Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2021

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Donat la matriu

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de *a*. (6 punts)

(b) Determina per a quins valors de *a* la matriu A és invertible. (1 punt)

(c) Per al valor de *a* = *–1* calcula la solució, X, de l'equació matricial

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (3 punts)

2. Sigui la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, on A^t _es la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

(b) Sigui *I* la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2-2AX+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$ (3 punts)

(c) Calcula totes les matrius *B* per a les quals es té que

$$A\cdot B=B\cdot A^t$$ (4 punts)

3. Considera la funció

$$f(x)=\frac{1}{x^4}.$$

(a) Representa-la gràficament. (7 punts)

(b) Comprova que *f(2)* = *f(–2)*. (1 punt)

(c) Comprova que no existeix $c\in[-2,2]$ tal que *f ´(c)* = *0*. (1 punt)

(d) Hi ha una contradiccióo amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

4. Donada la funció

$$f(x)=\frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de f(x). (5 punts)

(b) Calcula l'área delimitada per la gráfica de *f(x)*, les rectes $x=\sqrt{5}$ i $x=\sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

5. Considera els punts,

$$A=(5,a,7),\quad B=(3,-1,7),\quad C=(6,5,4)$$

(a) Determina el valor del parámetre *a* per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)

(b) Per al valor de $a=-2$, calcula l'área del triangle de vértexs A, B i C. (3 punts)

(c) Per al valor de $a=5$, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

6. Donades les rectes

$$r:\frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1},\qquad s:\begin{cases}x=1\\ y=6+4\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}.$$

(a) Calcula el valor de *m* per tal que es tallin en un punt, (7 punts)

(b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2. Calcula la probabilitat que:
(a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)
(b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)
(c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

8. Una companyia aéria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:
(a) pesi menys de 7,2 kg peró més de 7 kg. (4 punts)
(b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)
(c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0; 1)

SOLUCIONES

1. Donat la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de *a*. (6 punts)
(b) Determina per a quins valors de *a* la matriu A és invertible. (1 punt)
(c) Per al valor de *a = –1* calcula la solució, X, de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (3 punts)

(a) El rango de la matriz A es 3 o menos. Para que sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^4 - a^2 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2\left(a^4 - 2a^2 + 1\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2\left(a^4 - 2a^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \to a = 0 \\ o \\ a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Tenemos 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq \pm 1$
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = 0$
La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues tiene una columna con todo ceros. Su rango es 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 1ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

El rango de A es 2.

CASO 3. $a = -1$
La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo. Su rango es 1, pues la 2ª y 3ª fila son iguales y la 1ª y la 2ª son proporcionales.
El rango de A es 1.

CASO 4. $a=1$

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo. Su rango es 1, pues las tres filas son iguales.

El rango de A es 1.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ *y* $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3, si $a=0$ el rango de A es 2 y si $a=\pm 1$ el rango de A es 1.

(b) A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ a=\pm 1 \end{cases}$$

La matriz tiene inversa cuando $a \neq 0$ *y* $a \neq \pm 1$

(c) Para *a = –1* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Esta matriz no tiene inversa. Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} = \text{Ecuación } 3^{a} \\ \text{Ecuación } 1^{a} = -\text{ Ecuación } 2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{El sistema se reduce a una sola ecuación}\} \Rightarrow x-y-z=0 \Rightarrow x=y+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=\lambda \qquad , con\ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\ z=\mu \end{cases}}$$

2. Sigui la matriu

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, on A^t _es la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

(b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2-2AX+I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \qquad \text{(3 punts)}$$

(c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que

$$A\cdot B=B\cdot A^t \qquad \text{(4 punts)}$$

(a)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 1+1\\ 2+2 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa de A compruebo que su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

Pasamos a calcular A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

(b)

$$A^2-2AX+I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow -2AX=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}-I-A^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}-I-A^2\right]=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1+2 & -1+4\\ 2-2 & 2-4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}}$$

(c)

$$A \cdot B = B \cdot A^t \Rightarrow$$

La matriz B debe ser de dimensión 2x2 → $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sustituimos en la ecuación matricial y la convertimos en un sistema de ecuaciones.

