y,z)=(0,0,0)$ al tratarse de un sistema homogéneo.

e) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=3 \\ -3x+my-z=-10 \\ 5x-y+mz=13 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 3 \\ -3 & m & -1 & -10 \\ 5 & -1 & m & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 3 \\ -3 & m & -1 & -10 \\ 5 & -1 & m & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{cccc} & & -C_2+C_3 & -C_2+C_4 \\ \end{array}\begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ -3 & m & -1-m & -10-3m \\ 5 & -1 & m+1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ -3 & -1-m & -10-3m \\ 5 & m+1 & 16 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} -1-m & -10-3m \\ m+1 & 16 \end{vmatrix} \underset{F_1+F_2}{=} m \cdot \begin{vmatrix} -1-m & -10-3m \\ 0 & 6-3m \end{vmatrix} =$$

$$= m \cdot (-1-m)(6-3m) = -m(m+1)(6-3m) = 3m(m+1)(m-2)$$

$$\det(A^*) = 0 \Rightarrow -m(m+1)(6-3m) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

Si $m=0 \Rightarrow \det(A^*) = 0 \Rightarrow rg(A^*) < 4$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|-3| = -3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

$\Longrightarrow rg(A)=3 \xRightarrow[rg(A^*)<4]{} rg(A^*)=3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ T^{MA} ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango y haremos Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} y+z=3 \\ -3x \quad -z=-10 \\ 5x-y \quad =13 \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & 0 & 13 \end{array}\right) ; \det(A)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & -1 \\ 13 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-6}{-2}=3 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & -10 & -1 \\ 5 & 13 & 0 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -10 \\ 5 & -1 & 13 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

La única solución del sistema para $m=0$ es la dada por: $(x,y,z)=(3,2,1)$

Si $m=-1$ $\Rightarrow \det(A^*)=0 \Rightarrow rg(A^*)<4$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|-1|=-1\neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg(A)=2$$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & 13 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como $rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $m = 2$ $\Rightarrow det(A^*) = 0 \Rightarrow rg(A^*) < 4$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|2| = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \underset{rg(A^*)<4}{\Longrightarrow} rg(A^*) = 3 = n^o$ incógnitas $\Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango y haremos Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ -3x + 2y - z &= -10 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) ; \; det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -10 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = 0 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

La solución única del sistema para $m=2$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{-7}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

Si $m \neq 0 \wedge m \neq -1 \wedge m \neq 2 \Rightarrow \det(A^*) \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 4$. Como $rg_{máx}(A) = 3$ se tendrá $rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

f) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{-F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= a - 14$; $\det(A^*) = 0 \Rightarrow a - 14 = 0 \Rightarrow a = 14$

Si $a \neq 14 \Rightarrow \det(A^*) \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 4$. Como $rg_{máx}(A) = 3$ se tendrá $rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $a=14 \Rightarrow \det(A^*)=0 \Rightarrow rg(A^*)<4$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|1|=1\neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

$\Rightarrow rg(A)=3 \xRightarrow[rg(A^*)<4]{} rg(A^*)=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango y haremos Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ y+z=14 \\ x-3z=-1 \end{array}\right\} \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) ; \quad \det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-5$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 14 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-85}{-5}=17 \; ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-40}{-5}=8$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-30}{-5}=6$$

La única solución del sistema para $a=14$ es la dada por:

$$(x,y,z)=(17,8,6)$$

g) $\left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ x+y=K^2 \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & K^2 \end{array}\right)$

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & K^2 \end{vmatrix} = -5K^2+10$$

$$\det(A^*)=0 \Rightarrow -5K^2+10=0 \Rightarrow K^2=2 \begin{array}{l} \nearrow K=-\sqrt{2} \\ \searrow K=\sqrt{2} \end{array}$$

Si $K=-\sqrt{2} \vee K=\sqrt{2} \Rightarrow \det(A^*)=0 \Rightarrow rg(A^*)<3$

$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

$\Rightarrow rg(A)=2 \xRightarrow[rg(A^*)<3]{} rg(A^*)=2 = n^o$ incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\times 2} \end{array} \left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 4x-2y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} 5x=5 \Rightarrow x=1$$

$$y = 2x-1 = 2-1 = 1$$

La única solución del sistema para $K=-\sqrt{2}$ o $K=\sqrt{2}$ es la dada por $(x,y)=(1,1)$

