Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

2.- (*10 puntos*) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

3.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+12}{x-1}$$

Calcular:

a.- (1 *punto*) Dominio de *f*.

b.- (3 *puntos*) Para que valores de *x* se cumple $f(x)<0$?

c.- (2 *puntos*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d.- (4 *puntos*) Máximos y mínimos relativos de *f*.

4.- (*10 puntos*) Dada la función, definida para $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x+1} & si \quad x<-1\\ x^3-4x^2+2x-10 & si \quad -1\le x\le 4\\ \sqrt{4x^2-7x}-2x & si \quad x>4\end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de *f*

b.- *(4,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

c.- *(2,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean blancas.

b.- (*3 puntos*) La probabilidad de que al menos una sea blanca.

c.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.

d.- (*3 puntos*) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (*6 puntos*) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b.- (*4 puntos*) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9546
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Llamamos "x" al número de entrenamientos cortos e "y" al número de entrenamientos largos. Construimos una tabla con lo datos del ejercicio.

	Nº horas	Nº km	Nº kilocalorías
Nº entrenamientos cortos (x)	x	15x	1200x
Nº entrenamientos largos (y)	3y	30y	2500y
TOTALES	$x+3y$	$15x+30y$	$1200x+2500y$

Las restricciones son:

"*Hace al menos 24 entrenamientos*" → $x+y\geq 24$

"*No corre más de 660 km ni dedica más de 48 horas*"→ $15x+30y\leq 660$ $\quad x+3y\leq 48$

Los valores son positivos → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Queremos maximizar el consumo de kilocalorías $f(x,y)=1200x+2500y$, pero con una serie de restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 24 \\ 15x+30y\leq 660 \\ x+3y\leq 48 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y\geq 24 \\ x+2y\leq 44 \\ x+3y\leq 48 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y que delimitan nuestra región factible.

$x+y=24$

x	$y=24-x$
0	24
24	0

$x+2y=44$

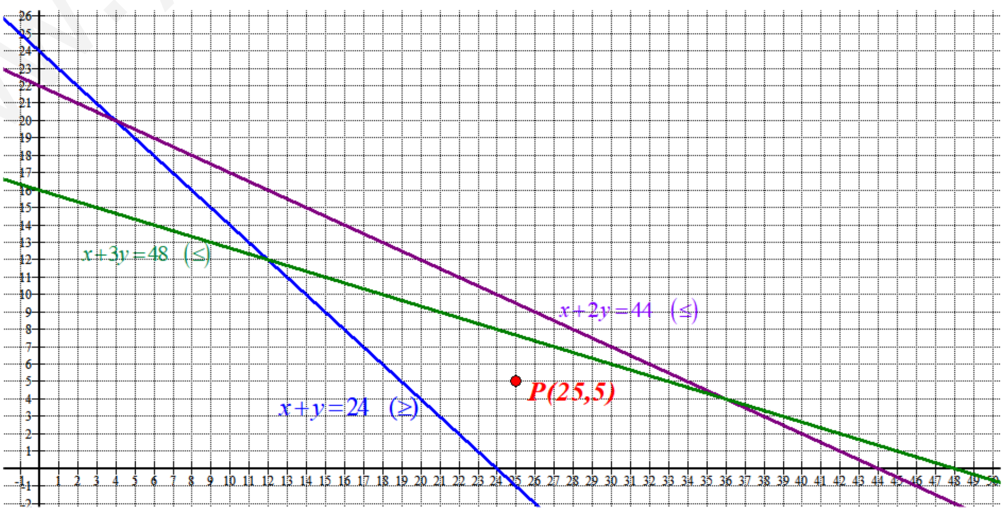
x	$y=\frac{44-x}{2}$
0	22
44	0

$x+3y=48$

x	$y=\frac{48-x}{3}$
0	16
48	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