$$A \cdot B = B \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=a+b \\ b+d=2a+b \\ 2a+c=c+d \\ 2b+d=2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=2a \\ 2a=d \\ 2b=2c \rightarrow b=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=2a \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}}$$

3. Considera la funció

$$f(x)=\frac{1}{x^4}.$$

(a) Representa-la gràficament. (7 punts)
(b) Comprova que $f(2) = f(-2)$. (1 punt)
(c) Comprova que no existeix $c\in[-2,2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punt)
(d) Hi ha una contradiccióo amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

(a) Su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

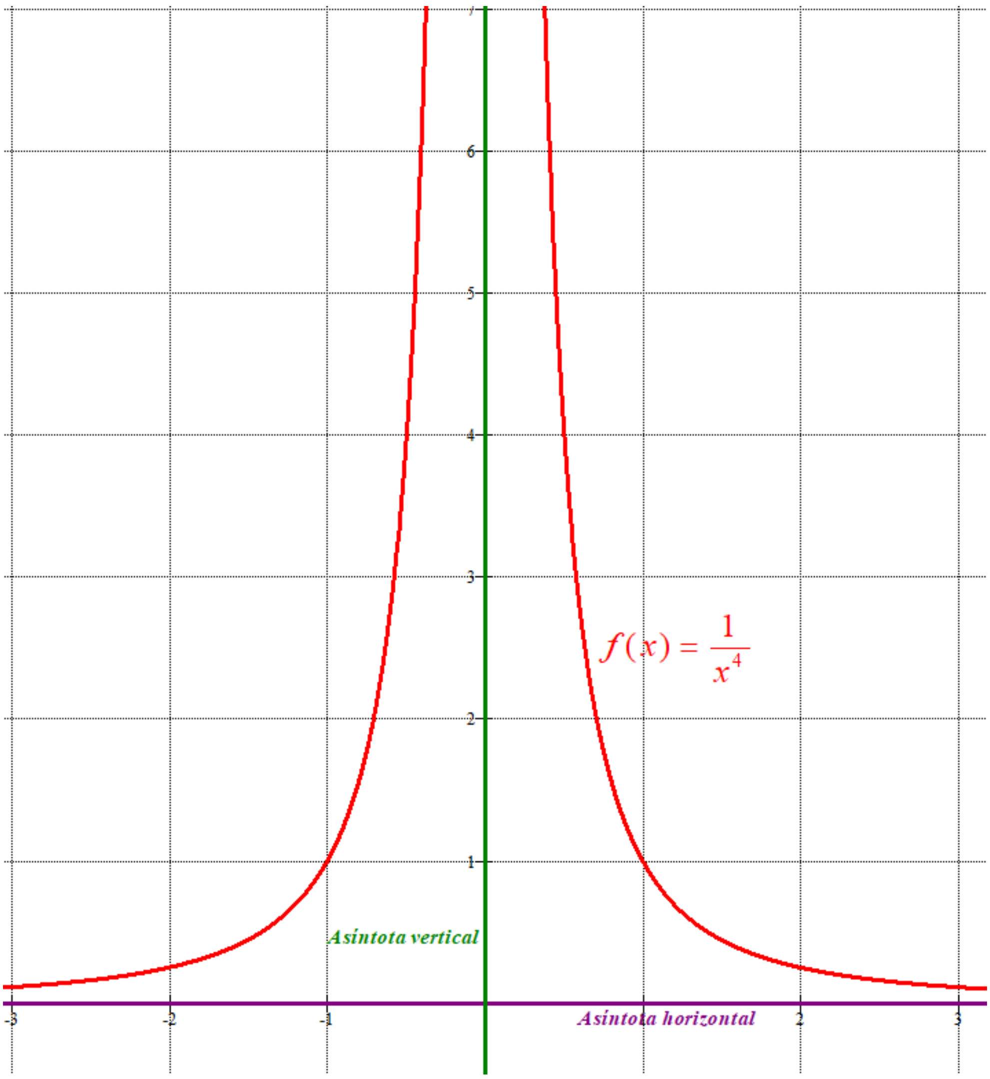
Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y=\frac{1}{x^4}$
-2	0.0625
-1	1
-0.5	16
0.5	16
1	1
2	0.0625



(b)

$$f(x)=\frac{1}{x^4}\Rightarrow\begin{cases} f(2)=\frac{1}{2^4}=0.0625 \\ f(-2)=\frac{1}{(-2)^4}=0.0625\end{cases}\Rightarrow f(2)=f(-2)=0.0625$$

(c) Observando la gráfica se comprueba que la función no tiene ningún $c\in[-2,2]$ donde la derivada se anule, pues eso implicaría que en dicho valor la función ni crece ni decrece.

