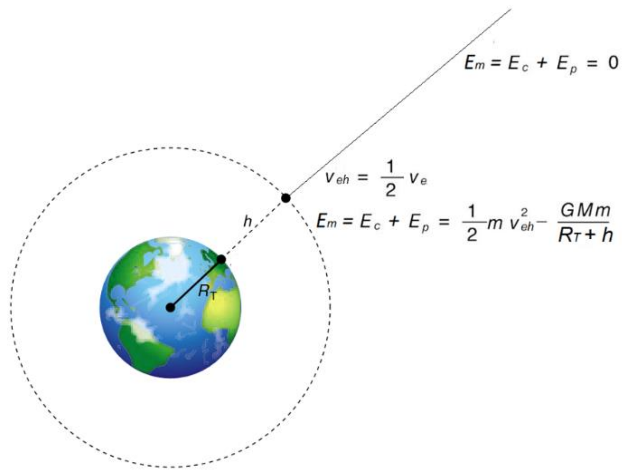
1.- Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) ¿A qué altura se encuentra el satélite?

b) ¿Se trata de un satélite estacionario?



La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, ya que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es conservativa.

Así, la velocidad de escape desde la superficie terrestre se obtiene igualando la energía mecánica inicial en la superficie a la final, en el infinito (en el infinito la energía mecánica es cero).

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

La velocidad de escape desde la órbita a una altura h sobre la superficie terrestre es:

$$\frac{1}{2}mv_{eh}^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{eh} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}}$$

Como la relación entre las velocidades de escape es $v_{eh}=1/2\ v_e$, resulta que:

$$v_{eh} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}v_e = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \qquad \text{Por lo que:} \quad \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

De aquí podemos hallar la altura a la que está el satélite.

Para ello elevamos cada miembro de la igualdad al cuadrado: $\frac{2GM_T}{R_T + h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2GM_T}{R_T}$

Simplificamos: $\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{4R_T}$

Invertimos: $R_T + h = 4R_T$

Y despejamos h: $h = 4R_T - R_T \Rightarrow h = 3R_T$

b) Para ser estacionario, el periodo de rotación del satélite tendría que ser el mismo que el periodo de rotación terrestre. Para poder realizar la comparación calculamos el periodo del satélite artificial:

$$T = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{\frac{GM_T}{R_0}}} = \frac{2\pi\left(4R_T\right)}{\sqrt{\frac{GM_T}{4R_T}}} = \frac{8\pi R_T}{\sqrt{\frac{GM_T}{4R_T}}} = \frac{8\pi R_T\sqrt{4R_T}}{\sqrt{GM_T}}$$

Elevando al cuadrado:

$$T^2 = \frac{64\pi^2 R_T^2 \cdot 4R_T}{GM_T} = \frac{64\pi^2 R_T^2 \cdot 4R_T}{gR_T^2} = \frac{256\pi^2 R_T}{g}$$

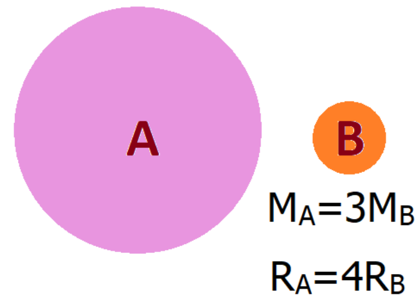
$$T = \sqrt{\frac{256\pi^2 R_T}{g}} = \sqrt{\frac{256\pi\ 6,37 \cdot 10^6}{9,8}} = 40525s = 11,26h$$

Luego no es estacionario porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.

2.- El planeta A tiene tres veces más masa que el planeta B y cuatro veces su radio. Obtén:

a) La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.
b) La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.

