EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v\in\mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.
2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.
3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.
4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=x^2$

1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*. Llamaremos a dicha recta *g(x)*.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas *g(x)*, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ y el eje OX de abscisas.
3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva *F(x)* de la función *f(x)*.
4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f(x)*, y las rectas *g(x)*, $x=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto A = (1, 2, 8) hacia la posición de la base enemiga B = (3, 4, 0).

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.
3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.
4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, *I(t)*, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & si \;\; t < 1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & si \;\; t \geq 1 \end{cases}$, siendo *k* una constante real, *t* el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de *k* para que *I(t)* sea continua.
2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.
3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t = \dfrac{1}{2}$.
4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t = 2$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1), B = (2, 3, 3)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π.

3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π, y la recta que pasa por los puntos A y B.

4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v\in\mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.

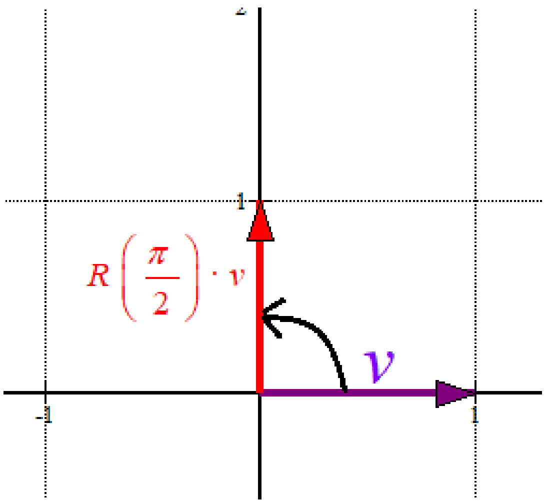
3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$.

1)

Si $\theta=\frac{\pi}{2}$ entonces $R\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

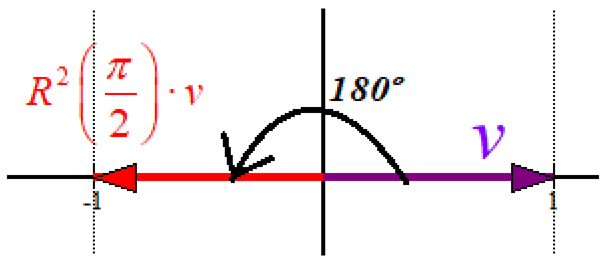
$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot v=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



2)

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot v=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



3) Calculamos su determinante y vemos que no se anula.

$$|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$$

La matriz $R(\theta)$ tiene inversa para cualquier valor de θ.

4)

$$R^{-1}(\theta) = \frac{Adj(R(\theta))}{|R(\theta)|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\right)}{1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Se cumple que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = x^2$

1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*. Llamaremos a dicha recta *g(x)*.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas *g(x)*, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ y el eje OX de abscisas.

3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva *F(x)* de la función *f(x)*.

4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f(x)*, y las rectas *g(x)*, $x = \frac{1}{2}$.

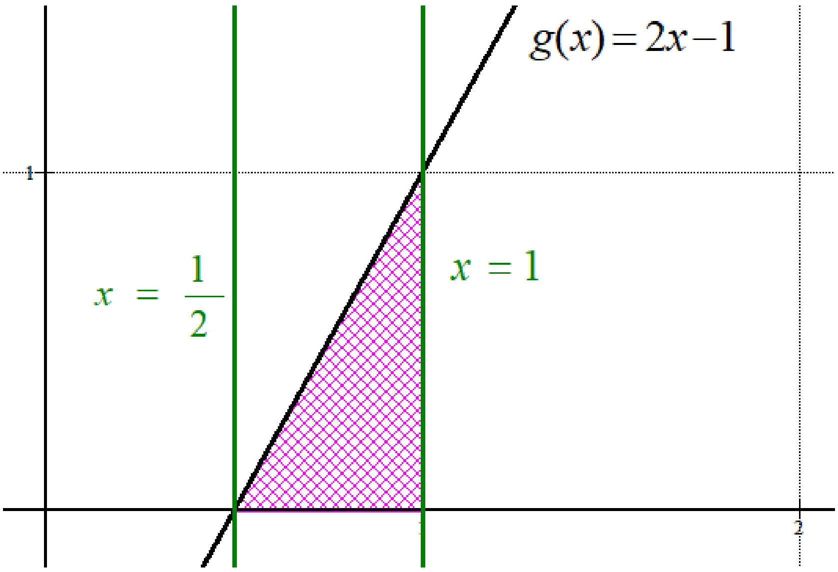
1) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1* tiene ecuación $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = 1^2 = 1 \\ f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

La recta es $g(x) = 2x - 1$

2) Dibujamos la región

x	$g(x) = 2x - 1$
$1/2$	0
1	1



Esta región es un triángulo de base 0.5 y de altura 1.

