Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2021

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considera les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

(a) Calcula'n els determinants: det(A), det(B). (2 punts)

(b) Calcula la matriu producte B · A, la matriu transposada $(B\cdot A)^t$. (3 punts)

(c) Perqué es compleixi la relació A · X = B · A, quantes files i columnes ha de tenir la matriu X? (2 punts)

(d) Calcula la matriu X que satisfá la relació (3 punts)

$$A\cdot X=B\cdot A$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diáriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diáriament.

(a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diáriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:

(i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)

(ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)

(b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diáriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)

En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

3. Considera la funció $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & si\ \ x\neq 0\\ b & si\ \ x=0\end{cases}.$$

(a) Estudia la continuïtat de la funció als punts $x_0\neq 0$. (3 punts)

(b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre *a* i *b* perqué *f* sigui una funció contínua al punt $x_0=0$. (5 punts)

(c) Si per als valors de *a = 2* i *b = 1*, *f* és una funció derivable al punt x = 0, calcula $f'(0)$. (2 punts)

4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, *t*, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t)=\frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

on la variable real $t\geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

(a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

(b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurá l'any del mínim? (4 punts)

(c) Calcula la grandária de la població, aixó és el nombre d'individus, que hi haurá a llarg termini. (4 punts)

5. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases} y=x+3, \\ z=2x+2, \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}, \\ x=2z+3, \end{cases}$$

(a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

(b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)

(c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt (–1, 0, 2). (3 punts)

(d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

6. Donats els punts

$$P=(1,0,1),\ \ Q=(1,1,0),\ \ i\ \ \ R=(0,1,1).$$

(a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)
(b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)
(c) Calcula l'área del triangle que té per vértexs P, Q i R. (3 punts)
(d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perqué els punts P, Q, R i S = (a, b, c) pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

(a) A = ”les dues bolles són vermelles" (2 punts)

(b) B = ”les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

(c) C =”almenys una bolla és vermella" (3 punts)

(d) D = “cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

(a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)
(b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)
(c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1. Considera les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

(a) Calcula'n els determinants: det(A), det(B). (2 punts)
(b) Calcula la matriu producte B · A, la matriu transposada $(B \cdot A)^t$. (3 punts)
(c) Perqué es compleixi la relació A · X = B · A, quantes files i columnes ha de tenir la matriu X? (2 punts)
(d) Calcula la matriu X que satisfá la relació (3 punts)

$$A\cdot X = B\cdot A$$

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-2=\boxed{-2},\quad |B|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-15-2=\boxed{-17}$$

b)

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1 & 6+0\\ 2-5 & 4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$(B\cdot A)^t=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

c) Si la matriz X tiene "m" filas y "n" columnas, tenemos que:

$$\begin{matrix}A\cdot X = B\cdot A\\ 2\times\boxed{2\cdot m}\times n\rightarrow 2\times n\end{matrix}$$

Para poder realizar el producto A · X debe ser *2 = m*, la matriz X debe tener 2 filas.
El resultado del producto de A · X es una matriz de orden 2 x n, como la matriz B · A es de dimensiones 2 x 2, tenemos que n = 2. La matriz X debe tener 2 columnas.
La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

d) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A\cdot X = B\cdot A \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B\cdot A$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial.

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -8\\ -7 & -2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 7/2 & 1\end{pmatrix}=X}$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diáriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diáriament.
(a) Si λ = 2, i aquesta empresa usa, diáriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:
(i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)
(ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)
(b) Si λ = 3, i l'empresa fabrica diáriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)
En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

Llamamos "x" al número de bombillas tipo A, "y" al número de bombillas tipo B y "z" al número de bombillas tipo C.

(a) Exraemos de la información las ecuaciones.

