EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, <u>en la primera página del tríptico</u>, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a, $b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

2) Calcule el valor de $a\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2$$

3) Calcule

$$\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde

A^T es la matriz traspuesta de A.

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2,-1,0).$$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1),\ \overrightarrow{u_2} = (0,3,1),\ \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0),\ \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3},\ \ \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$$

b) (1 punto*)* Calcule las siguientes expresiones:

$$\left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right),\ \left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right) \times \left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a, $b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

a) Para que sea continua en $\mathbb{R}$ debe serlo en $x=0$ y para ello el valor de la función y los límites laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3+0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3+bx+2\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{ax}=\ldots\boxed{1}\ldots=\dfrac{1}{a} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow 2=\frac{1}{a}\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=\frac{\frac{1}{1}}{a}=\frac{1}{a}$$

La continuidad de la función no depende del valor de b. La función es continua si $a=\dfrac{1}{2}$.

b) Para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$ la derivada debe anularse para este valor → $f'(-1)=0$.

En $x=-1$ la función es $f(x)=x^3+bx+2$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+bx+2\Rightarrow f'(x)=3x^2+b \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3(-1)^2+b=0\Rightarrow \boxed{b=-3}$$

La función es $f(x)=x^3-3x+2$.
Calculamos la derivada segunda. Su signo para $x=-1$ decide si es mínimo o máximo.

$$f(x)=x^3-3x+2\Rightarrow f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f''(x)=6x\Rightarrow f''(-1)=-6<0$$

En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo.

2) Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2$$

Usamos la igualdad trigonométrica $1-sen^2(x)=cos^2(x)$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=\left(\cos^2(0)\right)^{\frac{a}{0^2}}=1^{\infty}=\text{Indeterminación}$$

Tomamos logaritmo neperiano a ambos lados de la igualdad.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}\right)=\ln 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{2a}{x^2}}=\ln 2$$

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{2a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2a}{x^2}\ln\left(\cos x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot\ln\left(\cos x\right)}{x^2}=\frac{2a\cdot\ln\left(\cos 0\right)}{0^2}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot\frac{-senx}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{2}a\cdot senx}{\cancel{2}x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot senx}{x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\cos x}{\cos x-x\cdot senx}=\frac{-a\cos(0)}{\cos(0)-0\cdot sen(0)}=\frac{-a}{1}=-a$$

Lo igualamos a ln2 y tenemos que $-a=\ln 2 \Rightarrow \boxed{a=-\ln 2}$

3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ x^3-3x+2=t\\ 3x^2-3dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{3x^2-3}\end{array}\right\} = \int \frac{x^2-1}{t}\frac{dt}{3x^2-3} =$$

$$= \int \frac{x^2-1}{t\left(3x^2-3\right)}\,dt = \int \frac{\cancel{x^2-1}}{3t\left(\cancel{x^2-1}\right)}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln t =$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ x^3-3x+2=t\end{array}\right\} = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left(x^3-3x+2\right)+K}$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1-3}{2}=-1\\ \frac{1+3}{2}=2\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = -1$?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{2(-1)^3-(-1)^2}{(-1)^2+1-2}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿$x = 2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{2\cdot 2^3-2^2}{2^2-2-2}=\frac{12}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^3}-x^2-\cancel{2x^3}+2x^2+4x}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0-0}=1$$

La asíntota oblicua es $y=2x+1$.

b) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\left(x-1\right)$.