Datos: $M_A=3M_B$; $R_A=4R_B$



a) De los valores de las velocidades de escape:

$$v_{eA} = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} \text{ y } v_{eB} = \sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}$$

obtenemos la relación:

$$\frac{v_{eA}}{v_{eB}} = \frac{\sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}}}{\sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{M_A R_B}{M_B R_A}} = \sqrt{\frac{3M_B R_B}{M_B 4R_B}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)

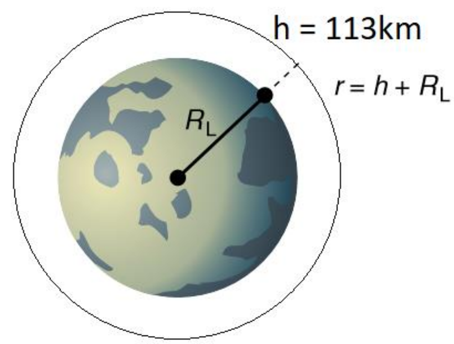
De $g_A = \frac{GM_A}{R_A^{\,2}}$ y de $g_B = \frac{GM_B}{R_B^{\,2}}$

Obtenemos la relación:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{GM_A}{R_A^{\,2}}}{\frac{GM_B}{R_B^{\,2}}} = \frac{M_A \cdot R_B^{\,2}}{M_B \cdot R_A^{\,2}} = \frac{3M_B \;\; R_B^{\,2}}{M_B \cdot 16 \cdot R_B^{\,2}} = \frac{3}{16}$$

3.- La nave espacial *Apolo VIII* estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie. Calcula:

a) El periodo de movimiento.
b) Las velocidades lineal y angular de la nave.
c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.
Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ U.I.
Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, R_L = 1 740 km.



a) y b) La velocidad lineal de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22} kg}{\left(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3\right) m}} = 1630 \frac{m}{s}$$

La velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1630 \, m/s}{\left(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3\right) m} = 8{,}8 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{s}$$

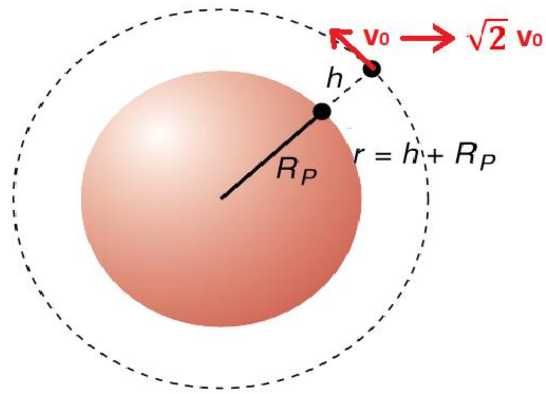
El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi \left(R_L + h\right)}{v} = \frac{2\pi \cdot \left(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3\right) m}{1630 \, m/s} = 7219 s$$

c) La expresión de la velocidad de escape a la altura a la que se encuentra el Apolo VIII se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22} kg}{\left(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3\right) m}} = 2{,}3 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

4.- Un vehículo explorador recorre una órbita de radio r alrededor de un planeta. ¿Qué ocurriría si por accidente se encienden los motores de forma que la velocidad lineal del vehículo se multiplica por $\sqrt{2}$?



La velocidad de un objeto en órbita alrededor de un planeta es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{Planeta}}{r}}$$

Al encenderse los motores la velocidad del vehículo pasa a ser:

$$v = \sqrt{2} \cdot v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{Planeta}}{r}}$$

La energía mecánica del vehículo espacial es igual a la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria:

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{Planeta}m}{r}$$

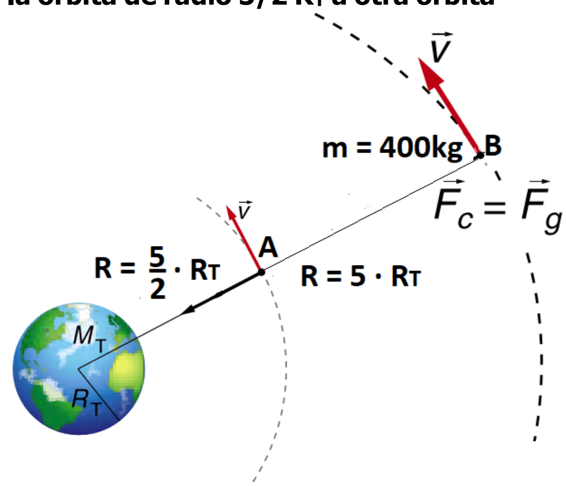
Sustituyendo la velocidad al cuadrado por su nuevo valor:

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\frac{2GM_{Planeta}}{r} - \frac{GM_{Planeta}m}{r} = \frac{GM_{Planeta}m}{r} - \frac{GM_{Planeta}m}{r} = 0$$

Por lo que, al tener E_m=0, el vehículo espacial deja de orbitar al planeta quedando desligado de él.

