……………………………………………………………………………………………………

1º.- Encontrar un punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x+3$ en el que la tangente a ella sea paralela a la secante a la curva que pasa por $x=1$ y por $x=4$

Solución:

La secante debe pasar por los puntos $(1, f(1))=(1,0)$ y $(4, f(4))=(4,3)$; en el intervalo $[1,4]$ la función es continua y además derivable en $(1,4)$, luego cumple las condiciones para que se pueda aplicar el Teorema de Lagrange.

Sea c el punto buscado, entonces:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{3-0}{4-1}=1$$

De donde $f'(c)=2c-4=1 \Rightarrow c=\frac{5}{2}$, ; es decir el punto $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right)$

Podemos encontrar también dicho punto teniendo en cuenta que la secante tiene la misma pendiente que la tangente:

La recta secante que pasa por $(1,0)$ y $(4,3)$ es :

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-0}{3-0} \Rightarrow x-1=y \Rightarrow \textit{pendiente } m=1=f'(c)$$

2º.- Encuentra los puntos de máximo y mínimo, así como las distintas zonas de concavidad y el punto de inflexión ,de la función $f(x)=ar\cos x$.

Solución:

La expresión $f(x)=ar\cos x$ representa una infinidad del funciones ya que todos los ángulos $f(x)+2k\pi$ tienen el mismo coseno

$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ **;** derivada que no se anula nunca, y siempre es negativa, por lo que se trata de una función decreciente limitada entre $x\in[-1,1]$, pues el coseno de un ángulo no puede tomar otros valores; por ello en $x=-1$ hay un máximo que será $(-1, ar\cos(-1))=(-1,\pi)$ y un mínimo $(1, ar\cos(1))=(1,0)$. Con propiedad, dado que la función coseno es función periódica de periodo 2π, los puntos singulares de máximo serán $(-1,-\pi+2k\pi)$ y los de mínimo $(1,2k\pi)$, en los que $k=0,1,2,\cdots$, para cada una de las infinitas funciones

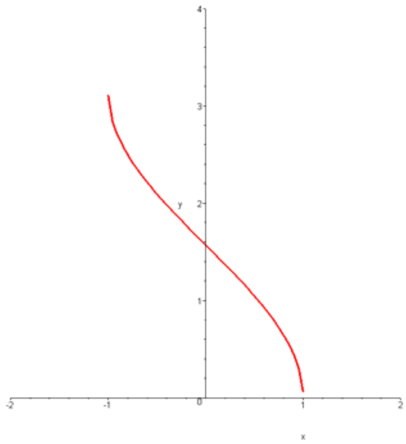
Para estudiar su concavidad, volvemos a derivar:

$$f''(x)=\frac{-x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$$

Que se anula para $x=0$;

$$\text{para} \begin{cases} x \in (-1,0) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad posotiva } \cup \\ x \in (1,0) \quad \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad negativa } \cap \end{cases}$$

luego en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ó, mejor dicho, en $\left(0, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ hay punto de inflexión como podemos ver en la gráfica



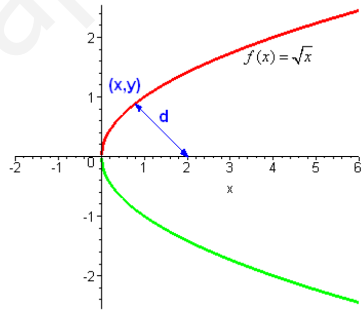
3º.- Encontrar la mínima distancia del punto $(2,0)$ a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Solución:

La expresión $f(x) = \sqrt{x}$, en realidad responde a dos funciones simétricas $f_1(x) = +\sqrt{x}$ y $f_2(x) = -\sqrt{x}$; luego las distancias desde el punto a cada una de las ramas son iguales; por lo que hacemos el cálculo sobre una de las ramas.

Sea (x, y) un punto genérico de la gráfica:

$$d_{(x,y),(2,0)} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x} =$$
$$= d = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$



De donde :

$d' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$ que se nula para $x = \dfrac{3}{2}$; dado que estamos calculando la distancia a la rama superior, la raíz del denominador siempre es positiva, luego el signo de a derivada dependerá del numerador:

....

si $\begin{cases} x \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow d' < 0 \Rightarrow d \text{ es decreciente} \\ x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow d' > 0 \Rightarrow d \text{ es creciente} \end{cases}$, luego en $x = \dfrac{3}{2}$ hay un mínimo; y la distancia mínima buscada será $d = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right) + 4} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ uni. de long.