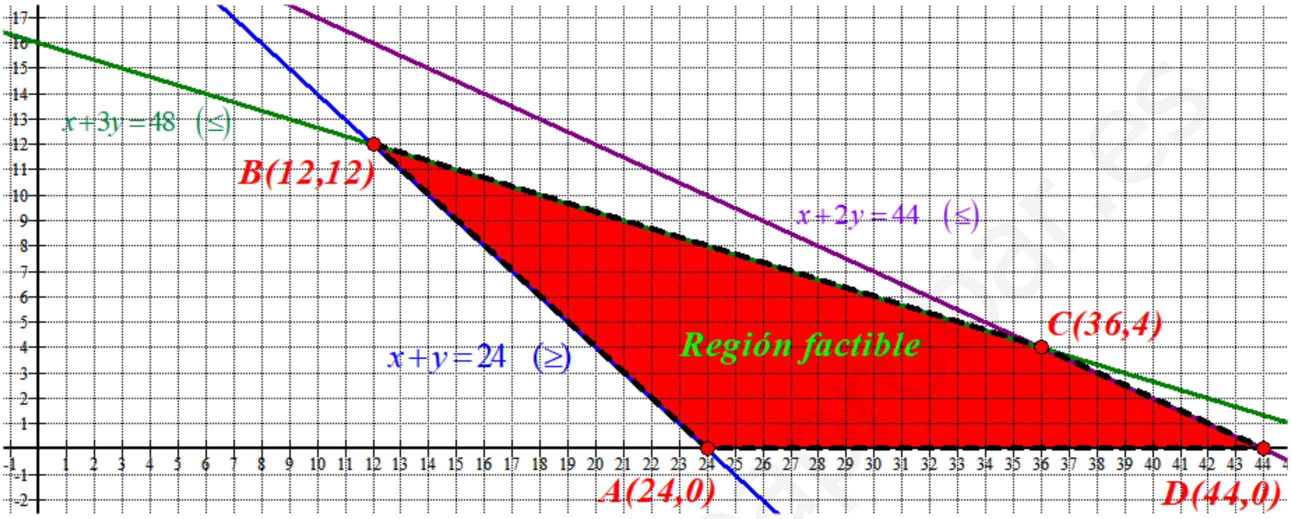
El primer cuadrante



Probamos si el punto P(25,5) cumple todas las restricciones y por tanto la región del plano a la que pertenece es la región factible.

$$\left.\begin{array}{r} 25+5\geq 24 \\ 25+10\leq 44 \\ 25+15\leq 48 \\ 25\geq 0;\, 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{Cumple todas las restricciones.}$$

La región factible es la zona pintada de rojo en el dibujo. En la que indicamos sus vértices, candidatos a maximizar la función $f(x,y)=1200x+2500y$.



Las coordenadas de los vértices A y D las obtenemos de la tabla de valores de cada recta.
Las coordenadas de los vértices B y C las obtenemos resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=24 \\ x+3y=48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=24 \\ -x-3y=-48 \end{array}\right\}$$

$$-2y=-24 \Rightarrow y=12 \rightarrow x+12=24 \rightarrow x=12 \Rightarrow B(12,12)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ x+3y=48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ -x-3y=-48 \end{array}\right\}$$

$$-y=-4 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x+8=44 \Rightarrow x=36 \rightarrow C(36,4)$$

Valoramos cada vértice en la función consumo de kilocalorías y averiguamos en cual se produce un consumo máximo.

A(24, 0) → $f(24,0)=28800$
B(12, 12) → $f(12,12)=14400+30000=44400$
C(36, 4) → $f(36,4)=43200+10000=53200$
D(44, 0) → $f(44,0)=52800$

El consumo máximo de kilocalorías se produce en el vértice C(36,4).

El máximo consumo de kilocalorías son 53200 kilocalorías y se produce con 36 entrenamientos cortos y 4 largos.

2.- (*10 puntos*) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Llamemos "x" al número de niños que visitan el museo, "y" al número de jóvenes y "z" al número de adultos.

