1º.-Dada la función $f(x)=\ln x$ en el intervalo $[1,e]$, siendo $e=2,718281...$

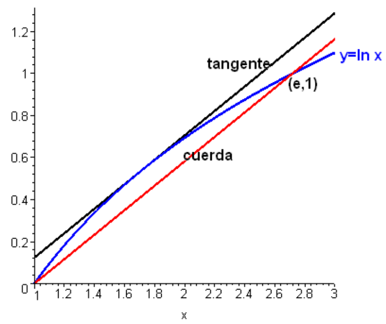
a) Razonar que existe un punto P de la gráfica $y=\ln x$ en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A=(1,0)$ y $B=(e,1)$

b) Obtener el punto P del apartado anterior

c) Calcular la pendiente de la recta tangente a $y=\ln x$ en el punto P

Solución.

a) Dado que $f(x)=\ln x$ es continua en el intervalo $[1,e]$, hay un punto en la gráfica cuya tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A y B, como fácilmente se ve en el siguiente gráfico



b)

La pendiente de la cuerda es $\frac{1-0}{e-1}$ que ha de ser igual a la pendiente de la tangente a la gráfica de la función ,es decir $f'(x)=\frac{1}{x}$, o sea:

$$\frac{1}{e-1}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=e-1$$

luego el punto buscado es $(e-1,\ln(e-1))\approx(1,72;0,54)$

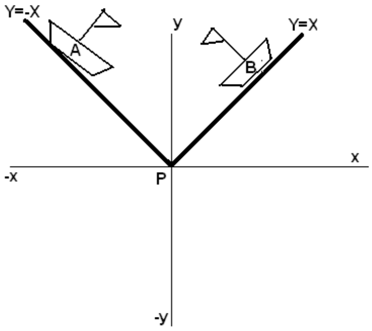
c) La pendiente de la recta tangente será

$$f'(e-1)=\frac{1}{e-1}\cong 0,58$$

……………………………………………………………………………………………

2º.-El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y=-x$ e $y=x$. Dos lanchas motoras ,A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P a $30\ km/h$ y la lancha B se dirige a ese mismo punto P con velocidad de $60\ km/h$. Si consideramos despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas, se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician el recorrido
b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas entre sí.



Solución:

a)

La lancha A se desplaza hacia el punto P a $30\ km/h$, luego en un tiempo t habrá recorrido $30t$, por lo que estará a $20-30t\ \ km$ del punto P, mientras que la lancha B estará a $15-60t\ km$ del punto P.

Como los dos canales son perpendiculares, la distancia ,d ,entre las dos lanchas es la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

$$d\ =\sqrt{(20-30t)^2+(15-60t^2)}=\sqrt{4500t^2-3000t+625}$$

b)

$$d'=\frac{9000t-3000}{2\sqrt{4500t^2-3000t+625}}$$ que se anula para $t=\dfrac{1}{3}$,

dicha función es decreciente para $t<\dfrac{1}{3}$ y creciente para $t>\dfrac{1}{3}$, como es fácil ver observando el signo de la derivada en dichos intervalos; luego $\dfrac{1}{3}$ horas del momento de la partida se obtiene la mínima distancia entre ambas lanchas; y esta distancias será:

$$d\left(\frac{1}{3}\right)\ =\sqrt{4500\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-3000\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+625}=5\sqrt{5}\cong 11{,}18\ Km$$

3º.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ encontrar:

a) Las zonas de crecimiento y decrecimiento
b) Las distintas zonas de concavidad(concavidad positiva)y convexidad(concavidad negativa)
c) Los máximos y mínimos relativos
d) Los puntos de inflexión
e) Las asíntotas

Solución:

a) La función no existe para $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$ que se anula para $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{cases}$

- para $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente
- para $x\in(-\sqrt{3},-1)\rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x\in(-1,0)\rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x\in(0,1)\rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x\in(-1,\sqrt{3})\rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x\in(\sqrt{3},\infty)\rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente

b)

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}$$ que se anula para $x=0$, luego

- para $x\in(-\infty,-1)\rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f(x)$ tiene concavidad negativa
- para $x\in(-1,0)\rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva
- para $x\in(0,1)\rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva
- para $x\in(1,\infty)\rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva

c)

A la vista de los resultados del punto **a)** podemos afirmar que en $x=-\sqrt{3}$ hay un máximo y en $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo

d)

A la vista de los resultados del punto **b)** podemos afirmar que en $x=0$ hay un punto de inflexión

e)

-Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, luego no hay asíntotas horizontales

....

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty$$

Luego $x=-1$ y $x=1$ son dos asíntotas verticales

- **Asíntotas oblicuas:**

Serán de la forma $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

Luego $y=x$ es la asíntota oblicua