"*La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. Aquesta empresa usa, diáriament, 30000 punts LED*" → $10x+20y+50z=30000$

"*Aquesta empresa fabrica 1300 bombetes*" → $x+y+z=1300$

"*El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diáriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED*" → $x=\lambda z$. Como λ = 2, entonces $x=2z$

(i)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ 10x+20y+50z=30000 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ x+2y+5z=3000 \\ x=2z \end{array}\right\}$$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ x+2y+5z=3000 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ x+2y+5z=3000 \\ x-2z=0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4+5+0-2+2+0=1\neq 0$$

Como su determinante es no nulo, el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ x+2y+5z=3000 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=1300 \\ 2z+2y+5z=3000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=1300 \\ 2y+7z=3000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1300-3z \\ 2y+7z=3000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1300-3z)+7z=3000 \Rightarrow 2600-6z+7z=3000 \Rightarrow \boxed{z=400} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2\cdot 400=800} \\ \boxed{y=1300-1200=100} \end{cases}$$

Se fabrican 800 bombillas tipo A, 100 de tipo B y 400 de tipo C.

(b) Si λ = 3, el número de bombillas es 1000 y el número de puntos LED es "n" el nuevo sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1000 \\ 10x+20y+50z=n \\ x=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1000 \\ x+2y+5z=\dfrac{n}{10} \\ x-3z=0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6+5+0-2+3+0=0$$

Como su determinante es nulo el rango de A no es 3.
El rango de A es 2 pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 2 & 5 & n/10 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 3 que se obtiene al quitar la columna primera y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 5 & n/10 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0+0-6000-0-0+\frac{3n}{10}=\frac{-60000+3n}{10}$$

$$\frac{-60000+3n}{10}=0 \Rightarrow -60000+3n=0 \Rightarrow n=20000$$

Nos planteamos dos posibilidades:

Opción 1. Si *n = 20000*.
En este caso el menor de orden 3 de A/B tiene determinante nulo y el rango de A/B es 2, al igual que el rango de A, pero menor que el número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Opción 2. Si $n \neq 20000$

En este caso el determinante del menor de orden 3 de la matriz ampliada es no nulo y el rango de la matriz ampliada es 3, como el rango de la matriz de coeficientes es 2, tenemos que los rangos son distintos, por lo que el sistema es incompatible y no tiene solución.

Lo resolvemos para *n = 20000*.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1000 \\ 10x+20y+50z=20000 \\ x=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1000 \\ x+2y+5z=2000 \\ \boxed{x=3z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3z+y+z=1000 \\ 3z+2y+5z=2000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+4z=1000 \\ 2y+8z=2000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+4z=1000 \\ y+4z=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow y+4z=1000 \Rightarrow \boxed{y=1000-4z}$$

La solución es $x=3z;\ y=1000-4z;\ z=z$.

Tomando como partida el número de bombillas del tipo C (z) el número de bombillas de tipo A son el triple (3z) y las de tipo B son 1000 – 4z.

Como el número de bombillas debe ser positivo tenemos que z no puede ser superior a 250 pues haría que el número de bombillas de tipo B fuese negativo.

El número de bombillas de tipo C no puede ser mayor de 250.

3. Considera la funció $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & si \quad x\neq 0\\ b & si \quad x=0\end{cases}.$$

(a) Estudia la continuïtat de la funció als punts $x_0\neq 0$. (3 punts)

(b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre *a* i *b* perqué *f* sigui una funció contínua al punt $x_0=0$. (5 punts)

(c) Si per als valors de *a = 2* i *b = 1*, *f* és una funció derivable al punt x = 0, calcula $f\,'(0)$. (2 punts)

(a) La función para $x\neq 0$ es $f(x)=\dfrac{e^{ax}-1}{2x}$ que es cociente de una función exponencial (continua) y de una polinómica (continua), como el denominador no se anula este cociente es continuo si $x\neq 0$.

(b) Para que la función sea continua en *x = 0* debe cumplirse que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{2x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=b\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{a}{2}\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{2}=b\Rightarrow \boxed{a=2b}$$

Para que la función sea continua en *x = 0* el valor de "a" debe ser el doble del valor de "b".