Si $K \neq -\sqrt{2} \wedge K \neq \sqrt{2} \Rightarrow \det(A^*) \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$. Como $rg_{máx}(A) = 2$ se tendría $rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

h) $\left.\begin{array}{l} Kx + 2y + (K+2)z = K \\ Kx + (K-3)y + (2K-3)z = 0 \\ (K-2)x + (K-3)y + (K-1)z = K \end{array}\right\}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} K & 2 & K+2 & K \\ K & K-3 & 2K-3 & 0 \\ K-2 & K-3 & K-1 & K \end{array}\right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} K & 2 & K+2 \\ K & K-3 & 2K-3 \\ K-2 & K-3 & K-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_2+F_3}}{=} \begin{vmatrix} K & 2 & K+2 \\ 0 & K-5 & K-5 \\ -2 & 0 & 2-K \end{vmatrix} \overset{-C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} K & 2 & K \\ 0 & K-5 & 0 \\ -2 & 0 & 2-K \end{vmatrix} =$$

$$= (K-5) \cdot \begin{vmatrix} K & K \\ -2 & 2-K \end{vmatrix} = (K-5) \cdot (2K - K^2 + 2K) = (K-5) \cdot (-K^2 + 4K) =$$

$$= -K \cdot (K-5) \cdot (K-4)$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow -K \cdot (K-5)(K-4) = 0 \begin{cases} K = 0 \\ K = 5 \\ K = 4 \end{cases}$$

Si $K = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Homogéneo!!

Rango (A):

$|-2| = -2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \xrightarrow[\text{Homogéneo}]{} rg(A^*) = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ $T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{matrix} -3y - 3z = 0 \\ -2x - 3y - z = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-E_2 + E_1} 2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ x = \lambda \end{cases}$$

$$3y = -3z \Rightarrow y = -z = -\lambda$$

Las infinitas soluciones para $k = 0$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (\lambda, -\lambda, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $k = 5$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

Rango A:

$$|5| = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Rango (A^*):

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\begin{matrix} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Si $K=4 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|4| = 4 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$

Rango (A^*):

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $K \neq 0 \wedge K \neq 5 \wedge K \neq 4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3$

$=$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} K & 2 & K+2 \\ 0 & K-3 & 2K-3 \\ K & K-3 & K-1 \end{vmatrix}}{-K\cdot(K-5)(K-4)} = \frac{-2K^3+10K^2-6K}{-K(K-5)(K-4)} = \frac{-2\cancel{K}(K^2-5K+3)}{-\cancel{K}(K-5)(K-4)} = \frac{2(K^2-5K+3)}{(K-5)(K-4)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} K & K & K+2 \\ K & 0 & 2K-3 \\ K-2 & K & K-1 \end{vmatrix}}{-K(K-5)(K-4)} = \frac{-K^2+6K}{-K(K-5)(K-4)} = \frac{\cancel{-K}(K-6)}{\cancel{-K}(K-5)(K-4)} = \frac{K-6}{(K-5)(K-4)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} K & 2 & K \\ K & K-3 & 0 \\ K-2 & K-3 & K \end{vmatrix}}{-K(K-5)(K-4)} = \frac{K^3-3K^2-6K}{-K(K-5)(K-4)} = \frac{\cancel{K}(K^2-3K-6)}{-\cancel{K}(K-5)(K-4)} = \frac{K^2-3K-6}{(5-K)(K-4)}$$

La solución única del sistema cuando es $K \neq 0$, $K \neq 5$ y $K \neq 4$ es la dada por:

$$x, y, z = \left(\frac{2(K^2-5K+3)}{(K-5)(K-4)}, \frac{K-6}{(K-5)(K-4)}, \frac{K^2-3K-6}{(5-K)(K-4)} \right)$$

6) Discute y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones dado por $\left.\begin{array}{r} -3x+ay=1 \\ 2x+y=0 \\ ax-2ay=-1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} -3x+ay=1 \\ 2x+y=0 \\ ax-2ay=-1 \end{array}\right\} A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{array}\right); \det(A^*) = \begin{vmatrix} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{vmatrix} = -3a+3$$

$$\det(A^*) = 0 \longrightarrow -3a+3=0 \Rightarrow a=1$$

Si $a=1$ $\Rightarrow \det(A^*)=0 \Rightarrow rg(A^*) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|-3| = -3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \underset{rg(A^*)<3}{\Longrightarrow} rg(A^*) = 2 =$ nº incógnitas $\Rightarrow T^{\underline{ma}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} -3x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1-E_2} -5x=1 \Rightarrow x=\frac{-1}{5} \Rightarrow y=-2x=\frac{2}{5}$$

