

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)UNIVERSIDAD DE CATALUÑAJUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS IITiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Considere la parábola  $y = f(x) = 4 - x^2$  y un valor  $a > 0$ .

a) Comprueba que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa  $x = a$  es  $y = -2ax + a^2 + 4$  y calcule los puntos en que corta esta recta tangente a los ejes de coordenadas.

b) Calcule el valor de  $a > 0$  para que el área del triángulo determinado por la recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.

a)

Para  $x = a$  es  $f(a) = 4 - a^2$ , por lo cual el punto de tangencia es  $P(a, 4 - a^2)$ .

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(a) \Rightarrow m = -2a.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , que aplicada al punto  $P(a, 4 - a^2)$  con  $m = -2a$  es:

$$y - (4 - a^2) = -2a(x - a); \quad y - 4 + a^2 = -2ax + 2a^2.$$

Queda comprobado que la recta tangente es  $y = -2ax + a^2 + 4$ .

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los siguientes puntos:

$$X \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2ax + a^2 + 4 = 0; \quad x = \frac{a^2+4}{2a} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)}.$$

$$Y \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y = a^2 + 4 \Rightarrow \underline{N(0, a^2 + 4)}.$$

b)

Por ser rectángulo el triángulo de vértices  $OMN$ , su área es la mitad del producto de sus catetos:

$$S_{OMN}(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)^2}{a}.$$

Para que el área sea mínima tiene que anularse su primera derivada y ser positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'_{OMN}(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot (a^2+4) \cdot 2a] \cdot a - (a^2+4)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot [4a^2 - (a^2+4)]}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot (3a^2-4)}{a^2}.$$

$$S'_{OMN}(a) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot (3a^2-4)}{a^2} = 0; \quad (a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4) = 0.$$

$$\text{Por ser } a^2 + 4 \neq 0, \forall a \in R \Rightarrow 4a^2 - 1 = 0; \quad 3a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} S''_{OMN}(a) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{[2a \cdot (3a^2-4) + (a^2+4) \cdot 6a] \cdot a^2 - [(a^2+4) \cdot (3a^2-4)] \cdot 2a}{a^4} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(6a^3-8a+6a^3+24a) \cdot a - 2 \cdot (3a^4-4a^2+12a^2-16)}{a^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(12a^3+16a) \cdot a - 2 \cdot (3a^4+8a^2-16)}{a^3} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{12a^4+16a^2-6a^4+16a^2+32}{a^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6a^4+32a^2+32}{a^3} \Rightarrow S''_{OMN}(a) = \frac{3a^4+16a^2+16}{2a^3}. \end{aligned}$$

La solución  $a_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$  carece de sentido lógico.

$$S''_{OMN}(a > 0) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } a = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

El área del triángulo es mínima para  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

\*\*\*\*\*

2º) Considere el sistema  $\left. \begin{array}{l} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\}$ , dependiente del parámetro real  $p$ .

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro  $p$ .

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de  $p = 2$ .

-----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $p$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p^2 + 2 + 2p^2 - 2p - p^3 - 2 = 0; \quad p^3 - 3p^2 + 2p = 0;$$

$$p(p^2 - 3p + 2) = 0 \Rightarrow p_1 = 0. \quad p^2 - 3p + 2 = 0; \quad p = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = 1, p_3 = 2.$$

$$\text{Para } \begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq 1 \\ p \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S. C. D.}$$


---

$$\text{Para } p = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } p = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - 4 - 1 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$


---

$$\text{Para } p = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2$$

$$\underline{\text{Para } p = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

b)

Para  $p = 2$  el sistema resulta:  $\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\}$ , que es compatible indeterminado y equivalente al sistema:  $\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array} \right\}$ . Haciendo  $z = \lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow y = -1 - 3\lambda.$$

$$2x + y = 2 - \lambda; \quad 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda; \quad 2x = 3 + 2\lambda; \quad x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

\*\*\*\*\*

3º) Sean el punto  $P(-1, 3, 1)$ , el plano  $\pi \equiv x = y$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$ .

a) Calcule las coordenadas del punto  $P'$  simétrico a  $P$  con respecto al plano  $\pi$ .

b) De todos los planos que contienen a la recta  $r$ , encuentra la ecuación cartesiana del plano  $\beta$  que es perpendicular al plano  $\pi$ .

a)

La recta  $t$  que pasa por  $P(-1, 3, 1)$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x - y = 0$  tiene como vector director al vector normal de  $\pi$ :  $\vec{n} = (1, -1, 0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ .