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}\Rightarrow f(1)=\frac{2-1}{1-1-2}=-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(6x^2-2x\right)\left(x^2-x-2\right)-\left(2x^3-x^2\right)\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(1)=\frac{\left(6-2\right)\left(1-1-2\right)-\left(2-1\right)\left(2-1\right)}{\left(1-1-2\right)^2}=\frac{-8-1}{4}=-\frac{9}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)\left(x-1\right) \\ f(1)=-\frac{1}{2} \\ f'(1)=-\frac{9}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow y+\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}\left(x-1\right)\Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

a) Nos planteamos cuando el rango es 3, es decir, cuando su determinante no se anula.

$$A-kI=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}$$

$$|A-kI|=\begin{vmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{vmatrix}=-k(2-k)(3-k)+2(2-k)$$

$$|A-kI|=(2-k)\left[-k(3-k)+2\right]=(2-k)\left(k^2-3k+2\right)$$

$$|A-kI|=0\Rightarrow(2-k)\left(k^2-3k+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=2\\ k^2-3k+2=0\Rightarrow k=\dfrac{3-\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3-1}{2}=1\\ \dfrac{3+1}{2}=2\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $k\neq1$ y $k\neq2$

En este caso el determinante de $A-kI$ es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a=1$

La matriz queda $A-kI=\begin{pmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Su determinante es 0, por lo que su rango no es 3.
¿El rango es 2?
Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera y calculamos su determinante.

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de $A-kI$ es 2.

CASO 3. $a = 2$

La matriz queda $A-kI = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Su determinante es 0, por lo que su rango no es 3.
¿El rango es 2?
Observamos que la columna 2ª es todo 0 y la columna 1ª y 3ª son iguales, por lo que su rango es 1.

b) Para $k = 0$ la matriz queda $A-kI = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A-kI| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0. \text{ Existe su inversa.}$$

$$(A-kI)^{-1} = \frac{Adj\left((A-kI)^T\right)}{|A-kI|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

$$(A-kI)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde A^T es la matriz traspuesta de A.

a)

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Saco factor común 2} \\ \text{en fila 1ª} \end{matrix} \right\} = 2\begin{vmatrix} d & e+f & f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Separo la columna 2ª} \\ \text{en suma de 2 determinantes} \end{matrix} \right\} = 2\left[\begin{vmatrix} d & e & f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & f & f \\ -g & -i & -i \\ a & c & c \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{El segundo determinante es nulo pues} \\ \text{tiene la columna 2ª y 3ª iguales.} \\ \text{En el primero saco factor común en 2ª fila el } -1 \end{matrix} \right\} = 2\left[-\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Cambio la fila 1ª por la 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo} \end{matrix} \right\} = -2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Cambio la fila 2ª por la 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo} \end{matrix} \right\} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = \boxed{-10}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Buscamos las dimensiones de la matriz X.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3 \quad \cdot \ m} \times n \longrightarrow 3 \times 1$$

Por este esquema del producto de matrices los valores son $m = 3$ y $n = 1$. La matriz X debe ser de dimensiones 3x1.

Llamamos a la matriz $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b-c \\ 2a+b+2c \\ 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b-c=0 \\ 2a+b+2c=9 \\ 2a-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+c \\ 2a+b+2c=9 \\ 2a-b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(b+c)+b+2c=9 \\ 2(b+c)-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+2c+b+2c=9 \\ 2b+2c-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b+4c=9 \\ b+2c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b+4c=9 \\ b=5-2c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(5-2c)+4c=9 \Rightarrow 15-6c+4c=9 \Rightarrow -2c=-6 \Rightarrow \boxed{c=3} \Rightarrow \boxed{b=5-6=-1} \Rightarrow \boxed{a=3-1=2}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}$

a) Despejamos**.**

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Multiplico la 1}^{\text{a}}\text{ ecuación por 3} \\ \text{y la 2}^{\text{a}}\text{ por } -2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 6X+9Y=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \\ -6X+4Y=\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Sumo las dos ecuaciones}\} \Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 13 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \{\text{Sustituyo en la 1}^{\text{a}}\text{ ecuación}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X+3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Calculamos las potencias primeras e intentamos buscar una fórmula general para $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2-1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$$

Resumimos lo que apreciamos en estas primeras potencias.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2} & 0 \\ -\left(2^{2}-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3} & 0 \\ -\left(2^{3}-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{4} & 0 \\ -\left(2^{4}-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Hay dos términos de la matriz resultado que se mantienen constantes ($a_{12} = 0$ y $a_{22} = 1$) y otros dos que varían en función del valor de la potencia que deseamos calcular.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 2^{n} & 0 \\ -\left(2^{n}-1\right) & 1 \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}$$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2, -1,0).$$

Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3. Dicho plano tiene como vectores directores los que unen uno de esos puntos con los otros dos.