(c) Para *a = 2* y *b = 1* se cumple que *a = 2b* por lo que la función es continua en *x = 0.*

La función es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{2x} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$

La derivada en *x ≠ 0* es $f\,'(x)=\dfrac{2e^{2x}2x-2\left(e^{2x}-1\right)}{(2x)^2}=\dfrac{4xe^{2x}-2e^{2x}+2}{4x^2}=\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{2x^2}$

Calculamos el límite de esta derivada cuando *x* se acerca a 0 como el valor de *f ´(0).*

$$f\,'(0)=\lim_{x\to 0} f\,'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{2x^2}=\frac{0-1+1}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2e^{2x}}+4xe^{2x}-\cancel{2e^{2x}}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4xe^{2x}}{4x}=\lim_{x\to 0} e^{2x}=e^0=\boxed{1}$$

Se obtiene que *f ´(0) = 1.*

4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, *t*, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t)=\frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

on la variable real $t\geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

(a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

(b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurá l'any del mínim? (4 punts)

(c) Calcula la grandária de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurá a llarg termini. (4 punts)

(a) $P(0)=\frac{15+0^2}{(0+1)^2}=15$. Había una población de 15 millones de personas.

(b) Derivamos e igualamos a cero.

$$P'(t)=\frac{2t(t+1)^2-2(t+1)(15+t^2)}{(t+1)^4}=\frac{(t+1)\left[2t(t+1)-2(15+t^2)\right]}{(t+1)^4}$$

$$P'(t)=\frac{2t(t+1)-2(15+t^2)}{(t+1)^3}=\frac{\cancel{2t^2}+2t-30-\cancel{2t^2}}{(t+1)^3}=\frac{2t-30}{(t+1)^3}$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{2t-30}{(t+1)^3}=0\Rightarrow 2t-30=0\Rightarrow\boxed{t=15}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de los 15 años.

- En $(0,15)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $P'(1)=\frac{2-30}{(1+1)^3}=-\frac{15}{8}<0$. La función decrece en $(0,15)$.
- En $(15,+\infty)$ tomamos *t = 20* y la derivada vale $P'(20)=\frac{40-30}{(20+1)^3}=\frac{10}{9261}>0$. La función crece en $(15,+\infty)$.

En *t = 15* existe un mínimo de *P(t)*. $P(15)=\frac{15+15^2}{(15+1)^2}=0.937500$.

A los 15 años hay un mínimo de población siendo esta de 937500 habitantes.

(c) Calculamos el límite de *P(t)* cuando *t* se acerca a +∞.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{15+t^2}{t^2+2t+1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{15}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{2t}{t^2}+\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{15}{t^2}+1}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{15}{\infty}+1}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{0+1}{1+0+0} = \boxed{1}$$

La población tiende a ser 1 millón de personas.

5. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases} y = x+3, \\ z = 2x+2, \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}, \\ x = 2z+3, \end{cases}$$

(a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

(b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)

(c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt (–1, 0, 2). (3 punts)

(d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

(a)

$$(I)\begin{cases} y = x+3, \\ z = 2x+2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1,1,2) \\ P_1(0,3,2) \end{cases} \Rightarrow (I) \equiv (x,y,z) = (0,3,2) + \lambda(1,1,2);\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(II)\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ x = 2z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+2\beta \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_2} = (2,0,1) \\ Q_2\left(3,-\dfrac{1}{2},0\right) \end{cases} \Rightarrow (II) \equiv (x,y,z) = \left(3,\dfrac{-1}{2},0\right) + \beta(2,0,1);\ \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Como los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales entonces no son ni paralelas ni coincidentes.

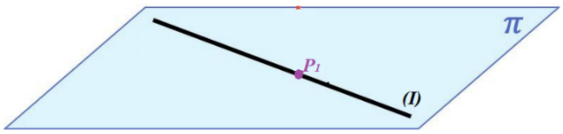
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{u_2} = (2,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{2}{1}$$

Calculamos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3,-\frac{1}{2},0\right) - (0,3,2) = \left(3,-\frac{7}{2},-2\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{u_2} = (2,0,1) \\ \overrightarrow{v_1} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3,-\dfrac{7}{2},-2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -\dfrac{7}{2} & -2 \end{vmatrix} = 3-14+4+\frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan y es posible hallar el plano pedido.