El punto  $M$ , intersección del plano  $\pi$  con la recta  $t$  es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x - y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0;$$

$$-1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1, 1, 1).$$

Tiene que cumplirse que  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$ .

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(1, 1, 1) - (-1, 3, 1)] = (2, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = (x - 1, y - 1, z - 1).$$

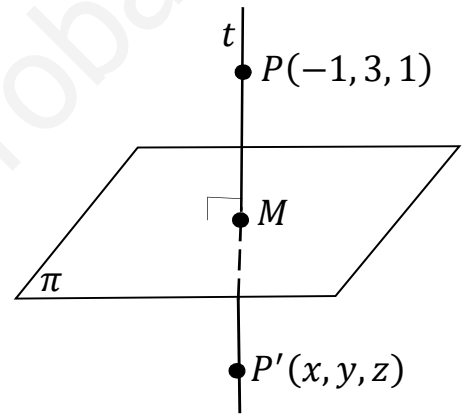
$$(2, -2, 0) = (x - 1, y - 1, z - 1) \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ y - 1 = -2 \rightarrow y = -1 \\ z - 1 = 0 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{P'(3, -1, 1)}.$$

b)

Un punto y un vector director de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$  son  $Q(1, 0, 2)$  y  $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ .

El haz de planos  $\gamma$  que contienen a la recta  $r$  y son perpendiculares al plano  $\pi$  tienen como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial del vector director de la recta  $r$  y del vector normal del plano  $\pi$ .

$$\vec{n}'_{\gamma} = \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k + 2k - j = -i - j + 5k \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec{n}_\gamma = (1, 1, -5).$$

El haz de planos  $\gamma$  tiene por expresión general:  $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0$ .

De los infinitos planos del haz  $\gamma$ , el plano  $\beta$ , que contiene al punto  $Q(1, 0, 2)$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x + y - 5z + D = 0 \\ Q(1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 - 5 \cdot 2 + D = 0; \quad D - 9 = 0 \Rightarrow D = 9.$$

$$\underline{\beta \equiv x + y - 5z + 9 = 0.}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

4º) Sea la función  $f(x) = \frac{Lx}{x}$  definida en el dominio  $x > 0$ , donde  $L$  es el logaritmo neperiano.

a) Calcule las coordenadas de un punto de la curva  $y = f(x)$  en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en ese punto.

b) Determine si la función  $f(x)$  tiene alguna asíntota horizontal.

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $x = 1$  y  $x = e$ . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio  $0 < x < 5$ , en el que queda representada el área que ha calculado.

-----

a)

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto. La pendiente de una recta horizontal es  $m = 0$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lx \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - Lx}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - Lx}{x^2} = 0; \quad 1 - Lx = 0; \quad Lx = 1 \Rightarrow x = e.$$

$$f(e) = \frac{Le}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{P\left(e, \frac{1}{e}\right)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que se anule su primera derivada en ese punto; esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el extremo relativo es necesario que no se anule la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - Lx) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x \cdot (1 - Lx)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \cdot (1 - Lx)}{x^3} = \frac{-1 - 2 + 2Lx}{x^3} = \frac{2Lx - 3}{x^3}.$$

$$f''(e) = \frac{2Le - 3}{e^3} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = e.$$

La función  $f(x)$  tiene un máximo relativo en  $P\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .

b)

Las asíntotas horizontales son de la forma  $y = k$ ; son los valores finitos de la función cuando  $x$  tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \underline{\text{La recta } y = 0 \text{ (eje X) es asíntota horizontal para } x > 0.}$$

c)

En primer lugar, se hace la representación gráfica, aproximada, de la función.

Asíntotas:  $y = 0$ ;  $x = 0$ . Máximo:  $P\left(e, \frac{1}{e}\right) \approx (2,7; 0,37)$ .