Su área es $\frac{0.5 \cdot 1}{2} = \boxed{0.25\, u^2}$

3) $F(x) = \int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$

Una primitiva puede ser tomando K = 0 → $F(x) = \frac{x^3}{3}$

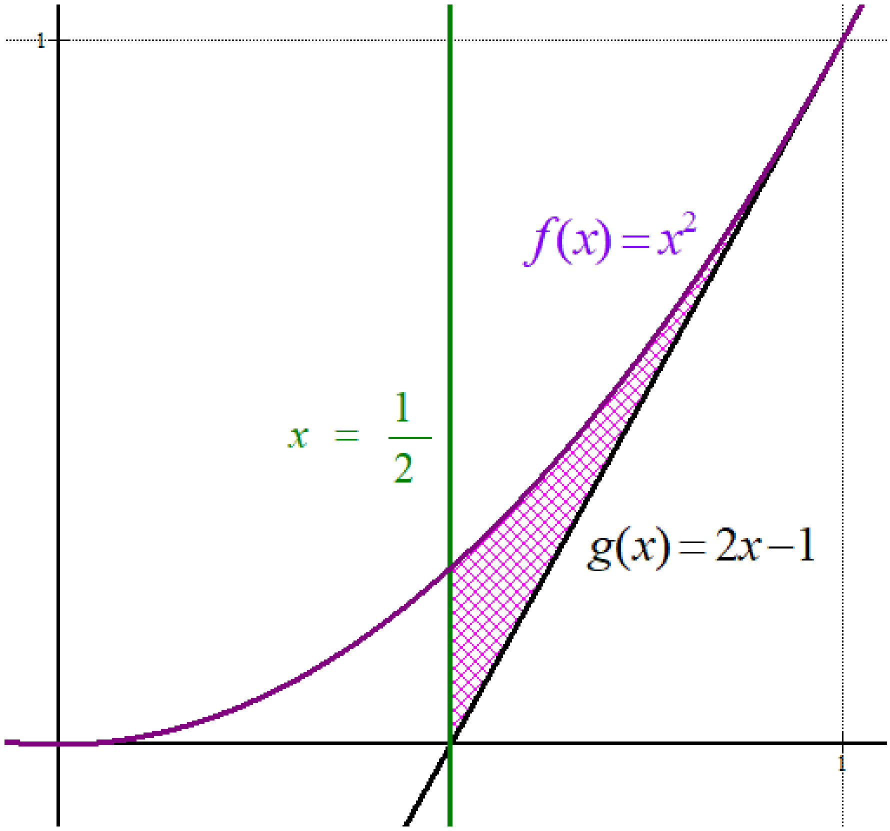
4) Vemos donde se cortan las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=2x-1 \\ g(x)=f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=1$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre 0.5 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\acute{A}rea=\int_{1/2}^{1} x^2-(2x-1)\,dx=\int_{1/2}^{1} x^2-2x+1dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1^3}{3}-1^2+1\right]-\left[\frac{0.5^3}{3}-0.5^2+0.5\right]=\frac{1}{3}-\frac{0.125}{3}-0.25=\frac{1-0.125-0.75}{3}=\boxed{\frac{1}{24}\simeq 0.042\,u^2}$$



Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto A = (1, 2, 8) hacia la posición de la base enemiga B = (3, 4, 0).

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

1)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (3,4,0)-(1,2,8) = (2,2,-8) \\ B = (3,4,0) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 4+2t \\ z = -8t \end{cases}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 4+2t \\ z = -8t \end{cases} \\ Plano \equiv z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -8t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \\ y = 4+2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \\ z = -8\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \end{cases}$$

El misil cruza el plano en el punto P(2,3,4).

3) Esa distancia es el módulo del vector que une ambos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (3,4,0)-(1,2,8) = (2,2,-8)$$

$$\text{Distancia de A a B} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+2^2+(-8)^2} = \sqrt{72} = \boxed{8.485\,u}$$

4) Un vector perpendicular es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OB} = (3,4,0) \\ \overrightarrow{AB} = (2,2,-8) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 24\vec{j} - 2\vec{k} = (-32, 24, -2)$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$ es $\vec{u} = (-32, 24, -2)$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

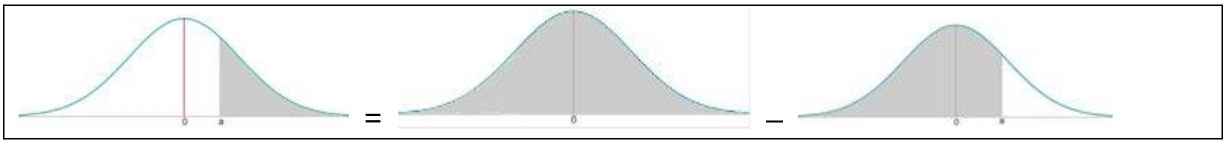
1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

X = Concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado.