Si calculamos su derivada $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4}\Rightarrow f\,'(x)=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$. Esta expresión no se anula nunca, aunque si que cambia de signo en el intervalo [–2,2].

En la gráfica de la función se aprecia que es creciente ($f\,'(x)>0$) en (–2, 0) y decreciente ($f\,'(x)<0$) en (0, 2).

(d) El teorema de Rolle dice que si una función *f(x)* es CONTINUA en [a, b] y DERIVABLE en (a, b) y además es *f(a) = f(b)* entonces existe $c\in[a,b]$ tal que f ´(c) = 0.

Pero nuestra función $f(x)=\frac{1}{x^4}$ no es continua en [–2,2], pues es discontinua en $x = 0$, ni es derivable en (–2, 2), pues no es derivable en $x = 0$. Por lo que no podemos aplicarle el teorema de Rolle y no existe ninguna contradicción.

4. Donada la funció

$$f(x)=\frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de f(x). (5 punts)

(b) Calcula l'área delimitada per la gráfica de *f(x)*, les rectes $x=\sqrt{5}$ i $x=\sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

(a)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{-x}{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+K \quad ,\text{con } K\in\mathbb{R}$$

Estas es la expresión de todas las primitivas de $f(x)=\frac{-x}{4-x^2}$.

Una de ellas resulta tomando K = 0 → $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|$

(b) Vemos si la función corta el eje X.

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{-x}{4-x^2}=0\Rightarrow x=0$$

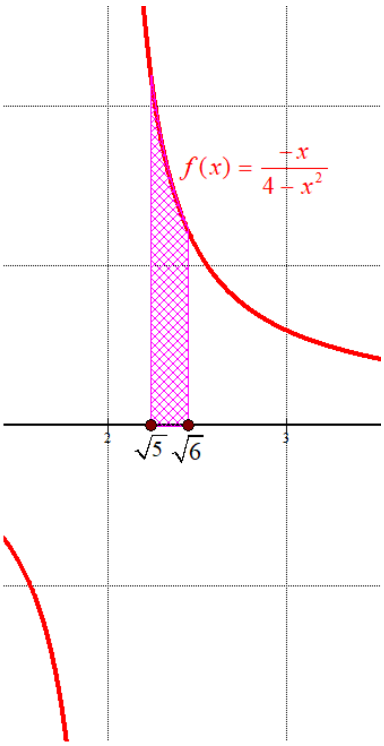
Pero este valor no pertenece al intervalo $\left[\sqrt{5},\sqrt{6}\right]$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre $x=\sqrt{5}$ y $x=\sqrt{6}$ de la función $f(x)=\frac{-x}{4-x^2}$.

$$Área=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}f(x)dx=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}\frac{-x}{4-x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}=\left[\frac{1}{2}\ln\left|4-\left(\sqrt{6}\right)^2\right|\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left|4-\left(\sqrt{5}\right)^2\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1=\boxed{\frac{\ln 2}{2}\simeq 0.34\,u^2}$$

Lo comprobamos dibujando el recinto.



