**Bloque 1 (Algebra Lineal)** (*Puntuación máxima 3 puntos*)

**Opción 1.-** Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de ***m***, el rango de A

b) Para ***m* = -1**, calcula la matriz ***X*** que verifica ***X* · A + A = 2*I***, siendo ***I*** *l*a matriz unidad de orden 3.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 0 & m \\ -1 & m+1 \end{vmatrix} = m \cdot m = m^2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3$$

$Si\ m = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A) = 2$$

$b)$

$$XA = 2I - A \Rightarrow XAA^{-1} = (2I - A)\,A^{-1} \Rightarrow XI = 2IA^{-1} - AA^{-1} \Rightarrow X = 2A^{-1} - I$$

$$Si\ m = -1 \Rightarrow |A| = (-1)^2 = 1 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Opción 2.-**
a) Discute, según los valores del parámetro ***m***, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + my + mz = m \\ mx + my = 4m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso ***m* = 1**.

*a*)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & m \\ 0 & m & m \end{vmatrix} = 0 \ \ (\textit{Dos filas iguales}) \Rightarrow \textit{No puede ser Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m & m & 4m \end{array}\right) \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$$\forall m \in \Re - \{1\} \Rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A) = 3 \Rightarrow \textit{Sistema Incompatible}$$

$$\textit{Si } m=1 \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 < \textit{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

*b*) *Si* $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow y+z=4 \Rightarrow y = 4-z \Rightarrow x+4-z+z=1 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow$$

$$\textit{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-3, 4-\lambda, \lambda)$$

## Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

**Opción 1.-** a) Calcula ***m*** para que los puntos ***A*(2 , 1 , -2)**, ***B*(1 , 1 , 1)** y ***C*(0 , 1 , *m*)** estén alineados.
b) Calcula el punto simétrico del punto ***P*(-2 , 0 , 0)** respecto de la recta que pasa por los puntos ***A*(2 , 1 , -2)** y ***B*(1 , 1 , 1)**.

a) Si los puntos **A**, **B** y **C** están alineados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (2,1,-2) = (-1,0,3) \\ \overrightarrow{AB} = (0,1,m) - (2,1,-2) = (-2,0,m+2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{m+2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{m+2} \Rightarrow m+2=6 \Rightarrow m=4$$

**Continuación de la Opción 1 del Bloque 2**

b) Desde el punto **P** hallamos un vector **PR**, siendo **R** el punto genérico de la recta **r** determinada por **A** y **B**, que es perpendicular al vector director **AB**, hallado en el apartado anterior, de esa recta y, por ello, su producto escalar es nulo. El punto **R** es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-1\,,\,0\,,\,3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\,,\,0\,,\,3) \\ \overrightarrow{PR} = (1-\lambda\,,\,1\,,\,1+3\lambda) - (2\,,\,0\,,\,0) = (-1-\lambda\,,\,1\,,\,1+3\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (-1\,,\,0\,,\,3)\cdot(-1-\lambda\,,\,1\,,\,1+3\lambda) = 0 \Rightarrow 1+\lambda+3+9\lambda = 0 \Rightarrow 4+10\lambda = 0$$

$$10\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \Rightarrow R\begin{cases} x = 1-\left(-\frac{2}{5}\right) \\ y = 1 \\ z = 1+3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{7}{5}\,,\,1\,,\,-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{7}{5} = \frac{2+x_{P'}}{2} \Rightarrow 10+5x_{P'} = 14 \Rightarrow 5x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{5} \\ 1 = \frac{0+y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ -\frac{1}{5} = \frac{0+z_{P'}}{2} \Rightarrow 5z_{P'} = -2 \Rightarrow z_{P'} = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{4}{5}\,,\,2\,,\,-\frac{2}{5}\right)$$

**Opción 2.-** Dadas las rectas $r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$ ; $s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$;

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación de plano que contiene a la recta ***r*** y es paralelo a la recta ***s***.

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = \mu \\ y = 1-\mu \\ z = 2-3\mu \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1+\lambda \\ 1-\mu = 3+2\lambda \\ 2-3\mu = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu-\lambda = 1 \\ \mu+2\lambda = -2 \\ 3\mu+\lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+6+1-6+2+1 = 6 \neq 0$$

$$Es\ un\ sistema\ incompatible \Rightarrow No\ son\ secantes, ni\ coincidentes$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,\,-1\,,\,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,\,2\,,\,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow No\ son\ paralelas \Rightarrow Son\ rectas\ que\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

**Continuación de la Opción 2 del Bloque 2**

b) El plano $\pi$ queda determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el vector **RG**, siendo **R** un punto cualquiera de la recta **r** (tomamos el indicado en su ecuación) y **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$R(0\,,1\,,2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,-1\,,-3)\equiv(-1\,,1\,,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{RG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,1\,,2)=(x\,,y-1\,,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$x+3\,(y-1)-2\,(z-2)-(z-2)-6x+(y-1)=0\Rightarrow -5x+4\,(y-1)-3\,(z-2)=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv 5x-4y+3z-2=0$$

## Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

**Opción 1.-** a) Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x sen\ x-x}{2x^2+x^4}$

.

b) Calcula los vértices y el área de un rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base este sobre el eje OX y los vértices del lado opuesto estén sobre la parábola ***y = - x²* + 12**.

c) Enunciad el teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)=\int_0^x\left[2+\cos\left(t^2\right)\right]dt$, en el punto de abscisa x = 0.