(Recuerda: Para cualquier objeto puesto en órbita circular alrededor de un astro, si multiplicamos por $\sqrt{2}$, su energía mecánica pasa a valer 0 y se desliga del astro).

5.- Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio 5/2 R_T alrededor de la Tierra. Determina:
a) El trabajo que hay que realizar para llevar el satélite desde la órbita de radio 5/2 R_T a otra órbita circular de radio 5 R_T y mantenerlo en dicha órbita.
b) El periodo de rotación del satélite en la órbita de radio 5 R_T.
Datos: constante de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ U.I.; masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.



a) El trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica entre ambas orbitas.

$$W_{A\to B} = E_{mB} - E_{mA} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_B} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_A}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_A} - \frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_B} = \frac{1}{2}GM_Tm\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 400 \cdot \left(\frac{1}{\frac{5}{2} \cdot 6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{5 \cdot 6,37 \cdot 10^6}\right) = 2,5 \cdot 10^9 J$$

b) Al ser la órbita circular se cumple:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_Tm}{r^2} = m\frac{{}^2}{r} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \Rightarrow \text{T}=\frac{2\pi \text{r}}{\text{v}_\text{C}} = \frac{2\pi \text{r}}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} \Rightarrow \text{T}^2 = \frac{4\pi^2\text{r}^2}{\frac{GM_T}{r}} = \frac{4\pi^2\text{r}^2 r}{GM_T} = \frac{4\pi^2\text{r}^3}{GM_T}$$

Por lo que:

$$\text{T}=\sqrt{\frac{4\pi^2\text{r}^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\left(5 \cdot 6,37 \cdot 10^6\right)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5,68 \cdot 10^4 s = 16h$$

6.- Una persona de 70 kg de masa utiliza un ascensor que tiene una masa de 500 kg. El ascensor tarda un segundo en pasar desde el reposo hasta la velocidad constante de 2 m/s, y otro segundo en frenar y detenerse. Calcula la fuerza que soporta el suelo del ascensor en los siguientes casos: al arrancar ascendiendo, cuando lleva velocidad constante y al parar ascendiendo.

La aceleración que posee el ascensor al arrancar o parar es:

$$a = \frac{\Delta}{\Delta t} = \frac{2\,{}^{m}\!/_{s}}{1s} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Las fuerzas que actúan sobre la persona son su peso y la fuerza normal (reacción R) que aplica el suelo.

- Al arrancar hacia arriba:

$R - mg = ma \Rightarrow R = mg + ma = m\,(g + a) = 70\,(9{,}8 + 2) = 70 \cdot 11{,}8 = 826$ N

- Con velocidad constante:

$R - mg = 0 \Rightarrow R = mg = 70 \cdot 9{,}8 = 686$ N

- Al frenar subiendo:

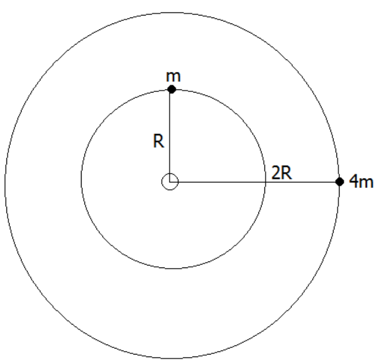
$R - mg = m \cdot (-a) \Rightarrow R = mg - ma = m\,(g - a) = 70\,(9{,}8 - 2) = 70 \cdot 7{,}8 = 546$ N

7.- Dos satélites de masas $m_1 = m$ y $m_2 = 4 \cdot m$ describen sendas trayectorias circulares alrededor de la Tierra, de radios $R_1 = R$ y $R_2 = 2 \cdot R$, respectivamente.

a) Deduce cuál de las masas precisará más energía para escapar de la atracción gravitatoria terrestre y cuál es la relación entre ambas energías.

b) Deduce cuál de las masas tendrá una mayor velocidad de escape y cuál es la relación entre ambas velocidades.

c) Calcula el trabajo necesario para trasladar al satélite de masa m_1 desde su órbita de radio R_1 hasta la órbita de radio R_2. (Expresa el resultado en función de m, R, G y M_T)



a) Cada satélite necesitará una energía de escape que haga que la energía mecánica total sea cero.