X = N(600, 200)

1) $P(X > 1000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1000-600}{200}\right) = P(Z > 2) = ...$



$$... = 1 - P(Z < 2) = \{\text{Miro en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

2) Llamamos "a" al nivel de testosterona para el cual $P(X > a) = \frac{1}{1000} = 0.001$.

$$P(X > a) = 0.001 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-600}{200}\right) = 0.999 \Rightarrow \{\text{Miro en la tabla N}(0,1)\} \Rightarrow \frac{a-600}{200} = 3.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 600 = 620 \Rightarrow \boxed{a = 1220}$$

El nivel de testosterona debería ser 1220 ng/dl

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

El sistema tiene matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \sqrt{4} = \pm 2$$

Analizamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $\lambda \neq 2 \ y \ \lambda \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

Utilizamos Cramer para resolverlo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda - 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda + 2\lambda - 2}{-\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda - 2}{-\lambda^2 + 4} = \frac{\cancel{\lambda - 2}}{-\cancel{(\lambda - 2)}(\lambda + 2)} = \boxed{\frac{-1}{\lambda + 2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda - 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda - 4}{-\lambda^2 + 4} = \frac{2(\lambda^2 - \lambda - 2)}{-(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{2(\lambda + 1)\cancel{(\lambda - 2)}}{-\cancel{(\lambda - 2)}(\lambda + 2)} = \boxed{\frac{-2\lambda - 2}{\lambda + 2}}$$

CASO 2. $\lambda = 2$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante se anula, el rango de A es 1.

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1 pues la columna 3ª es proporcional a la 1ª.

El rango de A y el de A/B es 1, menor que el número de incógnitas (2). El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x-y=1 \Rightarrow y=2x-1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$$

CASO 3. $\lambda=-2$

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y su determinante se anula, el rango de A es 1.

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la columna 1ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 6-2=4\neq 0$.

El rango de A es 1 y el de A/B es 2, como los rangos son distintos el sistema no tiene solución.

Escribo las respuestas a las preguntas del ejercicio.

1) Para $\lambda=2$ el sistema tiene infinitas soluciones.
Las soluciones son $x=t;\ \ y=2t-1\ \ siendo\ \ t\in\mathbb{R}$

2) Para $\lambda\neq 2\ y\ \lambda\neq -2$ el sistema tiene solución única.
Las soluciones son $x=\dfrac{-1}{\lambda+2}$ e $y=\dfrac{-2\lambda-2}{\lambda+2}$

3) Para $\lambda=-2$ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, *I(t)*, viene dada por la función $I(t)=\begin{cases} ke^{2t} & si\ \ t<1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & si\ \ t\geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que *I(t)* sea continua.
2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t\to\infty$.
3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t=\dfrac{1}{2}$.
4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t = 2$.

1) La función es continua tanto en $(-\infty,1)$ por ser una función exponencial con base positiva como en $(1,+\infty)$ por ser un cociente de funciones polinómicas, con un denominador que no se anula en el dominio, pues $3t^2+1=0 \Rightarrow t^2=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow t=\sqrt{-\dfrac{1}{3}}$ ¡*No existe*!

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} I(1)=\dfrac{1^2}{3\cdot 1^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{t\to 1^-} I(t)=\lim\limits_{t\to 1^-} ke^{2t}=ke^2 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} I(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{t^2}{3t^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{t\to 1^-} I(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} I(t)=I(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}=ke^2 \Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{4e^2}}$$

2) $$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{3t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{t^2}{t^2}}{\frac{3t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\infty}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

Cuando $t\to\infty$ la proporción de personas infectadas es 1 de cada 3.

3) Calculamos *I ´(1/2)*.

En el entorno de 1/2 la función es $I(t)=\dfrac{1}{4e^2}e^{2t}$.

$$I(t)=\frac{1}{4e^2}e^{2t} \Rightarrow I'(t)=2\frac{1}{4e^2}e^{2t}=\frac{1}{2e^2}e^{2t} \Rightarrow I'(1/2)=\frac{1}{2e^2}e^{2\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{2e}}$$

4) Calculamos *I ´(2)*.