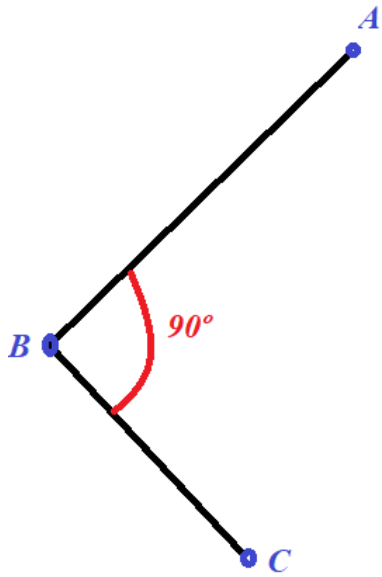
5. Considera els punts,

$$A=(5,a,7),\quad B=(3,-1,7),\quad C=(6,5,4)$$

(a) Determina el valor del parámetre a per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)

(b) Per al valor de a = –2, calcula l'área del triangle de vértexs A, B i C. (3 punts)

(c) Per al valor de a = 5, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)



(a) Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar sea cero.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{BA}=(5,a,7)-(3,-1,7)=(2,a+1,0)\\ \overrightarrow{BC}=(6,5,4)-(3,-1,7)=(3,6,-3)\\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2,a+1,0)(3,6,-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+6a+6=0\Rightarrow 6a=-12\Rightarrow \boxed{a=-2}$$

(b) Para a = –2 el punto A es A = (5, –2, 7) y el triángulo es rectángulo en el vértice B.
El área del triángulo lo podemos hallar con el producto vectorial o hallando la longitud de la base y la de altura del triángulo.
Lo hacemos de esta última forma.

$$\overrightarrow{BA}=(2,-1,0)\rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC}=(3,6,-3)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{54}$$

$$Área=\frac{base\cdot altura}{2}$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}}{2}=\frac{\sqrt{270}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{30}}{2}\simeq 8.21u^2}$$

(c) Para a = 5 el punto A es A = (5, 5, 7)

Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(3,-1,7)-(5,5,7)=(-2,-6,0)\\ \overrightarrow{AC}=(6,5,4)-(5,5,7)=(1,0,-3)\end{array}\right\}$$

Aplicamos el producto escalar para determinar el ángulo entre ambos vectores.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow(-2,-6,0)(1,0,-3)=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2=\sqrt{40}\sqrt{10}\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow -2=20\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-2}{20}=-0.1\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arccos(-0.1)\simeq 95^{\circ}}$$

6. Donades les rectes

$$r:\frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1}, \qquad s:\begin{cases}x=1\\ y=6+4\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}.$$

(a) Calcula el valor de m per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
(b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

(a) Para que sean secantes las rectas deben tener distinta dirección y que el producto mixto de sus vectores directores y un vector que una un punto de una recta (r) con un punto de la otra recta (s) sea nulo.
Necesitamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r:\frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1}\Rightarrow\begin{cases}P_r(m,-10,-3)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,4,1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x=1\\ y=6+4\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_s(1,6,-1)\\ \overrightarrow{v_r}=(0,4,2)\end{cases}$$

¿Tienen r y s distinta dirección?

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-1,4,1)\\ \overrightarrow{v_r}=(0,4,2)\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\frac{-1}{0}=\frac{4}{4}=\frac{1}{2}? \text{ ¡No son ciertas!}$$

Al no tener coordenadas proporcionales los vectores directores no tienen la misma dirección y las rectas no son paralelas.

¿Son secantes o se cruzan?

$$\left.\begin{array}{l}P_r(m,-10,-3)\\ P_s(1,6,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rP_s}=(1,6,-1)-(m,-10,-3)=(1-m,16,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-1,4,1)\\ \overrightarrow{v_r}=(0,4,2)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=(1-m,16,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix}-1&4&1\\0&4&2\\1-m&16&2\end{vmatrix}=-8+8-8m-4+4m+32=-4m+28$$

Para que sean secantes debe cumplirse que $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=0$

$$\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=0\Rightarrow-4m+28=0\Rightarrow\boxed{m=\frac{-28}{-4}=7}$$

(b) El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones con *m=7*.

$$\left.\begin{array}{l} r:\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y+10}{4}=\dfrac{z+3}{1} \Rightarrow s:\begin{cases} x=7-\alpha \\ y=-10+4\alpha \\ z=-3+\alpha \end{cases} \\ \\ s:\begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 7-\alpha=1 \\ -10+4\alpha=6+4\lambda \Rightarrow \\ -3+\alpha=-1+2\lambda \end{cases}$$

