ÁLGEBRA

Nombre: ....

1.– Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-4y+3z=3 \end{array}\right\}$$

a) Es un sistema de Cramer. ¿Por qué?
b) Resuélvelo por el método de Gauss.

(2 puntos)

2.– Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 €, y el de uno pequeño, 60 €.
Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

(3,5 puntos)

3.– Resolver la ecuación matricial $AX+B=2C$ siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1,75 puntos)

4.– Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 € a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 € que paga el hermano menor, el mayor paga 3 € ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

(2 puntos)

5.– Indicar las propiedades de los determinantes que permiten escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(0,75 punto)

① 2/

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-4y+3z=3 \end{array}\right\}$$

a) Hallamos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -3+6+8-3-12+4=0 \Rightarrow$ No es de Cramer porque la matriz de los coeficientes no es invertible

b) $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ (1)\ 2x-y+z=2 \\ (3)\ 3x-4y+3z=3 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 3x+y \quad =3 \\ (-2)\ 6x+2y \quad =6 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 3x+y \quad =3 \\ 0=0 \end{array}\right\} \to y=3-3x$

$x+2(3-3x)-z=1$

$z=x+6-6x-1$

$z=5-5x$

Sol

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3-3\lambda \\ z=5-5\lambda \end{array}}$$

② 2/5 x: "nº de autocares grandes que alquila"

y: "nº de autocares pequeños que alquila"

Minimizar el coste $z=80x+60y$

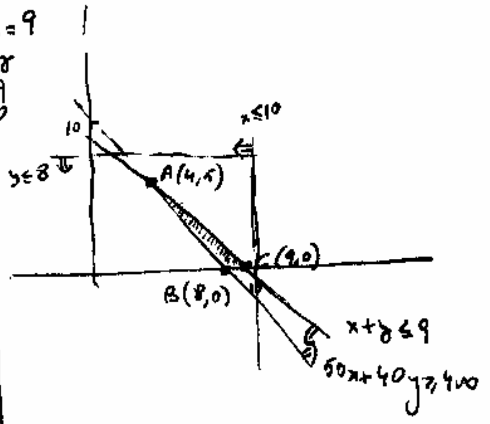
Restricciones $\left.\begin{array}{l} 50x+40y\geq 400 \\ x\leq 10 \\ y\leq 8 \\ x+y\leq 9 \\ x,y\geq 0 \end{array}\right\}$

$50x+40y=400$

x	y
0	10
8	0

$x+y=9$

x	y
0	9
9	0



$\left.\begin{array}{l} x+y=9 \\ 50x+40y=400 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} -40x-40y=-360 \\ 50x+40y=400 \end{array}\right\}$

$10x=40$

$x=4$

$y=9-4=5$

Coste para cada vértice:

$A(4,5) \Rightarrow z=80\cdot4+60\cdot5=620$

$B(8,0) \Rightarrow z=80\cdot8=640$

$C(9,0) \Rightarrow z=80\cdot9=720$

Solución

Debe alquilar 4 autocares grandes y 5 pequeños. El coste sería de 620 €

③ 1.75

$AX+B=2C$, $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}4&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}8&-2&4\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&-3&4\\1&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5&-3&4\\1&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3&4\\1&-2&1\end{pmatrix}=\boxed{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&4\\3&1&2\end{pmatrix}}$

$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}A^t=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}$

④ 2/

x: "dinero que pone el padre"

y: "dinero que pone el hermano mayor"

z: " ... menor"

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x=3(y+z) \\ 2y=3z \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x=3y+3z \\ 2y=3z \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\}$

$\sim \begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 2x+3y=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}$ $\to x=-\frac{3}{2}y$, $z=\frac{2}{3}y$ $\to -\frac{3}{2}y+y+\frac{2}{3}y=100 \to -9y+y+4y=600$

$-4y=600$

$x+y+z=100 \to 75+15+z=100 \Rightarrow z=10$

$4x=300 \to x=75$

$3x+5y=300 \to 3\cdot75+5y=300 \to y=\frac{75}{5}=15$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=75\ € \\ y=15\ € \\ z=10\ € \end{array}}$$

⑤ 0.75

$\begin{vmatrix}5&30&20\\6&9&12\\1&-3&0\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&6&4\\2&3&4\\1&-3&0\end{vmatrix}=15\cdot\begin{vmatrix}1&6&4\\2&3&4\\2&3&4\end{vmatrix}=0$

La 1ª fila es múltiplo de 5 y la 2ª fila múltiplo de 3

La nueva F_3' es F_3+F_1

Hay 2 filas iguales