La solución única para $a=1$ es $(x,y)=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

Si $a\neq 1 \Rightarrow \det(A^*)\neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=3$. Como $rg_{máx}(A)=2$ se tendrá $rg(A)<rg(A^*) \Rightarrow T^{MA}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

7) Considera el sistema $\left.\begin{array}{r} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{array}\right\}$

a) Discútelo y resuélvelo cuando sea posible

b) Calcula el valor o valores de "m" para los que el sistema admite la solución $(x,y,z)=(5,6,-4)$

$$\left.\begin{array}{r} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix}=m^2-4$$

$$\det(A)=0 \longrightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m^2=4 \begin{cases} \nearrow m=-2 \\ \searrow m=2 \end{cases}$$

Si $m=-2$ $\Rightarrow det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|-2| = -2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango(A*):

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{ma}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Si $m=2$ $\Rightarrow det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|2| = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A*):

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(A^*)=2 \\ n^o incog=3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{ma}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$\left.\begin{array}{l} 2x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+2z=2 \end{array}\right\}$ $E_1-E_2 \rightarrow z=-2$

$2x+2y=6 \rightarrow x+y=3$ $\rightarrow y=\lambda$; $x=3-\lambda$

Las infinitas soluciones para $m=2$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (3-\lambda, \lambda, -2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $m \neq -2 \wedge m \neq 2 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 =$ $=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ T$^{\text{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{-3m^2+16m-20}{m^2-4} = \frac{-3(m-10/3)\cancel{(m-2)}}{(m+2)\cancel{(m-2)}} = \frac{10-3m}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{-2m^2+16m-24}{m^2-4} = \frac{-2(m-6)\cancel{(m-2)}}{(m+2)\cancel{(m-2)}} = \frac{-2m+12}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{m^3-4m^2-4m+16}{m^2-4} = \frac{(m-4)\cancel{(m-2)}\cancel{(m+2)}}{\cancel{(m-2)}\cancel{(m+2)}} = m-4$$

La única solución del sistema para $m \neq -2$ y $m \neq 2$ es la dada por:

$$(x, y, z) = \left(\frac{10-3m}{m+2}, \frac{-2m+12}{m+2}, m-4\right)$$

b) El sistema solamente puede admitir como solución a $(x,y,z)=(5,6,-4)$ en el caso de $m\neq -2 \wedge m\neq 2$. Así:

$$\left(\frac{10-3m}{m+2}, \frac{-2m+12}{m+2}, m-4\right)=(5,6,-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{10-3m}{m+2}=5 \\ \dfrac{-2m+12}{m+2}=6 \\ m-4=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10-3m=5m+10 \rightarrow 8m=0 \rightarrow m=0 \\ -2m+12=6m+12 \rightarrow 8m=0 \rightarrow m=0 \\ m=0 \end{array} \Bigg\} \; m=0$$

El valor pedido es $m=0$

8) Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=a \\ 2x+z=b \\ 4x-y+2z=c \end{array}\right\}$ demuestra que será compatible solo si $c=a+b$

Antes que nada, recuerda que un sistema es compatible solo si $rg(A)=rg(A^*)$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=a \\ 2x+z=b \\ 4x-y+2z=c \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$$

Rango(A):

$$|2| = 2 \neq 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \; ; \; \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Para que el sistema sea compatible, $rg(A^*)$ tendrá que ser también $rg(A^*) = 2$. Eso sucederá cuando:

$$rg(A^*) = 2 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4b - 2a + 2b + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 2a + 2b \Rightarrow c = a + b$$

El $rg(A^*)$ será $rg(A^*) = 2$ (y por tanto, el sistema compatible) cuando se verifique $c = a + b$

9) Dado el sistema de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x - Ky = 2 \\ Kx - y = K+1 \end{array} \right\}$

a) Discute y resuelve cuando sea posible

b) Determina para qué valores de K el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} x - Ky = 2 \\ Kx - y = K+1 \end{array} \right\} A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -K & 2 \\ K & -1 & K+1 \end{array} \right) ; \; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -K \\ K & -1 \end{vmatrix} = K^2 - 1$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow K^2 - 1 = 0 \begin{cases} K = -1 \\ K = +1 \end{cases}$$