"*Ayer se recaudaron un total de 600 euros*" → $x+2y+5z=600$

"*El número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes*" → $z=2(x+y)$

"S*i hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos*" → $y+100=x+z$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5z=600 \\ z=2x+2y \\ y+100=x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos z por 2x+2y en} \\ \text{ecuación 1ª y 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5(2x+2y)=600 \\ y+100=x+2x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+10x+10y=600 \\ 100=3x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 11x+12y=600 \\ y=100-3x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x+12(100-3x)=600 \Rightarrow 11x+1200-36x=600 \Rightarrow -25x=-600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{600}{25}=24} \Rightarrow \boxed{y=100-72=28} \Rightarrow \boxed{z=48+56=104}$$

Visitaron el museo 24 niños, 28 jóvenes y 104 adultos.

3.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+12}{x-1}$$

Calcular:
a.- (1 *punto*) Dominio de *f*.
b.- (3 *puntos*) Para que valores de *x* se cumple $f(x)<0$?
c.- (2 *puntos*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d.- (4 *puntos*) Máximos y mínimos relativos de *f*.

a. El dominio de la función son todos los reales menos los valores que anulan el denominador.
$\text{Dominio}=\mathbb{R}-\{1\}$

b.

$$f(x)<0\Rightarrow\frac{x^2-4x+12}{x-1}<0$$

Analizamos el signo del numerador y luego el signo conjunto de la fracción.

$$x^2-4x+12=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-32}}{2}=\text{No existe}$$

Por lo que esa parábola es siempre positiva o siempre negativa.

Probamos con $\left.\begin{array}{l}x=0\\x^2-4x+12\end{array}\right\}\Rightarrow 0^2-0+12=12>0$

El numerador ($x^2-4x+12$) siempre es positivo.
El denominador es negativo cuando $x-1<0\Rightarrow x<1$

Conclusión: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+12}{x-1}<0$ cuando $x<1$.

c.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = 1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\frac{9}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4x+12}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+12}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+12}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x}=-3$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x-3$

d.

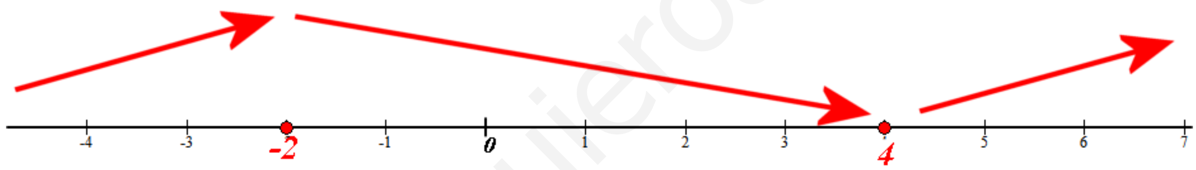
$$f(x)=\frac{x^2-4x+12}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+12)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-12}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x-8=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\begin{cases}\frac{2+6}{2}=4=x\\ \frac{2-6}{2}=-2=x\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de –2, entre –2 y 4 y después de 4.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{(-3)^2-2(-3)-8}{(-3-1)^2}=\frac{7}{16}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{0^2-0-8}{(0-1)^2}=-8<0$. La función decrece en $(-2,4)$
- En $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5)=\frac{5^2-10-8}{(5-1)^2}=\frac{7}{16}>0$. La función crece en $(4,+\infty)$



La función presenta un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 4$.

$f(-2)=\frac{(-2)^2-4(-2)+12}{-2-1}=\frac{24}{-3}=-8$ → Máximo en (–2, –8)

$f(4)=\frac{4^2-16+12}{4-1}=\frac{12}{3}=4$ → Mínimo en (4, 4)

4.- (*10 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si \quad x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si \quad -1 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si \quad x > 4 \end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de *f*

b.- *(4,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

c.- *(2,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

a.- En $(-\infty, -1)$ la función es $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ y es continua pues en *x = –1* no está definida.

En $(-1, 4)$ la función es $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ y es continua pues es un polinomio.

En $(4, +\infty)$ la función es $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x$ y es continua pues el radicando es positivo en el intervalo de definición $(4, +\infty)$. Lo comprobamos:

$$4x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(4x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{4} = 1,75 \end{cases}$$

$$Si\ x > 1,75 \to 4x^2 - 7x > 0; \text{ por ejemplo } x = 5 \to 4 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 = 100 - 35 = 65 > 0$$

El radicando es positivo si x > 4 y la función es continua en $(4, +\infty)$

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

En *x = –1*.

