

**Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Puntuación máxima 3 puntos)****Opción 1**

a) Sean  $F_1, F_2, F_3$  las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada  $M$  de orden 3, con  $\det(M) = -2$ . Calcula el valor del determinante de la matriz que ten por filas  $F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3$ .

b) Dada a matriz  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla dos matrices  $X$  e  $Y$  que verifican  $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$

siendo  $C^t$  la matriz traspuesta de  $C$ .

a) Llamando  $N$  a la matriz con las filas dadas en el problema

$$\begin{aligned} \det(N) = |N| &= \begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \\ &= 0 + 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = (-2) + (-2) = -4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases} \Rightarrow 2X = C + C^t \Rightarrow X = \frac{1}{2}(C + C^t) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y^{-1} = C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = (Y^{-1})^{-1} \Rightarrow |Y^{-1}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (Y^{-1})^{-1} \Rightarrow (Y^{-1})^{-1} = \frac{1}{|Y^{-1}|} \cdot [\text{adj}(Y^{-1})^t] \Rightarrow$$

$$(Y^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(Y^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = (Y^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Opción 2.-** a) Discute, según los valores del parámetro  $m$ , el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, en el caso  $m = 2$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 3 & 1-m & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)(1-m) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (m-2)(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si  $m = 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

*Sistema Incompatible*

Si  $m = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Núm. de incógnitas}$$

*Sistema Compatible Indeterminado*

b)

Si  $m = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5y + 3z = 0 \Rightarrow 3z = -5y \Rightarrow z = -\frac{5}{3}y \Rightarrow x - 2y - \frac{5}{3}y = 1 \Rightarrow x = \frac{11}{3}y$$

$$\text{Solución } (x, y, z) = \left( \frac{11}{3}\lambda, \lambda, -\frac{5}{3}\lambda \right) = (11\lambda, 3\lambda, -5\lambda)$$

**Bloque 2 (Geometría)** (Puntuación máxima 3 puntos)

**Opción 1.-** a) Los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$  y  $C(-1, 0, 1)$  son vértices consecutivos de un paralelogramo  $ABCD$ . Calcula las coordenadas del vértice  $D$  y el área del paralelogramo.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto  $B(0, 1, 1)$  y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos  $A(1, 1, 0)$  y  $C(-1, 0, 1)$ .

a) El punto medio  $P$  de  $AC$  es el mismo que el de  $BD$ , conocido  $B$  hallaremos el punto buscado

$$\begin{cases} x_p = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \\ y_p = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ z_p = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{0+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1+y_D}{2} \Rightarrow 2(1+y_D) = 2 \Rightarrow 1+y_D = 1 \Rightarrow y_D = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1+z_D}{2} \Rightarrow 2(1+z_D) = 2 \Rightarrow 1+z_D = 1 \Rightarrow z_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0, 0, 0)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores  $BA$  y  $BC$

$$A = \left| \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} \right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (-1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} - \vec{i} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1, 1, -1) \Rightarrow A = \left| \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} u^2$$

b) El vector  $AC$ , que es perpendicular al plano  $\pi$  buscado, es el vector director de dicho plano que es perpendicular, a su vez, al vector  $BG$ , siendo  $G$  el punto generador del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (-2, -1, 1) \equiv (2, 1, -1) \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \\ \overrightarrow{BG} = (x, y, z) - (0, 1, 1) = (x, y-1, z-1) \end{cases}$$

$$(2, 1, -1) \cdot (x, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow 2x + (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z = 0$$

**Opción 2.-** Dadas las rectas  $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$  y  $s : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ ;

- a) Estudia su posición relativa.  
b) Calcula la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si la solución del sistema planteado es compatible determinado se cortan en un punto, son secantes; si el sistema es compatible indeterminado las rectas son coincidentes

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -2 + 2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \mu \\ 2 + \lambda = -1 + 2\mu \\ 2 + 2\lambda = -2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \lambda = -1 + 2 \cdot 1 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 2 + 2\lambda = -2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Comp. Determin.}$$

Tiene solución única  $\Rightarrow$  Son secantes  $\Rightarrow$  Punto de corte  $\Rightarrow P \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + (-1) \\ z = 2 + 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow P(1, 1, 0)$

b) El plano  $\pi$  queda determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el vector **PG**, siendo G el punto genérico del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 2) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 0) = (x-1, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(x-1) + 2(y-1) - z - 4(x-1) = 0 \Rightarrow -2(x-1) + 2(y-1) - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + z = 0$$

**Bloque 3 (Análisis)** (Puntuación máxima 4 puntos)

**Opción 1.-** a) Dada la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  calcula **a** para que **f(x)** sea continua en **x = 2**.