Si $K = -1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Rango(A):</u>

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

<u>Rango(A*):</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 1 \\ rg(A^*) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $K = 1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

<u>Rango(A):</u>

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

<u>Rango(A*):</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 1 \\ rg(A^*) = 1 \\ \text{nº incógnitas} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$x - y = 2 \begin{cases} y = \lambda \\ x = 2 + \lambda \end{cases}$$

Las infinitas soluciones para $k = 1$ vienen dadas por:

$$(x, y) = (2 + \lambda, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $K \neq -1 \wedge K \neq 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow rg(A^*) = 2 =$

$=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ T$^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -K \\ K+1 & 1 \end{vmatrix}}{K^2-1} = \frac{K^2+K+2}{K^2-1} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ K & K+1 \end{vmatrix}}{K^2-1} = \frac{-K+1}{(K+1)(K-1)} = \frac{-1}{K+1}$$

La única solución del sistema para $K \neq -1$ y $K \neq 1$ es:

$$(x, y) = \left(\frac{K^2+K+2}{K^2-1}, \frac{-1}{K+1} \right)$$

b) Hemos visto que:

$\longrightarrow$ Si $K = 1 \Rightarrow (x, y) = (2+\lambda, \lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Si $K \neq -1 \wedge K \neq 1 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{K^2+K+2}{K^2-1}, \frac{-1}{K+1} \right)$

Buscamos una solución en la que $y = 2$. Así:

$\boxed{\text{Si } K = 1}$

$y = 2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow (x, y) = (4, 2)$

$\boxed{\text{Si } K \neq -1 \wedge K \neq 1}$

$y = 2 \Rightarrow \frac{-1}{K+1} = 2 \Rightarrow \boxed{K = \frac{-3}{2}} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{11}{5}, 2 \right)$

Los valores de K pedidos son $K = 1 \wedge K = \frac{-3}{2}$

10) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m existe A^{-1}

b) Resuelve si es posible el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ para $m = 1$ y $m = -1$

a) Existirá A^{-1} cuando sea $\det(A) \neq 0$. Así:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_2+F_3}}{=} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 \cdot (m+1)$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow (m-1)^2 \cdot (m+1) = 0 \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ m+1 = 0 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \ \forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

b) Si $m = 1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$|1| = 1 \neq 0$;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

$$\left.\begin{array}{r} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ \text{nº incóg.} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}} \text{ ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}\right\} \longrightarrow z = \frac{8-3y}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = \lambda$$

Las infinitas soluciones del sistema para $m = 1$ vienen dadas por:

$$(x, y, z) = (\lambda, 2, 1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $m = -1$ $\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|-2| = -2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A^*):

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

$$\left.\begin{array}{r} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow T^{\underline{MA}}\ \text{ROUCHÉ} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$$

11) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha+\beta) z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x - z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\}$$

a) Demuestra que siempre tiene solución independientemente del valor de los parámetros α y β

b) ¿Tiene infinitas soluciones para algún valor de α y β?

$$\left.\begin{array}{l} x-y+(\alpha+\beta)z=\alpha \\ x+z=\beta \\ x-z=\alpha-3\beta \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha+\beta & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & -1 & \alpha-3\beta \end{array}\right)$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2$$

Como ves, $\det(A)=-2$ independientemente de los valores de α y β. Por tanto, al ser $\det(A)\neq 0 \ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, será siempre $rg(A)=3$. Esto implica que $rg(A^*)=3$ lo que a su vez, por el teorema de Rouché, implica que el sistema será siempre compatible determinado independientemente de los valores que tomen α y β.

b) Al ser siempre compatible determinado, no existen valores de α y β que hagan que el sistema tenga infinitas soluciones.

12) Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 euros. El precio original era de 12€ pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias

defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento.