- Existe $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 2(-1) - 10 = -1 - 4 - 2 - 10 = -17$
- $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^-} x^3 - 4x^2 + 2x - 10 = -17 \end{array} \right\} \Rightarrow No\ son\ iguales$. No existe el límite.

La función **no** es continua en *x = –1*.

En *x = 4*.

- Existe $f(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 - 10 = -2$
- Existe $\displaystyle\lim_{x \to 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 4^-} x^3 - 4x^2 + 2x - 10 = -2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 4^+} \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x = \sqrt{4 \cdot 4^2 - 28} - 8 = -2 \end{array} \right\} = -2$
- $f(4) = -2 = \displaystyle\lim_{x \to 4} f(x)$

La función es continua en *x = 4*.

Conclusión: La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

b.-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-7x}-2x = \infty-\infty = \text{Indeterminación}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{4x^2}-7x-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{2x+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{4x} = \boxed{\frac{-7}{4}}$$

c.- En el intervalo $(1,2)$ la función es $f(x) = x^3-4x^2+2x-10 \quad si \quad -1 \le x \le 4$.

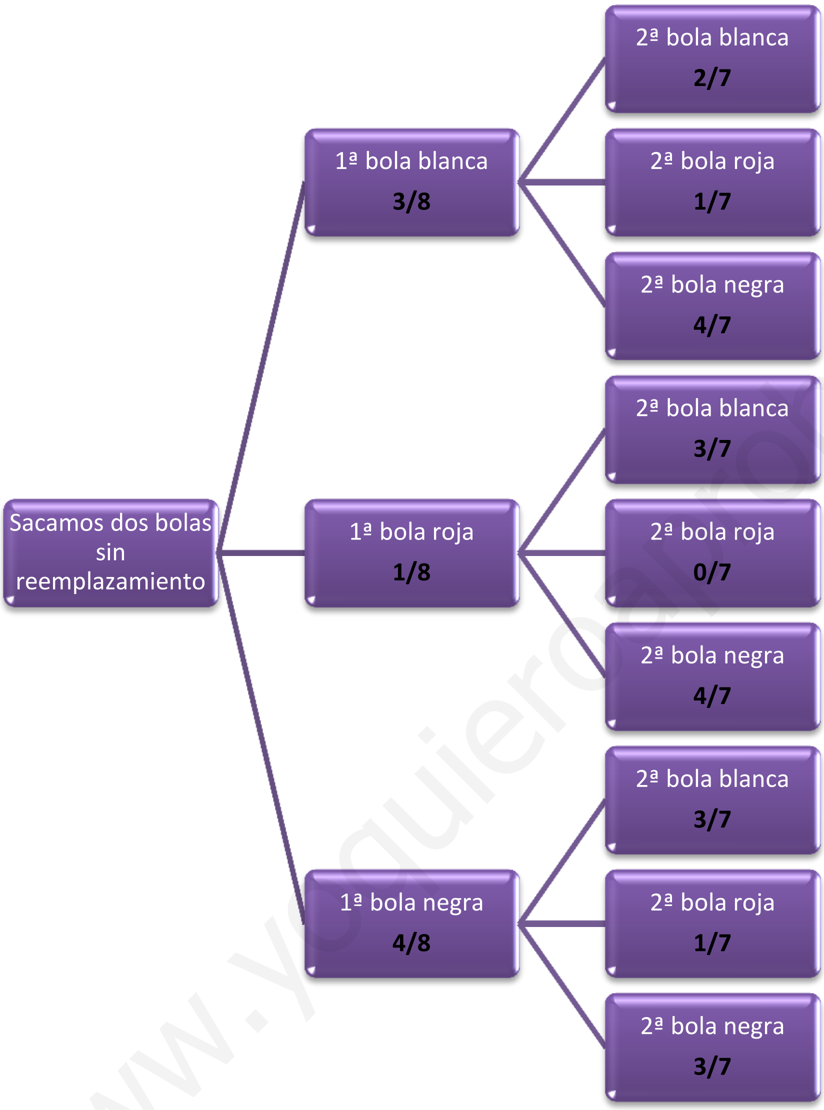
$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x^3-4x^2+2x-10dx = \left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+x^2-10x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4}-4\frac{2^3}{3}+2^2-20\right]-\left[\frac{1^4}{4}-4\frac{1^3}{3}+1^2-10\right] = 4-\frac{32}{3}+4-20-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-1+10=$$

