Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Demostrar que la matriz $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2+\lambda_1 M+\lambda_2 I=0$ y determinar los escales λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\lambda\\ x-\lambda y&=\lambda\\ \lambda x-y&=\lambda\end{aligned}\right\}.$$

3. Dados el plano $\Pi\equiv kx+y-z=0$ y la recta $r\equiv\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$.

a) Determinar los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a *r*. (1 punto)

b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman Π y *r*. (1 punto)

4. Sea el plano $\Pi\equiv x+y+z=1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

5. Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x)=e^{-x^2}$. (2 puntos)

6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

7. Calcular la integral racional (2 puntos)

$$\int\frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$$

8. Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 2]. (0,5 puntos)

b) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

9. Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B. Compra el 40% a la marca A que tiene un 3% de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1% de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa. (1 punto)

b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A. (1 punto)

10. Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica de 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

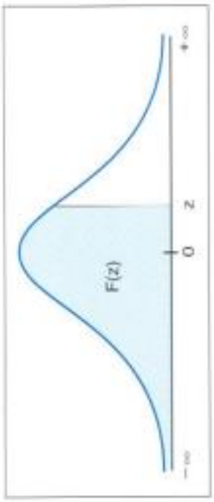
a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5). (1 punto)

b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas. (1 punto)

Tabla de distribución

normal *N(0,1)*

F(z)= P(Z ≤ z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Demostrar que la matriz $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2+\lambda_1 M+\lambda_2 I=0$ y determinar los escales λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

$$M^2+\lambda_1 M+\lambda_2 I=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}4+1 & 2+2\\ 2+2 & 1+4\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}5+2\lambda_1+\lambda_2 & 4+\lambda_1\\ 4+\lambda_1 & 5+2\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases}5+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ 4+\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}5+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \boxed{\lambda_1=-4}\end{cases}\Rightarrow 5-8+\lambda_2=0\Rightarrow \boxed{\lambda_2=3}$$

La solución es $\lambda_1=-4;\ \lambda_2=3$.

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x- \ y=\lambda \\ x-\lambda y=\lambda \\ \lambda x-y=\lambda \end{array}\right\}.$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de A/B. Calculamos su determinante para ver cuando su rango es 3.

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2-\lambda^2-\lambda+\lambda^3+\lambda+\lambda=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda$$

$$|A/B|=0 \Rightarrow \lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ o \\ \lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=1 \end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 0 \ y \ \lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A/B es no nulo y su rango es 3, siendo el rango de A a lo sumo 2. Al ser distintos el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

CASO 2. $\lambda = 0$

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} x- \ y=0 \\ x=0 \\ -y=0 \end{array}\right\}$ Se obtiene fácilmente la solución: $x=y=0$. El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 3. $\lambda = 1$

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x-y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=y+1$.

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Las soluciones son: $x=1+t; \ \ y=t \quad siendo \, t \in \mathbb{R}$

3. Dados el plano $\Pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a *r*. (1 punto)
b) Para *k* = *0*, calcular el ángulo que forman Π y *r*. (1 punto)

a) Para que la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares y además uno de sus puntos debe estar en el plano.

$$\left.\begin{array}{r} \Pi \equiv kx + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (k,1,-1) \\ r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,-1) \\ \vec{n} \perp \vec{v_r} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (k,1,-1)(2,1,-1) = 0 \Rightarrow 2k + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

Comprobamos que el punto P(4, 2, –2) de la recta *r* pertenece al plano:

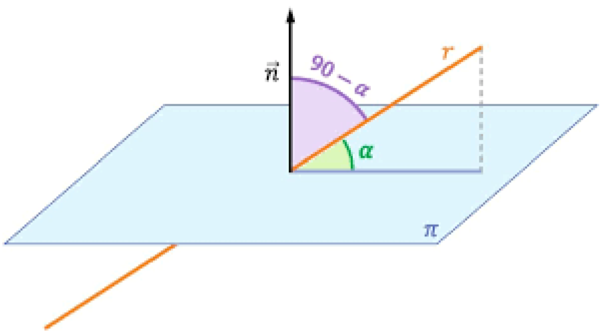
$$\left.\begin{array}{r} \Pi \equiv -x + y - z = 0 \\ ¿P(4,2,-2) \in \Pi ? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-4 + 2 - (-2) = 0? \text{ ¡¡}SI\text{!!}$$