	Unidades	Ingresos (€)
Copias en buen estado →	x	$12x$
Defectuosas: Copias al 30% →	y	$0'7 \cdot 12y = 8'4y$
Defectuosas: Copias al 40% →	z	$0'6 \cdot 12z = 7'2z$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 12x+8'4y+7'2z=6384 \\ y+z=\frac{1}{2}x \end{array}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8'4 & 7'2 & 6384 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 8'4 & 7'2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3'6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ n^o \text{ incógni}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado.} \Downarrow \text{Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 6384 & 8'4 & 7'2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3'6} = \frac{1440}{3'6} = 400$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8'4 & 6384 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{3'6} = \frac{288}{3'6} = 80$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 12 & 6384 & 7'2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{3'6} = \frac{432}{3'6} = 120$$

Se aplicó el 30% de descuento a 120 copias.

13) Dos hermanos deciden invertir 10000 € cada uno en diferentes productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que le dio un beneficio del 5%, y el resto en un plazo fijo que le reportó un 2% de beneficios. El hermano menor invirtió las mismas cantidades en otros productos que le propiciaron el 4%, 3%, y 7% de beneficios. Si los beneficios del mayor han sido 415 € y los del menor 460 €, determina las cantidades invertidas A, B y C

	Cantidad (€)	Beneficios Mayor (€)	Beneficios Menor (€)
Inversión A →	x	$0'06x$	$0'04x$
Inversión B →	y	$0'05y$	$0'03y$
Inversión C →	z	$0'02z$	$0'07z$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10000 \\ 0'06x+0'05y+0'02z=415 \\ 0'04x+0'03y+0'07z=460 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{\times 100} \\ \xrightarrow{\times 100} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y+z=10000 \\ 6x+5y+2z=41500 \\ 4x+3y+7z=46000 \end{array}\right\}$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 2 & 41500 \\ 4 & 3 & 7 & 46000 \end{array}\right); \quad \det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}=-7\neq 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10000 & 1 & 1 \\ 41500 & 5 & 2 \\ 46000 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14000}{-7} = 2000\,€$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10000 & 1 \\ 6 & 41500 & 2 \\ 4 & 46000 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-31500}{-7} = 4500\,€$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 41500 \\ 4 & 3 & 46000 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-24500}{-7} = 3500\,€$$

14) A primera hora de la mañana en un cajero automático tiene que haber 800 billetes (de 10, 20, y 50€) con un valor total de 16000 €. Si por cada tres billetes de 50€ hay cuatro de 20€, ¿cuántos billetes hay de cada tipo?

	Unidades	Dinero (€)
Billetes de 10 ⟶	x	$10x$
Billetes de 20 ⟶	y	$20y$
Billetes de 50 ⟶	z	$50z$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ \dfrac{z}{y}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ -3y+4z=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 10 & 20 & 50 & 16000 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) ; \ \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 50 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 800 & 1 & 1 \\ 16000 & 20 & 50 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{160} = \frac{72000}{160} = 450 \text{ billetes de } 10€$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 800 & 1 \\ 10 & 16000 & 50 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{160} = \frac{32000}{160} = 200 \text{ billetes de } 20€$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 800 \\ 10 & 20 & 16000 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{160} = \frac{24000}{160} = 150 \text{ billetes de } 50€$$

15) Un trayecto de 200 Km se tiene que hacer combinando taxi tren y autobús. El coste del taxi es de 5 €/km. El del tren de 2€/Km. y el del autobús de 3€/Km. El recorrido nos ha costado 500€. Halla las distancias recorridas en cada medio sabiendo que hemos hecho el doble de kilómetros en tren que en taxi y autobus juntos.

	Km	Coste(€)
Taxi →	x	$5x$
Tren →	y	$2y$
Autobús →	z	$3z$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 200 \\ 5x+2y+3z &= 500 \\ y &= 2(x+z) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 200 \\ 5x+2y+3z &= 500 \\ 2x-y+2z &= 0 \end{aligned}\right\} A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 3 & 500 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right); \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$\Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 500 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-100}{-6} = \frac{50}{3} \text{ Km}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 500 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-300}{-6} = 50 \text{Km}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 5 & 500 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-800}{-6} = \frac{400}{3} \text{ Km}$$

16) Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de aparcamiento en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de aparcamiento en la urbanización A son de 2000€, 4000€ para una plaza en la B y 6000€ para una de la C. Sabiendo que se han vendido el 50% más de plazas de la urbanización A que de la C, calcula el número de plazas vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de las plazas de C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por la venta de las plazas en las urbanizaciones A y B.