Si el plano π es paralelo a la recta (II) entonces tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)$ y al contener a la recta (I) otro de sus vectores directores es el director de la recta (I) $\overrightarrow{v_1}=(1,1,2)$ y pasa por el punto $P_1(0,3,2)$ de la recta (I).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_1}=(1,1,2)\\ P_1(0,3,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x & y-3 & z-2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$y-3+2z-4-4y+12-x=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+3y-2z-5=0}$$

(c) Si el plano π´ es perpendicular a la recta (II) entonces su vector normal es el director de la recta (II) $\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)$ y pasa por (–1, 0, 2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)\\ (-1,0,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv 2x+z+D=0\\ (-1,0,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 2(-1)+2+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow\boxed{\pi'\equiv 2x+z=0}$$

(d) Si la recta *(III)* es perpendicular a ambas rectas tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)\\ \overrightarrow{v_1}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{w_3}=\overrightarrow{u_2}\times\overrightarrow{v_1}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-1,-3,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_3}=(-1,-3,2)\\ (0,0,0)\in(III)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{(III)\equiv\begin{cases}x=-\alpha\\ y=-3\alpha,\ \ siendo\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=2\alpha\end{cases}}$$

6. Donats els punts

$$P=(1,0,1),\ \ Q=(1,1,0),\ \ i\ \ \ R=(0,1,1).$$

(a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)
(b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)
(c) Calcula l'área del triangle que té per vértexs P, Q i R. (3 punts)
(d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perqué els punts P, Q, R i S = (a, b, c) pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

(a) Hallamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Comprobamos que no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)-(1,0,1)=(0,1,-1)\\ \overrightarrow{PR}=(0,1,1)-(1,0,1)=(-1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{0}{-1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{0}$$

Por lo tanto, los puntos no están alineados.

(b) El plano π tendrá como vectores directores a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y pasa por $P=(1,0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(-1,1,0)\\ P(1,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow y+z-1+x-1=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+y+z-2=0}$$

(c) El área del triangulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(0,1,-1)\\ \overrightarrow{PR}=(-1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,1)$$

$$\text{Área } PQR=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}u^2}$$

(d) Tenemos la ecuación $\pi\equiv x+y+z-2=0$ del plano que contiene a los puntos P, Q y R, por lo que el punto S = (a, b, c) está en el mismo plano que los otros puntos cuando el punto S esta en el plano π y por lo tanto cumple su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y+z-2=0\\ S(a,b,c)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+b+c-2=0}$$