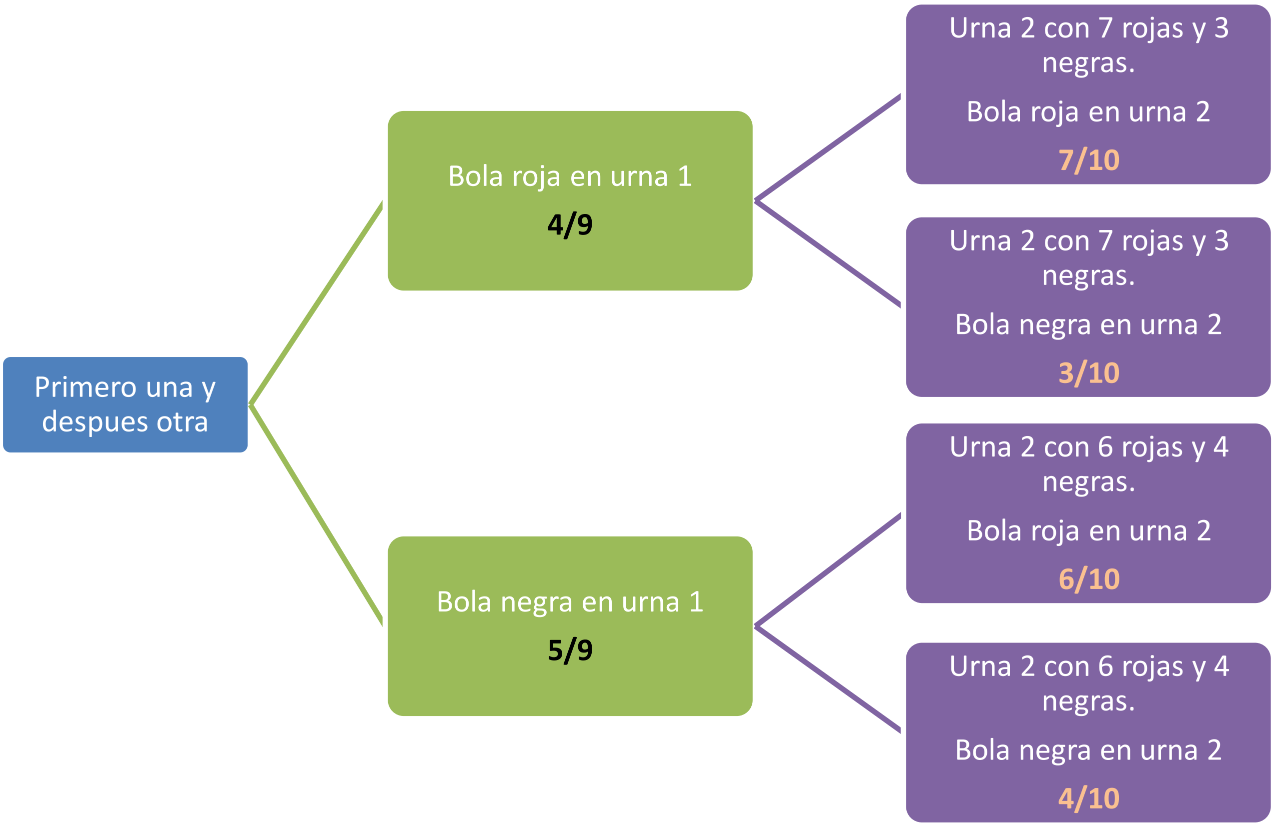
$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=7-1=6} \\ -16+4\alpha=4\lambda \Rightarrow \\ -2+\alpha=2\lambda \end{cases} \begin{cases} -16+24=4\lambda \\ -2+6=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8=4\lambda \\ 4=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$

$$\lambda=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6+8=14 \Rightarrow \boxed{A(1,14,3)} \\ z=-1+4=3 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas *r* y *s* es *A(1, 14, 3)*

7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2.
Calcula la probabilitat que:
(a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)
(b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)
(c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

Tras sacar la bola de la urna 1 al introducirla en la urna 2 esta pasa a tener 10 bolas, pero dependiendo que haya salido roja o negra en la extracción en la urna 1 tendremos en la urna 2 o una bola roja más o una negra. Lo reflejamos en el diagrama de árbol siguiente.