	Plazas vendidas	Ganancias (€)
Urbanización A	$\longrightarrow x$	$2000x$
Urbanización B	$\longrightarrow y$	$4000y$
Urbanización C	$\longrightarrow z$	$6000z$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=65 \\ x = z+\frac{50}{100}\cdot z \\ 6000z = 2000x+4000y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} x+y+z=65 \\ x-1'5z=0 \\ 2x+4y-6z=0 \end{array}\right\} A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 1 & 0 & -1'5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1'5 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 \\ \Downarrow \\ \text{Sistema Compatible Determinado} \end{array}\right.$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 65 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1\text{'}5 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}}{13} = \frac{390}{13} = 30 \text{ plazas vendidas en A}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 65 & 1 \\ 1 & 0 & -1\text{'}5 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{13} = \frac{195}{13} = 15 \text{ plazas vendidas en B}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 65 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{260}{13} = 20 \text{ plazas vendidas en C}$$

17) Una ganadera da diariamente a su ganado una mezcla de dos tipos de pienso A y B. Un kilogramo del pienso A proporciona a una cabeza de ganado el 6 % de sus necesidades de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilogramo del pienso B contiene el 35% de las proteínas y el 15% de los carbohidratos necesarios. ¿Cuántos kilos diarios de cada pienso se tiene que dar a cada animal para cubrir sus necesidades sin excederse?

	Kg	Proteinas(%)	Carbohidratos
Pienso A →	x	6x	14x
Pienso B →	y	35y	15y

$$\left.\begin{array}{l} 6x+35y=100 \\ 14x+15y=100 \end{array}\right\} \quad A^* = \begin{pmatrix} 6 & 35 & \vdots & 100 \\ 14 & 15 & \vdots & 100 \end{pmatrix} ; \det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 35 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} = -400$$

$rg(A)=2 \Rightarrow rg(A^*)=2 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 35 \\ 100 & 15 \end{vmatrix}}{-400} = \frac{-2000}{-400} = 5 \text{ Kg de pienso A}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 100 \\ 14 & 100 \end{vmatrix}}{-400} = \frac{-800}{-400} = 2 \text{ Kg de pienso B}$$

18) Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica provee a tres tiendas A, B y C que conforman la demanda de toda su producción. Una semana determinada, el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntas, y, por otro lado, B solicitó el 20% más que la suma de la mitad de lo que solicitó A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿Cuántas unidades pidió cada establecimiento?

Unidades

Establecimiento A $\longrightarrow x$

Establecimiento B $\longrightarrow y$

Establecimiento C $\longrightarrow z$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 42 \\ x &= y+z \\ y &= 1'2\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{3}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0'6 & -1 & 0'4 & 0 \end{array}\right) ; \ \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0'6 & -1 & 0'4 \end{vmatrix} = -2'8 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0'4 \end{vmatrix}}{-2'8} = \frac{-58'8}{-2'8} = 21$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 42 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0'6 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2'8} = \frac{-16'8}{-2'8} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 42 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0'6 & 0 & 0'4 \end{vmatrix}}{-2'8} = \frac{-42}{-2'8} = 15$$

19) Tres hermanos quieren reunir 26 € para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el hermano mediano tiene que poner el doble de lo que pondrá el pequeño, mientras que el mayor tendrá que aportar dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto tiene que poner cada uno?

Aportación (€)

Hermano Mayor ⟶ x

Hermano Mediano ⟶ y

Hermano Menor ⟶ z

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=26 \\ y=2z \\ x=\frac{2}{3}y \end{array}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) ; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-104}{-13} = 8€$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 26 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-78}{-13} = 6€$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-156}{-13} = 12€$$

20) En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados 350 alumnos. El número de matriculados en primero coincide con el número de matriculados en segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los matriculados en primero superan en 250 al quíntuple de los matriculados en tercero. ¿Cuántos

alumnos hay matriculados en cada curso?