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u}=\overrightarrow{B_1B_2}=(1,3,1)-(-1,0,2)=(2,3,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{B_1B_3}=(2,-1,0)-(-1,0,2)=(3,-1,-2) \\ B_1(-1,0,2)\in\pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x-6-3y-2z+4-9z+18+4y-x-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0}$$

Comprobamos que los planos π_1 y π_2 son secantes (coinciden en una recta). Para ello basta comprobar que los respectivos vectores normales no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(-7,1,-11) \\ \pi_2 \equiv x+2z=1 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{-7}{1}=\frac{1}{0}=\frac{-11}{2}?$$

No son ciertas ninguna de las igualdades y los vectores normales no tienen la misma dirección. Los planos no son paralelos y por tanto son secantes.

La recta que nos piden hallar tendrá la misma dirección y por tanto el mismo vector director que la recta intersección de ambos planos.
La recta tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(-7,1,-11) \\ \pi_2 \equiv x+2z=1 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r}=2i-11j-k+14j=2i+3j-k=(2,3,-1)$$

La recta tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(2,3,-1) \\ A=(0,1,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y-1}{3} \to 3x=2y-2 \to 3x-2y+2=0 \\ \frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1} \to -y+1=3z-3 \to -y-3z+4=0 \end{cases}$$

La recta solución es $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ -y-3z+4=0 \end{cases}$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1}=(-1,1,1),\ \overrightarrow{u_2}=(0,3,1),\ \overrightarrow{u_3}=(1,-2,0),\ \overrightarrow{u_4}=(-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3},\ \ \overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{u_4}$$

b) (1 punto*)* Calcule las siguientes expresiones:

$$\left(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\right),\ \left(\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1}\right)\times\left(\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1}\right),$$

siendo · y × los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

a) Calculamos las coordenadas de los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$

$$\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}=2(-1,1,1)-(0,3,1)=(-2,-1,1)$$
$$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3}=(-1,1,1)+(1,-2,0)=(0,-1,1)$$
$$\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{u_4}=(-2,0,1)$$

Para que sean linealmente independientes su producto mixto debe ser no nulo.

$$\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2+2+0-2-0-0=2\neq 0$$

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente independientes.

b) Hacemos el producto escalar planteado.

$$\left(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\right)=(-2,-1,1)\cdot(-2,-1,1)=4+1+1=6$$

Hacemos también el producto vectorial, aunque sabemos que dará como resultado el vector cero pues es el producto vectorial de un vector por sí mismo.

$$\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1}=(-2,0,1)-(-1,1,1)=(-1,-1,0)$$
$$\left(\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1}\right)\times\left(\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1}\right)=(-1,-1,0)\times(-1,-1,0)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0=(0,0,0)$$

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

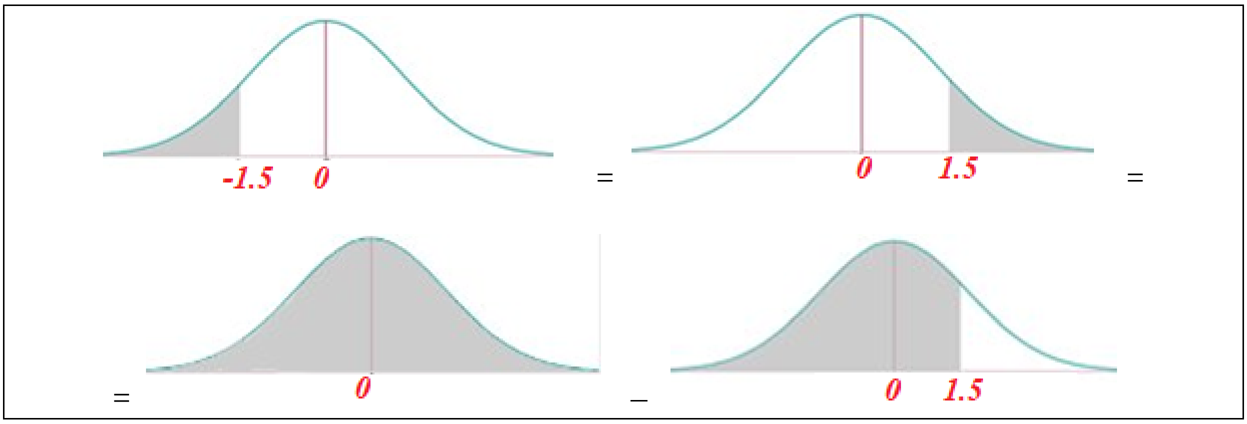
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