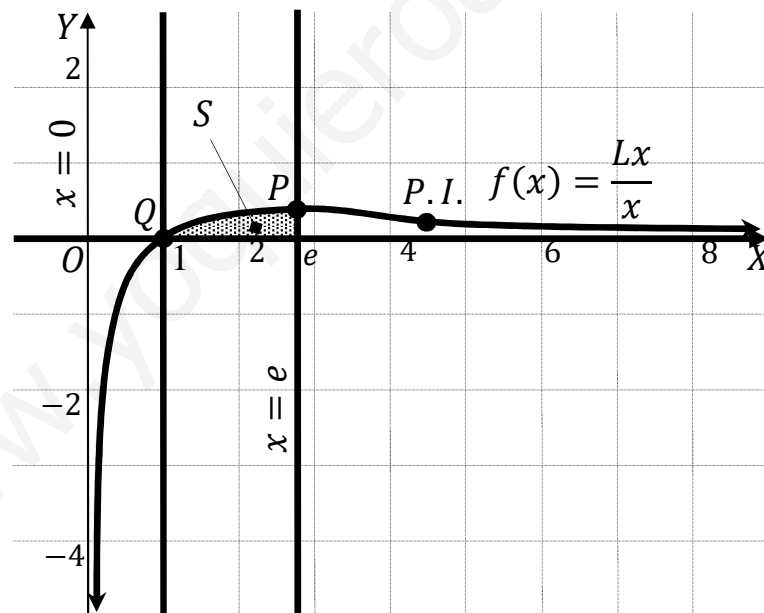
Se trata de una función continua en su dominio  $(0, +\infty)$ , creciente para  $x < e$  y decreciente para  $x > e$  por tener un máximo (absoluto) para  $x = e$ .

Para  $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow Q(1, 0)$ .

De la expresión de la segunda derivada se deduce que tiene un punto de inflexión para  $2Lx = 3$ , por ser:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2Lx-3}{x^3} = 0; \quad 2Lx - 3 = 0 \Rightarrow 2Lx = 3; \quad x = e^{\frac{3}{2}} \cong 4,5.$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{2e^2} \cong \frac{1}{3} = 0,33 \Rightarrow P.I.\left(e\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right) \approx (5,5; 0,33).$$



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{Lx}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = t \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \cdot dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} u^2 = 0,5 u^2 = S.$$

\*\*\*\*\*



5º) a) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , resuelve la ecuación matricial  $A^2X = A - 3I$ , donde  $I$  es la matriz identidad.

b) Una matriz cuadrada  $M$  satisface que  $M^3 - 3M^2 + 3M - I = O$ , donde  $I$  es la matriz identidad. Justifique que  $M$  es invertible y exprese la inversa de  $M$  en función de las matrices  $M$  e  $I$ .

a)

$$A^2X = A - 3I; (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I);$$

$$I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \Rightarrow \underline{X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I)}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de  $A^2$  por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^2|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = O; M^3 - 3M^2 + 3M - O = I;$$

$$M^3 - 3M^2 + 3M = I; M \cdot (M^3 - 3M^2 + 3M) = I.$$

Por el concepto de inversa de una matriz:

$$M \cdot M^{-1} = I, \text{ de donde se deduce que: } M^{-1} = M^3 - 3M + 3I.$$

Teniendo en cuenta que el módulo del producto de dos matrices es igual al producto de sus módulos y que  $|I| = 1$ :

$$|M \cdot M^{-1}| = |I| = 1; \quad |M| \cdot |M^{-1}| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |M| \neq 0 \\ |M^{-1}| \neq 0 \end{cases}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Queda probado que:

$$\underline{M \text{ es invertible y } M^{-1} = M^3 - 3M + 3I.}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

6º) Considere la función  $f(x) = e^{x-1} - x - 1$ .

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Demuestre que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene exactamente dos soluciones reales entre  $x = -1$  y  $x = 3$ .

-----

a)

La función  $f(x)$  es continua en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , por ser la suma algebraica de funciones continuas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = e^{x-1} - 1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x-1} - 1 = 0; e^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 0; x = 1.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Crecimiento: } x > 1 \in (1, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Decrecimiento: } x < 1 \in (-\infty, 1)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^{x-1}.$$

$$f''(1) = e^{1-1} = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo absoluto para } x = 1.$$

$$f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \text{Mín.} \Rightarrow \underline{P(1, -1)}.$$

b)

Se sabe del apartado anterior que la función es continua en su dominio y que presenta un mínimo absoluto para  $x = 1$ .

Dividiendo el intervalo dado,  $(-1, 3)$ , en los intervalos  $(-1, 1)$  y  $(1, 3)$ , a la función  $f(x)$  le es aplicable el teorema de Bolzano en cada uno de los dos últimos intervalos.

El teorema de Bolzano dice que “si  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$  y

toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ ".

$$(-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

Por ser  $f(x)$  monótona decreciente en  $(-1, 1)$ , demuestra que:

La ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única raíz real en  $(-1, 1)$ .

$$(1, 3) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4,39 > 0 \end{cases}.$$

Por ser  $f(x)$  monótona creciente en  $(1, 3)$ , demuestra que:

La ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única raíz real en  $(1, 3)$ .

Queda demostrado que  $f(x) = 0$  tiene exactamente dos raíces reales en  $(1, 3)$ .

\*\*\*\*\*