Para el valor obtenido de **a**, ¿es **f(x)** derivable en **x = 2**?

b) Dada  $g(x) = ax^4 + bx + c$ , calcula los valores de **a**, **b** y **c** para que **g(x)** tenga en el punto **(1, -1)** un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de **g(x)**, en **x = 0**, sea paralela a la recta **y = 4x**.

c) Enunciad el teorema fundamental del cálculo integral. Dada la función  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ , ¿tiene **F(x)**

puntos de inflexión? Justifica la respuesta.

a)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a \cdot 2^2 + 1 = 4a + 1 \\ f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = e^{2-2} + 2 = e^0 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 4a + 1 = 3 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} x & \text{si } x < 2 \\ (-1)e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -e^{2-2} = -e^0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -1$$

No es derivable para  $x = 2$

b)

$$f'(x) = 4ax^3 + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \Rightarrow a(-1)^4 + b(-1) + c = -1 \Rightarrow a - b + c = -1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 4a \cdot 1^3 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \Rightarrow 4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1 \\ f'(0) = 4 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + b = 4 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow -1 - 4 + c = -1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 4x + 4$$

c)

Si **f(x)** es continua en **[a, b]**, la función  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ , con  $t \in [a, b]$ , recibe el nombre de función integral de **f(x)** en **[a, b]**, de ello se determina el

**Teorema fundamental del cálculo integral**

Si **f(x)** es continua en **[a, b]**, entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t) = f(x), \forall t \in [a, b]$$

$$F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \text{Es una función continua y derivable}$$

$$F''(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow F'''(x) = -2(1e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2})$$

$$F'''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \Rightarrow F'''(0) = -2e^{-0^2}(1 - 2 \cdot 0^2) = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión en } x = 0$$

**Opción 2.-** a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Dada  $f(x) = x^3 - 9x$ , calcula para  $f(x)$ : puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

c) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje OX y la curva  $y = x^3 - 9x$ .

a)

**Teorema de Rolle**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y que verifica que  $f(a) = f(b)$ ; entonces existe, al menos, un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$

La **interpretación geométrica** de este teorema es que si el origen y el extremo de una curva continua y derivable tienen la misma ordenada, entonces, en al menos un punto, la tangente a la curva en dicho punto (o puntos) es paralela al eje OX.

b)

Punto de corte con el eje OY  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con el eje OX  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 9 \cdot x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \\ x = 3 \Rightarrow (3, 0) \end{cases}$

$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \Rightarrow$  Creciente  $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > -\sqrt{3} \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\infty$
<b>3 &gt; 0</b>	(+)	(+)	(+)	(+)
<b><math>x &gt; -\sqrt{3}</math></b>	(-)	(+)	(+)	(+)
<b><math>x &gt; \sqrt{3}</math></b>	(-)	(-)	(+)	(+)
<b>Solución</b>	(+)	(-)	(+)	(+)

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -\sqrt{3}) \cup (x > \sqrt{3})$

**Decrecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

**Máximo relativo en**  $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^4 - 9(-\sqrt{3}) = 9 + 9\sqrt{3} = 9(1 + \sqrt{3})$

**Máximo relativo en**  $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^4 - 9(-\sqrt{3}) = 9 + 9\sqrt{3} = 9(1 + \sqrt{3})$

$f''(x) = 6x \Rightarrow$  Concavidad  $\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases}$

**Concavidad**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$

**Convexidad**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

**Punto de inflexión en**  $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 9 \cdot 0 = 0$

c)

$$\text{Punto de corte con el eje } OX \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \\ x = 3 \Rightarrow (3, 0) \end{cases}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a } OY \Rightarrow$$

$$x = 1 \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1 = -8 < 0$$

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 9x) dx \right| = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 9x) dx = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^{\sqrt{3}} + 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^{\sqrt{3}}$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3^4} - 0^4) + 9 \cdot (\sqrt{3^2} - 0^2) = -\frac{9}{2} + 9 \cdot 3 = \frac{54 - 9}{2} = \frac{45}{2} u^2$$