	Alumnos
Matriculados en 1º →	x
Matriculados en 2º →	y
Matriculados en 3º →	z

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ y+2x=5z+250 \end{array}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 350 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 250 \end{array}\right) ; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 350 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 250 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{11} = \frac{2200}{11} = 200 \text{ alumnos en } 1^{\circ}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 350 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 250 & -5 \end{vmatrix}}{11} = \frac{1100}{11} = 100 \text{ alumnos en } 2^{\circ}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 250 \end{vmatrix}}{11} = \frac{550}{11} = 50 \text{ alumnos en } 3^{\circ}$$

21) En un taller de confección se han gastado un total de 300€ en telas de tres precios: 6€/m, 9€/m, y 12€/m. En total

se han comprado 32m de tela, y de la tela de 9€/m se ha comprado 1m más que de la más barata. Calcula cuántos metros de tela de cada precio se ha comprado.

	metros	Gasto(€)
Tela de 6€/m ⟶	x	$6x$
Tela de 9€/m ⟶	y	$9y$
Tela de 12€/m ⟶	z	$12z$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=32 \\ 6x+9y+12z=300 \\ y=x+1 \end{array}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 6 & 9 & 12 & 300 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) ; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 12 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow rg(A^*)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 32 & 1 & 1 \\ 300 & 9 & 12 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-81}{-9} = 9 \text{ metros de la tela de } 6€/m$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 32 & 1 \\ 6 & 300 & 12 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-90}{-9} = 10 \text{ metros de la tela de } 9€/m$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 32 \\ 6 & 9 & 300 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-117}{-9} = 13 \text{ metros de la tela de } 12€/m$$

22) Oscar, Beatriz y Ainhoa se comprometen a leer por separado este verano la famosa obra La Colmena, de Camilo José Cela, en función del tiempo de que cada uno dispone, pero leyendo un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Óscar leerá diariamente 3 páginas más que Beatriz, y ésta, 9 páginas más que Ainhoa. Óscar terminará de leer la obra un día antes que Beatriz, y ésta, 4 días antes que Ainhoa. ¿Cuál es el número total de páginas que tiene la novela?

	Páginas al día	Días que lee	Páginas totales
Óscar $\longrightarrow$	x	$t-1$	$x\cdot(t-1)$
Beatriz $\longrightarrow$	y	t	$y\cdot t$
Ainhoa $\longrightarrow$	z	$t+4$	$z\cdot(t+4)$

$$\left.\begin{array}{l} x = y+3 \\ y = z+9 \\ x\cdot(t-1) = y\cdot t = z\cdot(t+4) \end{array}\right\}$$

$$(y+3)(t-1) = y\cdot t$$

$$\cancel{yt} - y + 3t - 3 = \cancel{y\cdot t} \Rightarrow y = 3t-3$$

$$(z+9)\,t = z\,(t+4)$$

$$\cancel{zt} + 9t = \cancel{zt} + 4z \Rightarrow 9t = 4z$$

Ahora ya podemos escribir un sistema de ecuaciones LINEALES:

$$\left.\begin{array}{l} x = y+3 \\ y = z+9 \\ y = 3t-3 \\ 9t = 4z \end{array}\right\} A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 48 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg(A) = 4 \\ rg(A^*) = 4 \\ \text{nº incógnitas} = 4 \end{array}\right\} \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Escribimos el sistema ESCALONADO:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \longrightarrow x = 3+45 = 48 \text{ páginas/día} \\ y - z = 9 \longrightarrow y = 9+36 = 45 \text{ páginas/día} \\ z - 3t = -12 \longrightarrow z = 36 \text{ páginas/día} \\ 3t = 48 \longrightarrow t = 16 \text{ días} \end{array}\right.$$

Las páginas totales por tanto:

$$y \cdot t = 45 \text{ páginas}/\cancel{\text{día}} \times 16 \cancel{\text{días}} = 720 \text{ páginas.}$$

23) Yo tengo el doble de edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. La suma del triple de edad que tú tienes con la que yo tendré cuando tú tengas la edad que yo tengo es 280. ¿Qué edad tenemos?

PÁGINA 83

	Hoy	Cuando yo tenía tu edad	Cuando tú tengas mi edad
Mi edad $\longrightarrow$	x	$x-(x-y)=y$	$x+(x-y)=2x-y$
Tu edad $\longrightarrow$	y	$y-(x-y)=2y-x$	$y+(x-y)=x$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2(2y-x) \\ 3y+2x-y &= 280 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3x-4y &= 0 \\ 2x+2y &= 280 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow \\ &(\times 2) \rightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} 3x-4y &= 0 \\ 4x+4y &= 560 \end{aligned}\right\}$$

$$E_1+E_2 \longrightarrow 7x = 560 \Rightarrow x = 80 \text{ años}$$

$$3x-4y=0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x = 60 \text{ años}$$