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

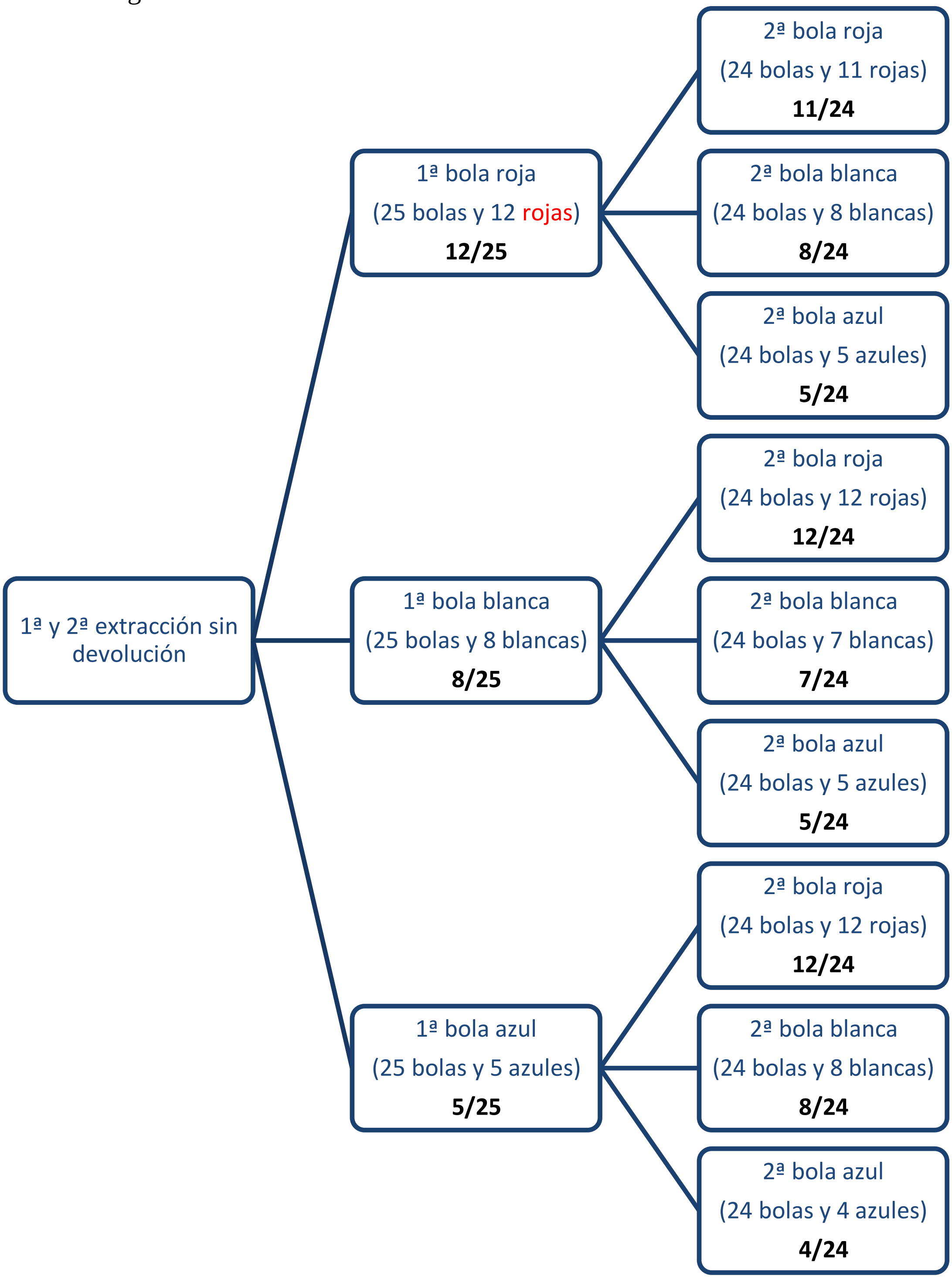
(a) A = ”les dues bolles són vermelles" (2 punts)

(b) B = ”les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

(c) C =”almenys una bolla és vermella" (3 punts)

(d) D = “cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos R1 y R2 a sacar una bola roja en 1ª y 2ª extracción respectivamente. Análogamente llamamos B1 y B2 a sacar blanca en 1ª y 2ª extracción. Y, por último, A1 y A2 a sacar azul en 1ª y 2ª extracción.

(a)

$$P(A)=P(R1\cap R2)=P(R1)P(R2/R1)=\{\text{Miramos el diagrama de árbol}\}=$$

$$=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}=\boxed{\frac{11}{50}=0.22}$$

(b)

$$P(B)=P\left((R1\cap R2)\cup(B1\cap B2)\cup(A1\cap A2)\right)=$$

$$=P(R1\cap R2)+P(B1\cap B2)+P(A1\cap A2)=$$

$$=P(R1)P(R2/R1)+P(B1)P(B2/B1)+P(A1)P(A2/A1)=$$

$$=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\boxed{\frac{26}{75}\simeq 0.347}$$

(c)

$$P(C)=P\left((R1\cap R2)\cup(R1\cap B2)\cup(R1\cap A2)\cup(B1\cap R2)\cup(A1\cap R2)\right)=$$

$$=P(R1\cap R2)+P(R1\cap B2)+P(R1\cap A2)+P(B1\cap R2)+P(A1\cap R2)=$$

$$=P(R1)P(R2/R1)+P(R1)P(B2/R1)+P(R1)P(A2/R1)+$$
$$+P(B1)P(R2/B1)+P(A1)P(R2/A1)=$$

$$=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}+\frac{12}{25}\cdot\frac{8}{24}+\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{12}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{12}{24}=\boxed{\frac{37}{50}=0.74}$$

(d) Que ninguna de las dos bolas sea roja contempla muchos casos favorables, calculamos su probabilidad usando el suceso complementario que es “Al menos una bola es roja” que ya tenemos calculada su probabilidad en el apartado c).