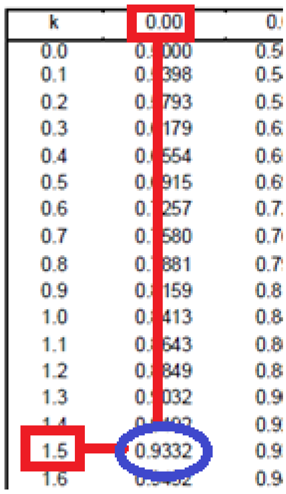
X = Cantidad de hierro en suero de una mujer adulta.
X = N(120, 30)
Una mujer tiene anemia si X < 75.

a)

$$P(X<75)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{75-120}{30}\right)=P(Z<-1.5)=\dots$$



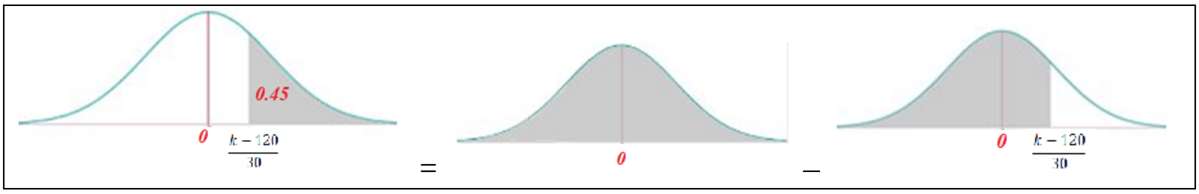
$$\dots=P(Z\geq 1.5)=1-P(Z<1.5)=\{\text{Miro en la tabla de la N(0, 1)}\}=1-0.9332=\boxed{0.0668}$$



k	0.00	0.
0.0	0.[illegible]000	0.5
0.1	0.[illegible]398	0.5
0.2	0.[illegible]793	0.5
0.3	0.[illegible]179	0.6
0.4	0.[illegible]554	0.6
0.5	0.[illegible]915	0.6
0.6	0.[illegible]257	0.7
0.7	0.[illegible]580	0.7
0.8	0.[illegible]881	0.7
0.9	0.[illegible]159	0.8
1.0	0.[illegible]413	0.8
1.1	0.[illegible]643	0.8
1.2	0.[illegible]849	0.8
1.3	0.[illegible]032	0.9
[illegible]	[illegible]	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	[illegible]	0.9

b) Nos dicen que $P(X>k)=0.45$ y nos piden que averigüemos el valor de k.

$$P(X>k)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{k-120}{30}\right)=P\left(Z>\frac{k-120}{30}\right)=0.45\Rightarrow$$



$$1-P\left(Z\leq\frac{k-120}{30}\right)=0.45\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{k-120}{30}\right)=1-0.45=0.55$$

Buscamos la probabilidad 0.55 en la tabla de la N(0, 1)

$$\frac{k-120}{30}=\frac{0.12+0.13}{2}=0.125\Rightarrow k-120=3.75\Rightarrow \boxed{k=123.75}$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	[illegible]
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.1	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.5478}$	$\boxed{0.5517}$	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	[illegible]

El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a 123.75 $\mu g/dl$