Para *k* = *–1* la recta está contenida en el plano Π.

b) Para *k* = *0* el plano es $\Pi \equiv y - z = 0$. Como hemos visto antes el vector normal del plano y el director de la recta ya no son perpendiculares y recta y plano serán secantes.
Calculamos el ángulo que forman vector normal del plano y director de la recta.

$$\left.\begin{array}{r} \Pi \equiv y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0,1,-1) \\ r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n}, \vec{v_r}\right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v_r}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{v_r}\right|}$$

$$\cos\left(\vec{n}, \vec{v_r}\right) = \frac{(0,1,-1)(2,1,-1)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} \Rightarrow \left(\vec{n}, \vec{v_r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \simeq 54^{\circ}$$

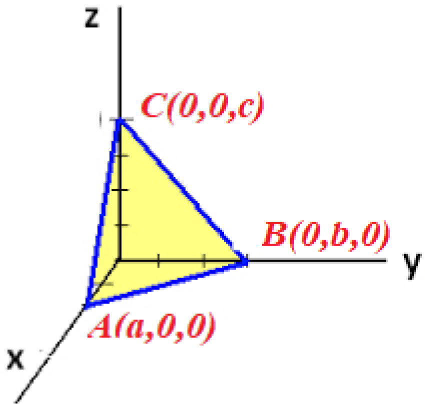


El ángulo que forman recta y plano es de aproximadamente 90º – 54º = 36º.

4. Sea el plano $\Pi \equiv x+y+z=1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

Un plano paralelo tiene ecuación $\Pi' \equiv x+y+z+k=0$.

Hallamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes tienen coordenadas.



$$\left.\begin{array}{r}\Pi' \equiv x+y+z+k=0\\ y=z=0\end{array}\right\} \Rightarrow x+k=0 \Rightarrow x=-k \Rightarrow A(-k,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\Pi' \equiv x+y+z+k=0\\ x=z=0\end{array}\right\} \Rightarrow y+k=0 \Rightarrow y=-k \Rightarrow B(0,-k,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\Pi' \equiv x+y+z+k=0\\ x=y=0\end{array}\right\} \Rightarrow z+k=0 \Rightarrow z=-k \Rightarrow C(0,0,-k)$$

Hallamos el área del triangulo formado por los tres puntos.

Esta área es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,-k,0)-(-k,0,0)=(k,-k,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,0,-k)-(-k,0,0)=(k,0,-k)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ k & -k & 0\\ k & 0 & -k\end{vmatrix}=(k^2,k^2,k^2)$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{k^4+k^4+k^4}}{2}=\frac{\sqrt{3k^4}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k^2$$

Como el área debe ser $2\sqrt{3}$.

$$Área=2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}k^2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=k^2 \Rightarrow k^2=4 \Rightarrow k=\pm 2$$

Los planos que cumplen la condición pedida son $\Pi' \equiv x+y+z+2=0$ y $\Pi'' \equiv x+y+z-2=0$

5. Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x)=e^{-x^2}$. (2 puntos)

La función $f(x)=e^{-x^2}$ tiene como dominio $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene, pues el dominio son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

Para el estudio de la monotonía usamos la derivada.

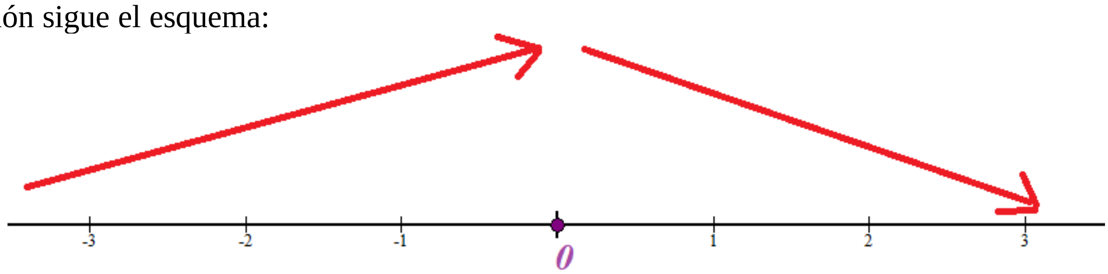
$$f(x)=e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ e^{-x^2}=0 \text{ ¡IMPOSIBLE!} \end{cases}$$

Vemos como es la monotonía antes y después de $x=0$.