En el entorno de 2 la función es $I(t)=\dfrac{t^2}{3t^2+1}$.

$$I'(t)=\frac{2t\left(3t^2+1\right)-t^2\cdot 6t}{\left(3t^2+1\right)^2}=\frac{6t^3+2t-6t^3}{\left(3t^2+1\right)^2}=\frac{2t}{\left(3t^2+1\right)^2} \Rightarrow I'(2)=\frac{4}{\left(3\cdot 2^2+1\right)^2}=\boxed{\frac{4}{169}}$$

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano *Π = 2x + 3y − 4z = 10* y los puntos *A = (1, 2, 1)*, *B = (2, 3, 3)*.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.

2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π.

3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π, y la recta que pasa por los puntos A y B.

4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

1)

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(2,3,3)-(1,2,1)=(1,1,2)\\ B=(2,3,3)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases}x=2+t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}}$$

2) $\Pi\equiv 2x+3y-4z=10\Rightarrow \boxed{\vec{n}=(2,3,-4)}$

3) Vemos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares. Para ello compruebo si su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(2,3,-4)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(2,3,-4)(1,1,2)=2+3-8=-2\neq 0$$

Los vectores no son perpendiculares y por tanto la recta *r* y el plano Π son secantes, coinciden en un punto.

4) Un plano Π´ paralelo a $\Pi\equiv 2x+3y-4z=10$ tiene ecuación $\Pi'\equiv 2x+3y-4z=D$.

Como contiene el punto A las coordenadas del punto deben cumplir la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{r}\Pi'\equiv 2x+3y-4z=D\\ A=(1,2,1)\in\Pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2+6-4=D\Rightarrow D=4\Rightarrow \boxed{\Pi'\equiv 2x+3y-4z=4}$$

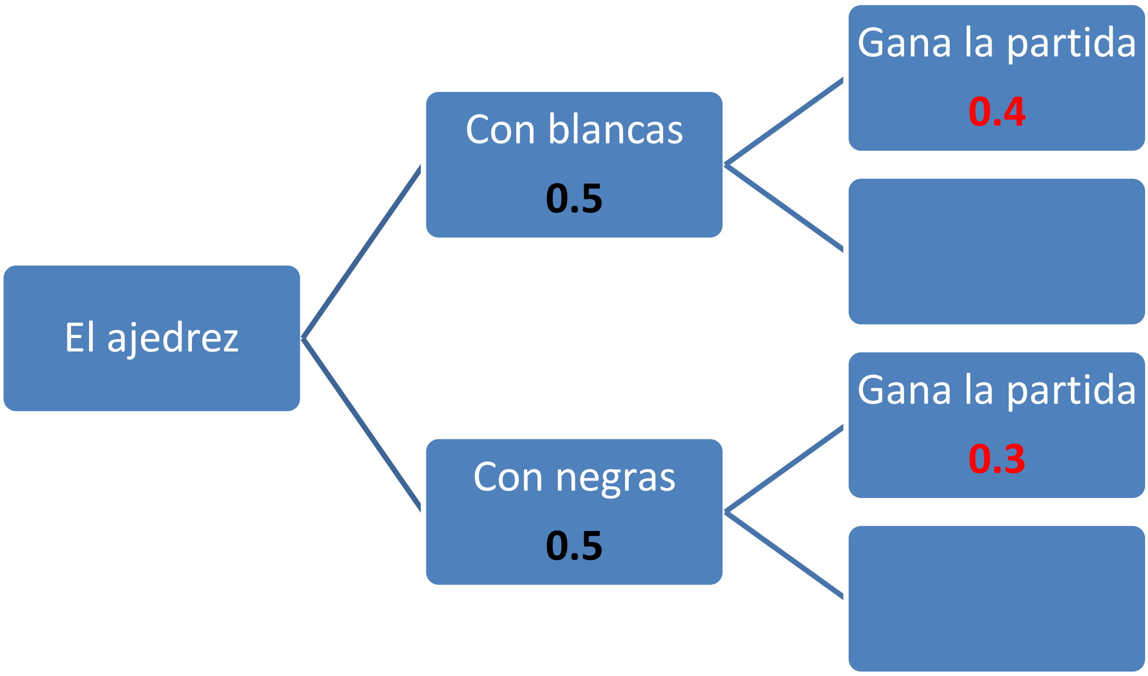
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B = "Jugar con blancas", $\overline{B}$ ="Jugar con negras". G = "Ganar la partida", $\overline{G}$ = "Perder la partida".

1) Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(B \cap G) + P(\overline{B} \cap G) =$$
$$= P(B)P(G/B) + P(\overline{B})P(G/\overline{B}) = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.35}$$

2) Es una probabilidad a posteriori. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B)P(G/B)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.35} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0.57}$$