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x sen\ x-x}{2x^2+x^4}=\frac{e^0 sen\ 0-0}{2\cdot 0^2+0^4}=\frac{1\cdot 0-0}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x sen\ x+e^x\cos\ x-1}{4x+4x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(sen\ x+\cos\ x)-1}{4x+4x^3}=\frac{e^0(sen\ 0+\cos\ 0)-1}{4\cdot 0+4\cdot 0^3}=\frac{1\cdot(\ 0+1)-1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(sen\ x+\cos\ x)+e^x(\cos\ x-sen\ x)}{4+12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(sen\ x+\cos\ x+\cos\ x-sen\ x)}{4+12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos\ x}{4+12x^2}=$$

$$=\frac{2e^0\cos\ 0}{4+12\cdot 0^2}=\frac{2\cdot 1\cdot 1}{4+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

**Continuación de la Opción 1 del Bloque 3**

b) Siendo la base **x** que ira desde el punto $\left(-\frac{x}{2}\,,\,0\right)$ hasta el punto $\left(\frac{x}{2}\,,\,0\right)$ y la altura la correspondiente en esos puntos

$$\begin{cases} h = y\left(-\frac{x}{2}\right) = -\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 12 = -\frac{x^2}{4} + 12 = \frac{48 - x^2}{4} \\ h = y\left(\frac{x}{2}\right) = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12 = -\frac{x^2}{4} + 12 = \frac{48 - x^2}{4} \end{cases}$$

$$A = xh = x\frac{48 - x^2}{4} = \frac{48x - x^3}{4} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}\cdot\left(48 - 3x^2\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(16 - x^2\right) \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\left(16 - x^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{3}{4}\cdot(-2x) = -\frac{3}{2}x$$

$$\begin{cases} A''(-4) = -\frac{3}{2}\cdot(-4) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo \\ A''(4) = -\frac{3}{2}\cdot 4 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo \end{cases} \Rightarrow Vértices \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{4}{2}\,,\,0\right) = (-2\,,\,0) \\ (2\,,\,0) \\ \left(-2\,,\,\frac{48 - 4^2}{4}\right) = (-2\,,\,8) \\ (2\,,\,8) \end{cases}$$

c) Si **f(x)** es continua en **[a , b]**, la función $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ , con $t \in [a\,,\,b]$, recibe el nombre de función integral de **f(x)** en **[a , b]**, de ello se determina el

__Teorema fundamental del cálculo integral__

Si f(x) es continua en **[a , b]**, entonces la función integral es derivable y cumple que:
$F'(t) = f(x)\,,\ \forall t \in [a\,,\,b]$

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x \left[2 + \cos\left(t^2\right)\right]dt \Rightarrow F(0) = \int_0^0 \left[2 + \cos\left(t^2\right)\right]dt = 0 \\ F'(x) = 2 + \cos\left(t^2\right) \Rightarrow F'(0) = 2 + \cos\left(0^2\right) = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 3\,(x - 0) \Rightarrow y = 3x$$

**Opción 2.-** a) Enunciad el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de **$f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$** corta al eje OX en algún punto del intervalo **(1 , 2)?**

b) Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -\sqrt{2} \end{cases}$ ¿Es $g(x)$ continua en $x = -\sqrt{2}$ ?¿Y derivable en $x = -\sqrt{2}$ ?

c) Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de **$g(x)$** y **$h(x) = |x|$ .**

a)

**Teorema de Bolzano**

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

La función **es continua** en el intervalo **[1 , 2]**, y sus valores en los extremos del intervalo son:

$$\begin{cases} f(1) = 1^5 + 2 \cdot 1^4 - 4 = 1 + 2 - 4 = -1 < 0 \\ f(1) = 2^5 + 2 \cdot 2^4 - 4 = 32 + 32 - 4 = 60 > 0 \end{cases}$$ siendo de distinto signo

**[sign f(1) $\neq$ sign f(2)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (1\ , 2)$ tal que **f(c) = 0**

$b)$

$$\begin{cases} g(-\sqrt{2}) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} g(x) = -(-\sqrt{2})^2 + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow g(-\sqrt{2}) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} g(x) = 0 \Rightarrow$$

$Es\ \ función\ continua\ en\ x = -\sqrt{2}$

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -\sqrt{2} \\ -2x & si \quad x > -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} g'(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} g'(x) = 2\,(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} g'(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} g'(x) = -2\sqrt{2}$$

$La\ \ función\ no\ es\ derivable\ en\ x = -\sqrt{2}$

**Continuación de la Opción 2 del Bloque 3**

$c)$

$$\begin{cases} g(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x \le -\sqrt{2} \\ -x^2+2 & si \quad x > -\sqrt{2} \end{cases} \\ x>0 \Rightarrow h(x)=\begin{cases} -x & si \quad x \le 0 \\ x & si \quad x>0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow Punt\ de\ corte\ entre\ funciones \begin{cases} -x^2+2=-x \Rightarrow \left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right) \\ -x^2+2=x \Rightarrow (0\ ,\ \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9\ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3}{2}=2\notin\left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right) \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1\in\left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right) \end{cases} \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9\ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1\in(0\ ,\ \infty) \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-2\in(0\ ,\ \infty) \end{cases} \end{cases}$$

$$0\in(-1\,,1)\Rightarrow \begin{cases} g(0)=-0^2+2=2>0 \\ h(0)=0 \end{cases} \Rightarrow g(x)>h(x)$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2\right)dx-\int_{-1}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+2\right)dx-\int_{0}^{1}x\,dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2+x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+2-x\right)dx$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}+2\cdot[x]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{0}^{1}+2\cdot[x]_{0}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{1}$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]+2\cdot[0-(-1)]+\frac{1}{2}\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+2\cdot(1-0)-\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)$$

$$A=-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2\cdot-\frac{1}{2}=4-\frac{2}{3}-1=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\,u^2$$