- En $(-\infty,0)$ tomo $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=2e^{-1}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomo $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=-2e^{-1}<0$. La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=0$.

Como $f(0)=e^{-0^2}=1$ el máximo relativo tiene coordenadas (0, 1).

Para estudiar los puntos de inflexión utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (-2+4x^2)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (-2+4x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2+4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Estudiamos la curvatura de la función antes, entre y después de estos valores.

- En $\left(-\infty, -\sqrt{0.5}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = \left(-2+4(-1)^2\right)e^{-(-1)^2} = 2e^{-1} > 0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\infty, -\sqrt{0.5}\right)$
- En $\left(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = (-2+0)e^{-0^2} = -2 < 0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}\right)$.
- En $\left(\sqrt{0.5}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = (-2+4)e^{-1^2} = 2e^{-1} > 0$. La función es convexa (∪) en $\left(\sqrt{0.5}, +\infty\right)$

La función presenta puntos de inflexión (cambio de curvatura) en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

Como $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=2-x^2-e^x$

Cuando la función *h(x)* se anule significa que las funciones *f(x)* y *g(x)* se cortan.

La función *h(x)* es continua en todo su dominio ($\mathbb{R}$).

Localizamos los cambios de signo de la función.

$$h(0)=2-0^2-e^0=2-1=1>0$$

$$h(1)=2-1^2-e^1=1-e\simeq -1.71<0$$

En el intervalo [0, 1] podemos aplicar el teorema de Bolzano, pues la función es continua en el intervalo y cambia de signo de un extremo del intervalo al otro, por lo que existe $c\in(0,1)$ tal que $h(c)=0\Rightarrow f(c)-g(c)=0\Rightarrow f(c)=g(c)$

Repetimos el razonamiento.

$$h(-2)=2-(-2)^2-e^{-2}=-2-e^{-2}\simeq -2.1<0$$

$$h(-1)=2-(-1)^2-e^{-1}=2-1-e^{-1}=0.63>0$$

Volviendo a aplicar el teorema de Bolzano para el intervalo [–2, –1] debe de existir un valor $d\in(-2,-1)$ tal que $h(d)=0\Rightarrow f(d)-g(d)=0\Rightarrow f(d)=g(d)$.

Como los valores *c* y *d* pertenecen a intervalos disjuntos no pueden ser iguales y queda comprobado que las dos funciones se cortan al menos en 2 puntos. Siendo los intervalos que los contienen de longitud 1.

7. Calcular la integral racional (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$$

Primero descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1-3}{2}=-2\\ \frac{-1+3}{2}=1\end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{3x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$3x=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow\begin{cases}x=1\rightarrow 3=3B\Rightarrow B=1\\ x=-2\rightarrow -6=-3A\rightarrow A=2\end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}$$

Lo aplicamos a la integral.

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx=\int \frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}\,dx=\int \frac{2}{x+2}\,dx+\int \frac{1}{x-1}\,dx=\boxed{2\ln|x+2|+\ln|x-1|+C}$$

También se puede expresar como $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx=\ln\left((x+2)^2|x-1|\right)+C$

8. Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 2]. (0,5 puntos)

b) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

a) Vemos donde se cortan las funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \sqrt{x}=x^2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x^2\right)^2\Rightarrow x=x^4\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow$$