Sabemos que en una órbita estable: $E_m = \frac{E_p}{2}$, por tanto para que su valor sea cero se precisará proporcionar una energía (energía de escape E_e) igual a $-\frac{E_p}{2}$

Según esta conclusión:

$$\text{SATÉLITE 1: } E_{m1} = \frac{E_{p1}}{2} \Rightarrow E_{e1} = -\frac{E_{p1}}{2}$$

$$\text{SATÉLITE 2: } E_{m2} = \frac{E_{p2}}{2} \Rightarrow E_{e2} = -\frac{E_{p2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{P1} &= -\frac{GM_T m_1}{R_1} = -\frac{GM_T m}{R} \quad \Rightarrow \quad E_{e1} = -\frac{E_{P1}}{2} = \frac{GM_T m}{2R} \\ E_{P2} &= -\frac{GM_T m_2}{R_2} = -\frac{GM_T 4m}{2R} \quad \Rightarrow \quad E_{e2} = -\frac{E_{P2}}{2} = \frac{GM_T\ m}{4R} = \frac{GM_T m}{R} \end{aligned}\right\} E_{e1} = \frac{E_{e2}}{2}$$

Luego el satélite 2 de masa 4m necesitará el doble de energía de escape que el satélite 1 de masa m.

b) Para que puedan escapar del campo gravitatorio necesitarán al menos una velocidad que haga que la energía mecánica sea cero (velocidad de escape):

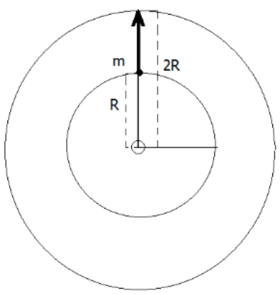
SATÉLITE 1: $\frac{1}{2}m_1 v_e^2 - \frac{GM_T m_1}{R_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{e1} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_1}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$

SATÉLITE 2: $\frac{1}{2}m_2 v_e^2 - \frac{GM_T m_2}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{e2} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_2}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{2R}}$

Por lo que deducimos que $v_{e1} = \sqrt{2} \cdot v_{e2}$

Luego el satélite 1 de masa m necesitará una velocidad de escape mayor que el satélite 2 de masa 4m

c) El trabajo necesario para trasladar al satélite 1 de la órbita de radio R a la de radio 2R es igual a la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas:



ENERGÍA MECÁNICA DEL SATÉLITE 1 EN LA ÓRBITA DE RADIO R:

$$Em_R = Ec_R + Ep_R = \frac{Ep_R}{2} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R}$$

ENERGÍA MECÁNICA DEL SATÉLITE 1 EN LA ÓRBITA DE RADIO 2R:

$$Em_{2R} = Ec_{2R} + Ep_{2R} = \frac{Ep_{2R}}{2} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{2R}$$

TRABAJO NECESARIO PARA TRASLADAR AL SATÉLITE DE UNA ÓRBITA A OTRA:

$$W_{1\to 2} = Em_{2R} - Em_R = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{2R} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R}\right) = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R} - \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{2R} = \frac{1}{2}GM_T m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}GM_T m\left(\frac{2}{2R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{1}{2}GM_T m \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{4}\frac{GM_T m}{R}$$

Por lo tanto:

$$W_{1\to 2} = \frac{GM_T m}{4R}$$

8.- Desde la superficie de la Luna se lanza un objeto de 1500 kg de masa con una velocidad igual a su velocidad de escape, calcula:

a) A qué distancia del centro de la Luna se ha reducido su velocidad a la mitad.

b) La energía mecánica que tendría dicho objeto si estuviera girando en una órbita estable alrededor de la Luna a la distancia del centro de la Luna calculada en el apartado anterior.

Datos: R_{Luna} = 1738 km;

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna = 1,62 m/s^2.

a) Siempre que trabajemos con lanzamientos tenemos que utilizar el teorema de la conservación de la energía mecánica: Una vez impulsado el objeto, la energía mecánica se conserva sea cual sea la altura dónde se encuentre el objeto.