$$P(D)=1-P(C)=1-\frac{37}{50}=\boxed{\frac{13}{50}=0.26}$$

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

(a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)

(b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)

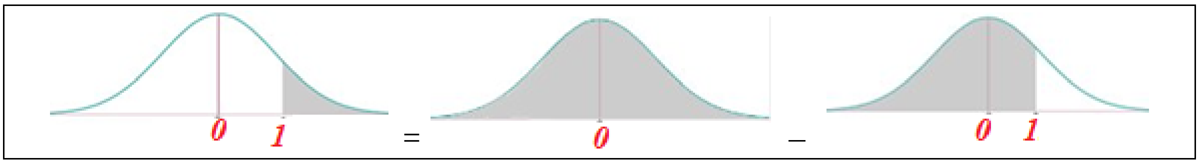
(c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

X = Altura en cm de una persona.

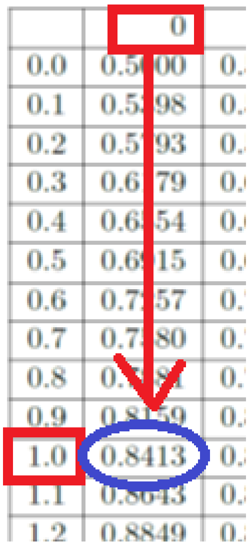
X = N(160, 10)

(a)

$$P(X>170)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{170-160}{10}\right)=P(Z>1)=\ldots$$

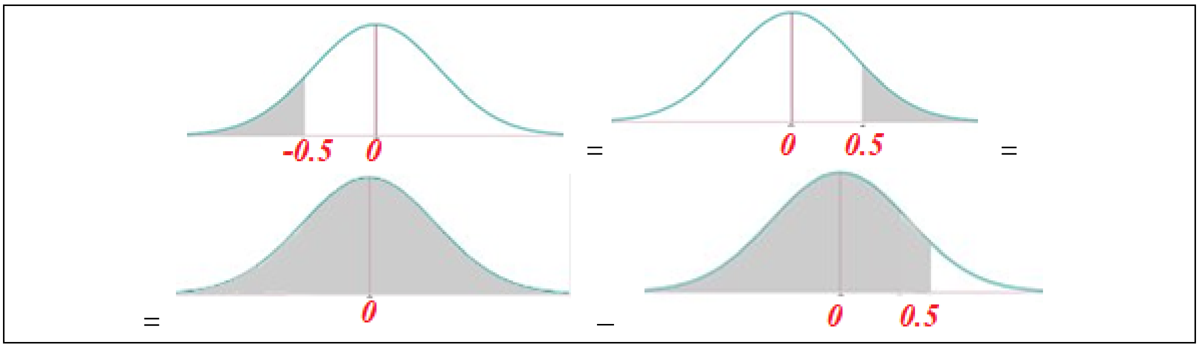


$$\ldots=1-P(Z\le 1)=\{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\}=1-0.8413=\boxed{0.1587}$$



	0	
0.0	0.5[illegible]00	0.
0.1	0.5[illegible]98	0.
0.2	0.5[illegible]93	0.
0.3	0.6[illegible]79	0.
0.4	0.6[illegible]54	0.
0.5	0.6[illegible]15	0.
0.6	0.7[illegible]57	0.
0.7	0.7[illegible]80	0.
0.8	[illegible]	0.
0.9	[illegible]	0.
1.0	0.8413	0.
1.1	0.8643	0.
1.2	0.8849	0.

(b) $P(X<155)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{155-160}{10}\right)=P(Z<-0.5)=\ldots$



$$\ldots=P(Z>0.5)=1-P(Z\le 0.5)=\{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.6915=\boxed{0.3085}$$

	0	
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7

(c)

$$P(155 < X < 170) = P(X < 170) - P(X < 155) = 1 - P(X \geq 170) - P(X < 155) =$$

$$= \{\text{calculado en los apartados a) y b)}\} = 1 - 0.1587 - 0.3085 = \boxed{0.5328}$$