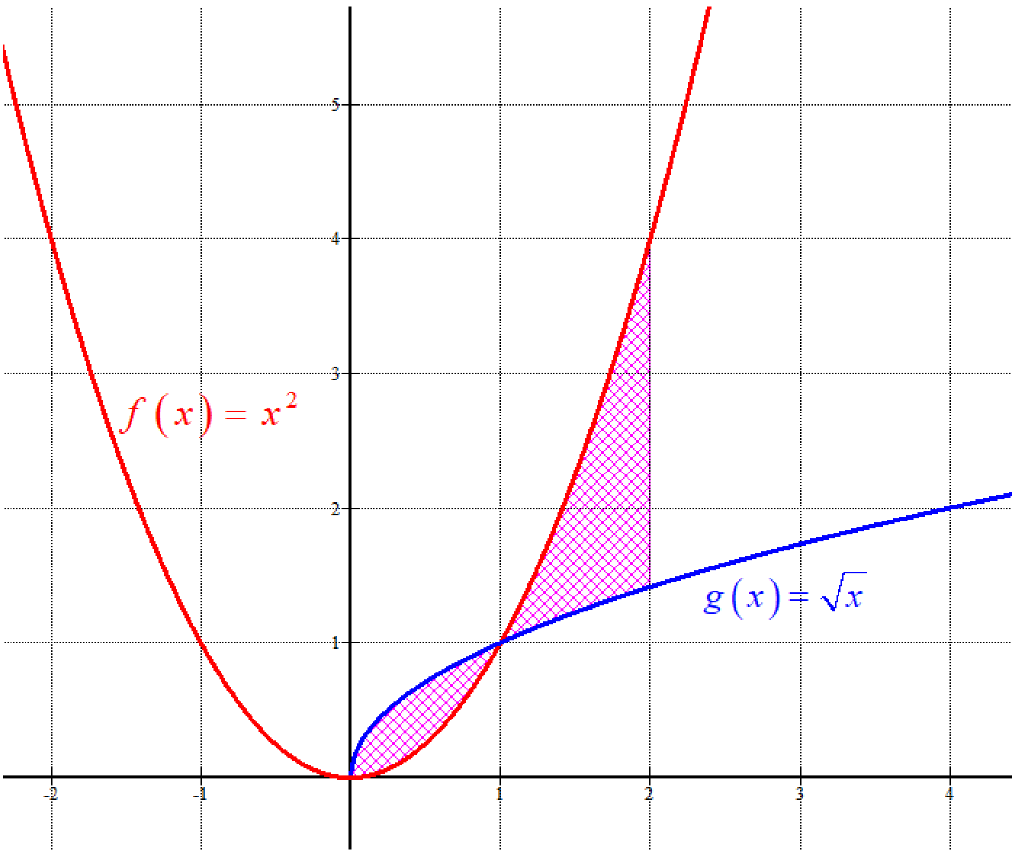
$$\Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ o\\ x^3-1=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1\end{cases}$$

La función $f(x)=x^2$ es una parábola, con una tabla de valores la dibujamos.

La función $g(x)=\sqrt{x}$ tiene como dominio los números reales positivos. Damos una tabla de valores y representamos la región de la cual nos piden su área.

x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$y=\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2



b) El valor del área se puede aproximar contando cuadraditos (1 u^2) en el dibujo.
El área de la región coloreada de rosa es un poco más de una unidad cuadrada.
Obtenemos su área de forma precisa haciendo uso del cálculo integral.

De los valores de corte uno está en el extremo inferior del intervalo y el otro pertenece al intervalo el recinto lo calculamos con la suma del valor absoluto de dos integrales definidas, una entre 0 y 1 y la otra entre 1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^1 \sqrt{x}-x^2dx=\int_0^1 x^{1/2}-x^2dx=\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{2\sqrt{0^3}}{3}-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}-x^2dx=\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left[\frac{2\sqrt{2^3}}{3}-\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3}-\frac{1^3}{3}\right]=\frac{4\sqrt{2}-8-2+1}{3}=\frac{4\sqrt{2}-9}{3}$$