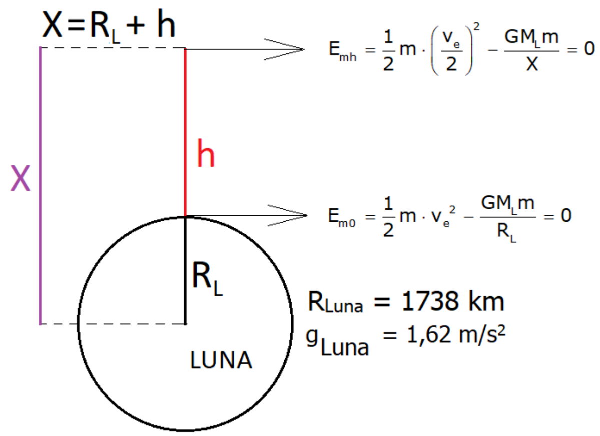
La energía mecánica es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

La velocidad del objeto va disminuyendo (disminuye la energía cinética) a medida que coge altura (aumenta la energía potencial), y así hasta que la velocidad sea cero (es decir se detiene y la energía cinética es cero) que corresponde al punto más alto al que puede llegar.

Cuando la velocidad de lanzamiento coincide con la velocidad de escape, la energía mecánica del objeto es cero desde que sale con dicha velocidad.

Cuando la velocidad del objeto sea la mitad de la velocidad de escape (v_e/2), la energía mecánica (como en todo el trayecto) vale por tanto cero.

Por tanto hacemos el esquema y anotamos los datos que nos dan (en la 3ª presentación del tema tienes un ejercicio resuelto en el que el planteamiento es idéntico):



$$E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 - \frac{GM_L m}{R_L} = 0$$

$$E_{mh} = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{v_e}{2}\right)^2 - \frac{GM_L m}{X} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_e}{2}\right)^2 - \frac{GM_L}{X} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{v_e^2}{4} = \frac{GM_L}{X}$$

Como :

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2GM_L}{R_L}$$

$$\frac{}{8} \cdot \frac{2GM_L}{R_L} = \frac{GM_L}{X} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{GM_L}{R_L} = \frac{GM_L}{X} \Rightarrow X = \frac{GM_L \cdot 4 \cdot R_L}{GM_L} \Rightarrow X = 4 \cdot R_L$$

$$X = 4 \cdot 1738\text{km} = 6952\text{km}$$

b) Cuando un objeto está girando en una órbita circular estable, la energía mecánica total es igual a la mitad de la energía potencial del objeto:

$$E_P = -\frac{G \cdot M_L \cdot m}{X} \Rightarrow E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{X}$$

Aunque desconocemos el valor de la masa de la luna, sabemos que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es 1,62 m/s^2.

$$\left.\begin{matrix} F = G\frac{M_L m}{R_L^2} \\ F = mg_L \end{matrix}\right\} \text{Por lo que: } G\frac{M_L m}{R_L^2} = mg_L \quad \Rightarrow G\frac{M_L}{R_L^2} = g_L$$

De aquí podemos despejar M_L y trabajamos directamente con el valor de la masa de la luna, o bien despejar G· M_L y trabajar con este dato completo:

<u>Con G· M_L</u>

$$G\frac{M_L}{R_L^2} = g_L \quad \Rightarrow G \cdot M_L = g_L \cdot R_L^2$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{X} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_L \cdot R_L^2 \cdot m}{4 \cdot R_L} = -\frac{1}{8} \cdot g_L \cdot R_L \cdot m$$

$$E_m = -\frac{1}{8} \cdot 1{,}62 \cdot 1{,}738 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 = -5{,}28 \cdot 10^8 \text{J}$$

Con M_L

$$G\frac{M_L}{R_L^{\ 2}} = g_L \quad \Rightarrow M_L = \frac{g_L \cdot R_L^{\ 2}}{G}$$

$$M_L = \frac{g_L \cdot R_L^{\ 2}}{G} = \frac{1,62 \cdot \left(1,738 \cdot 10^6\right)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 7,34 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{X} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg} \cdot 1,5 \cdot 10^3}{6,952 \cdot 10^6} = -5,28 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$$