Damos nombre a los distintos sucesos de este experimento.
R1 = "Sacar roja en urna 1", N1 = "Sacar negra en urna 1"
R2 = "Sacar roja en urna 2", N2 = "Sacar negra en urna 2"

(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R2) = P(R1 \cap R2) + P(N1 \cap R2) =$$
$$= P(R1)P(R2/R1) + P(N1)P(R2/N1) =$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{7}{10} + \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} = \boxed{\frac{58}{90} \simeq 0.644}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2)=\frac{P(N1\cap N2)}{P(N2)}=\frac{P(N1)P(N2/N1)}{1-P(R2)}=\frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{10}}{1-\frac{58}{90}}=\boxed{\frac{5}{8}=0.625}$$

(c) El suceso “Sacar al menos una bola roja en las dos extracciones sucesivas” es el suceso contrario a “Sacar las dos bolas negras en las dos extracciones”.

$$P(N1\cap N2)=P(N1)P(N2/N1)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{10}=\frac{2}{9}$$

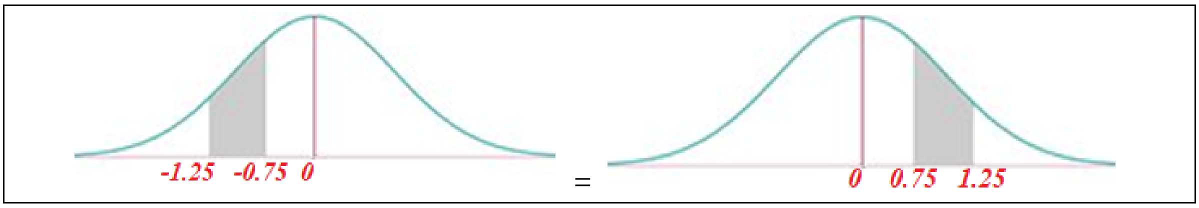
La probabilidad de sacar al menos una bola roja es $1-\frac{2}{9}=\boxed{\frac{7}{9}\simeq 0.78}$

8. Una companyia aéria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:
(a) pesi menys de 7,2 kg peró més de 7 kg. (4 punts)
(b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)
(c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

X = Peso en kg de una maleta.
X = N(7.5, 0.4)

(a)

$$P(7 < X < 7.2) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{7-7.5}{0.4} < Z < \frac{7.2-7.5}{0.4}\right) =$$
$$= P(-1.25 < Z < -0.75) = P(0.75 < Z < 1.25) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = \ldots$$

$$\ldots = \{\text{Mirando en la tabla N}(0,1)\} = 0.8944 - 0.7734 = \boxed{0.121}$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9

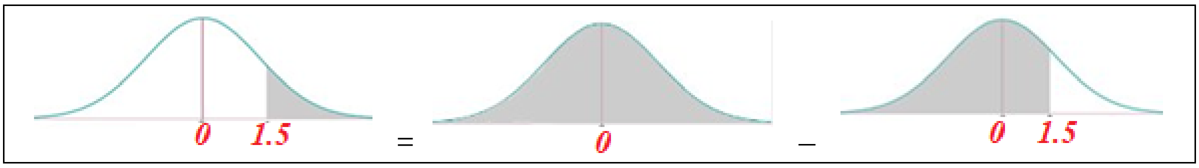
(b)

$$P(7.8 < X < 8) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{7.8-7.5}{0.4} < Z < \frac{8-7.5}{0.4}\right) =$$
$$= P(0.75 < Z < 1.25) = \{\text{hecho en apartado a)}\} = \boxed{0.121}$$

(c)

$$P(X > 8.1) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{8.1-7.5}{0.4}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$



Si una maleta tiene una probabilidad de 0.0668 de pesar más de 8.1 kg en un total de 90 maletas habrán 90 · 0.0668 = 6.012 maletas que cumplen lo mismo.

De las 90 maletas aproximadamente unas 6 maletas superarán el peso de 8.1 kg.

	0	1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463