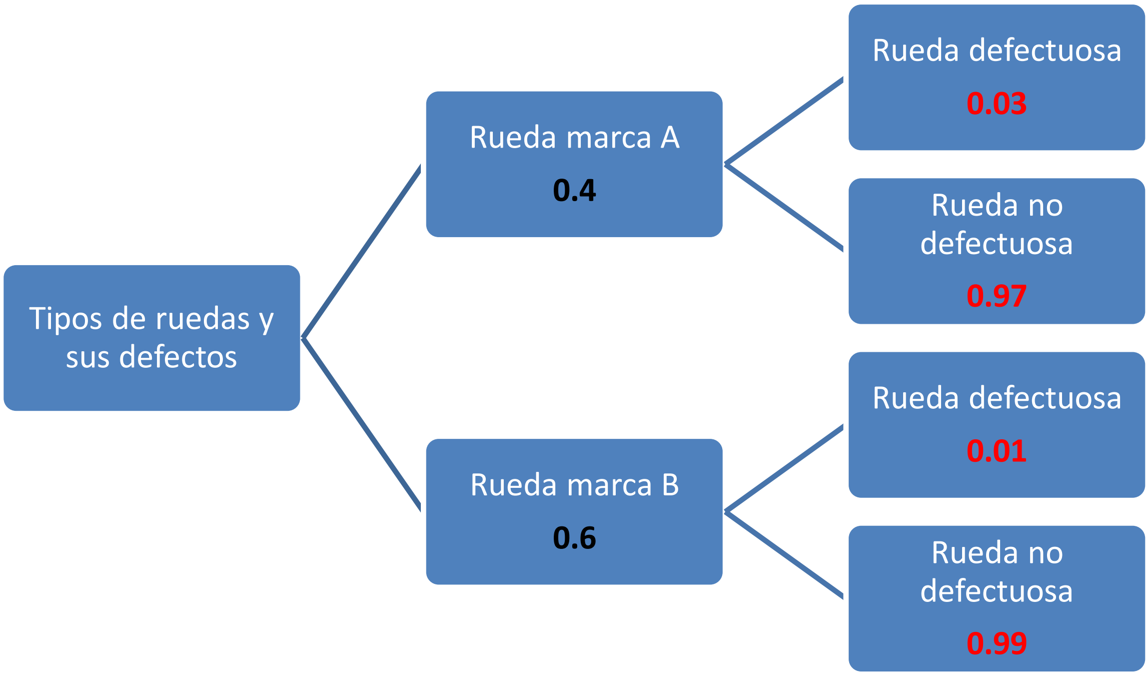
$$Área=\left|\int_0^1 \sqrt{x}-x^2dx\right|+\left|\int_1^2 \sqrt{x}-x^2dx\right|=\frac{1}{3}+\frac{9-4\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{10-4\sqrt{2}}{3}\simeq 1.45\,u^2}$$

9. Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B. Compra el 40% a la marca A que tiene un 3% de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1% de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa. (1 punto)

b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A. (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = La rueda es de la marca A; B = La rueda es de la marca B.

D = La rueda es defectuosa $\overline{D}$ = La rueda no es defectuosa

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) =$$
$$= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) =$$
$$= 0.4 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.01 = \boxed{0.018}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.03}{0.018} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.66}$$

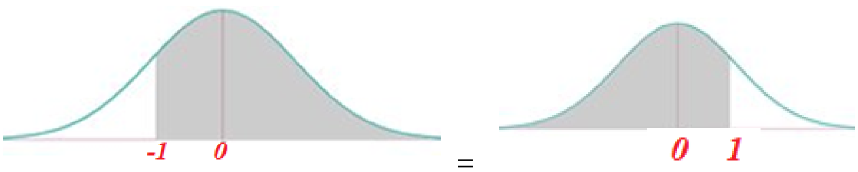
10. Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica de 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5). (1 punto)
b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas. (1 punto)

X = Nota del examen de Matemáticas II de la EBAU. X = N(6.5, 1.5)

a)

$$P(X \geq 5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{5-6.5}{1.5}\right) = P(Z \geq -1) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \leq 1) = \{\text{Miro en la tabla}\} = \boxed{0.8413}$$

z	0,00	0,0
0,0	[illegible]	0,5
0,1	[illegible]	0,5
0,2	[illegible]	0,5
0,3	[illegible]	0,6
0,4	[illegible]	0,6
0,5	[illegible]	0,6
0,6	[illegible]	0,7
0,7	[illegible]	0,7
0,8	[illegible]	0,7
0,9	0,8159	0,8
1,0	0,8413	0,8
1,1	[illegible]	0,8

b) Llamamos “n” a la nota que buscamos.
Queremos que el 97.5 % de los alumnos estén por debajo de su nota → P(X < n) = 0.975

$$P(X < n) = 0.975 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{n-6.5}{1.5}\right) = 0.975$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) esta probabilidad.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]	0,9
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]	0,9
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9

$$\frac{n-6.5}{1.5}=1.96 \Rightarrow n-6.5=1.96\cdot 1.5=2.94 \Rightarrow \boxed{n=2.94+6.5=9.44}$$

La nota que debe sacar es 9.44.