$$= -3-\frac{28}{3}-\frac{1}{4} = \boxed{-\frac{151}{12}=-12.58}$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:
a.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean blancas.
b.- (*3 puntos*) La probabilidad de que al menos una sea blanca.
c.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
d.- (*3 puntos*) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Realizamos el diagrama de árbol.



a)
$$P(\text{Las dos bolas blancas}) = P(1^{\text{a}} \text{ bola blanca})\, P(2^{\text{a}} \text{ bola blanca/ } 1^{\text{a}} \text{ bola blanca}) =$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \boxed{\frac{3}{28} = 0{,}107}$$

b) Hay varias formas de que ocurra lo pedido, calculamos la probabilidad de cada una de las posibilidades y las sumamos.
$$P(\text{Al menos una blanca}) = P(1^{\text{a}} blanca)\, P(2^{\text{a}} blanca / 1^{\text{a}} blanca) +$$
$$+ P(1^{\text{a}} blanca)\, P(2^{\text{a}} roja / 1^{\text{a}} blanca) + P(1^{\text{a}} blanca)\, P(2^{\text{a}} negra / 1^{\text{a}} blanca) +$$
$$+ P(1^{\text{a}} roja)\, P(2^{\text{a}} blanca / 1^{\text{a}} roja) + P(1^{\text{a}} negra)\, P(2^{\text{a}} blanca / 1^{\text{a}} negra) =$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{36}{56} = \boxed{\frac{9}{14} = 0{,}643}$$

c)

$$P(\text{Las dos bolas del mismo color}) = P(\text{Las dos blancas}) + P(\text{Las dos negras}) =$$

$$= \frac{6}{56} + P(1^{\text{a}}\text{ bola negra})P(2^{\text{a}}\text{ bolan negra / }1^{\text{a}}\text{ bola negra}) = \frac{6}{56} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \boxed{\frac{9}{28} = 0.321}$$

d)

$$P(\text{Las dos bolas sean blancas / Son del mismo color}) =$$

$$= \frac{P(\text{Las dos bolas sean blancas} \cap \text{Son del mismo color})}{P(\text{Son del mismo color})} =$$

$$= \frac{P(\text{Las dos bolas sean blancas})}{P(\text{Son del mismo color})} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = 0.33}$$

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (*6 puntos*) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b.- (*4 puntos*) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

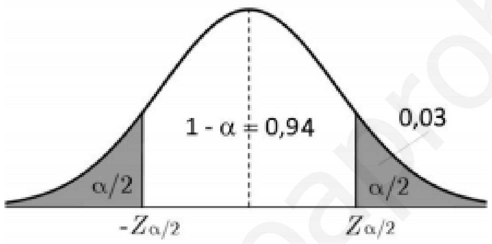
Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr = 0,5$.

Con este valor de la proporción el producto $pr \cdot qr$ toma el valor máximo.

a.-

Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 94%

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0'03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,88}$$



El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, por lo que el *Error* debe ser menor de *0.05.*

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.88} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.88}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.88}\right)^2} = 353.44$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 354 hogares.

b.-

Tenemos que $n = 200$ y la proporción es $pr = \frac{112}{200} = 0.56 \rightarrow qr = 1 - 0.56 = 0.44$

Para un nivel de confianza del 94% el valor crítico es $z_{\alpha/2}$ = **1,88**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.56 \cdot 0.44}{200}} = 0.06$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(0.56 - 0.066,\ 0.56 + 0.066\right) = \left(0.494,\ 0.626\right)$$